第 41 卷第 6 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2024 年 12 月
Vol. 41　No. 6　　J Chongqing Technol & Business Univ(Nat Sci Ed)　　Dec. 2024

一类矩阵方程的解及其应用

方建卫,袁晖坪
重庆财经学院 软件学院,重庆 401320

摘　要:目前许多力学问题,如计算物理、地质学、结构设计、分子光谱学、电学、参数识别、自动控制、商务智能、线性系统理论、大数据分析与动态分析等领域,都要依赖于矩阵方程。研究了矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的求解问题,给出了矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的新判别条件及其通解表达式,推广了矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的判解条件和通解形式;例题表明简化了矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的求解过程,同时也简化了向量组的线性表示式和基到基的过渡矩阵计算,这对于充实矩阵方程的求解理论和简化计算均是有益的。

关键词:初等变换;矩阵方程;通解;线性表示;过渡矩阵
中图分类号:O151.21　　**文献标识码**:A　　doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2024.0006.016

Solutions to a Class of Matrix Equations and Their Applications

FANG Jianwei, YUAN Huiping
School of Software, Chongqing Finance and Economics College, Chongqing 401320, China

Abstract: Matrix equations are crucial in solving many problems in various fields such as mechanics, computational physics, geology, structural design, molecular spectroscopy, electrical engineering, parameter identification, automatic control, business intelligence, linear system theory, big data analysis, and dynamic analysis. This study investigates the solution of the matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, providing new criteria for the existence of solutions and their general expressions. It extends the conditions for solvability and the general forms of the solutions of the matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$. Examples demonstrate that this approach simplifies the solution process of the matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, as well as the calculation of linear representations of vector sets and the transition matrix between bases. This contributes to enriching the solution theory of matrix equations and simplifying computations.

Keywords: elementary transformations; matrix equations; general solution; linear representations; transition matrix

1　引　言

计算物理、地质学、结构设计、分子光谱学、电学、参数识别、自动控制、商务智能、线性系统理论、大数据分析与动态分析等领域的很多不同类型的问题激发了矩阵方程理论的快速发展,使矩阵方程问题成为计算数学领域的热门研究课题之一 。同时显示,对矩阵方程问题的研究,无论在理论上还是在应用上都具有广阔的应用前景[1-20]。

文献[1]研究了矩阵方程 $\boldsymbol{X}\pm\boldsymbol{A}*\boldsymbol{X}^{-q}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}$ 的有解条件;文献[2]研究了矩阵方程 $\boldsymbol{X}^{s}+\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-t}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}$,文献[1]的部分结果被推广;文献[3-6]研究了 Hermite 正定矩阵方程的求解问题;文献[7-9] 研究了二次 Hermite 矩阵方程的有解条件;文献[10]研究了四元数体上矩阵方程 $\boldsymbol{AXA}^{*}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{CXC}^{*}=\boldsymbol{D}$ 的非负定解;文献[11]研究了 $\boldsymbol{D}$ 对

收稿日期:2024-05-08　**修回日期**:2024-06-29　**文章编号**:1672-058X(2024)06-0121-05
基金项目:国家自然科学基金(11271388);重庆市自然科学基金(CSTC2018JCYJAX0790).
作者简介:方建卫(1983—),女,湖北宜城人,讲师,硕士研究生,从事计算数学研究.
通讯作者:袁晖坪(1958—),男,重庆潼南人,教授,从事矩阵理论的研究. Email:yhp@ctbu.edu.cn.
引用格式:方建卫,袁晖坪. 一类矩阵方程的解及其应用[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2024,41(6):121-125.
FANG Jianwei, YUAN Huiping. Solutions to a class of matrix equations and their applications[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2024, 41(6): 121-125.

称非负定矩阵反问题的解;文献[12]研究了矩阵方程 $X-A^{*}X^{-\alpha}A-B^{*}X^{-\beta}B=I$ 的正定解;文献[13-15] 研究了一类特殊矩阵方程的求解问题;文献[16-17] 研究了 Sylveste 矩阵方程的求解问题;文献[18]研究了 QBD 矩阵方程;文献[19]研究了矩阵广义逆与方程的解;文献[20] 研究了矩阵方程 $AX = B$ 的谱范数约束解。通过上述研究,获得了大量的研究成果,丰富了矩阵方程理论。

本文在此基础上对矩阵方程 $AX=B$ 做进一步的深入探讨,获得了一些新的结果,导出了矩阵方程 $AX=B$ 有解的新判别条件及其通解表达式,推广了矩阵方程 $AX=B$ 的判解条件和通解形式,并由此简化了向量组的线性表示式和基到基过渡矩阵的计算方法。这对矩阵理论及其在结构模型修正、人工智能、振动设计、大数据分析等领域的应用研究,无疑都是很有价值的。

2 主要结果

定理 1 已知矩阵方程 $AX=B$,其中 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $m\times p$ 矩阵,若

$$(A,B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} I_r & A_1 & B_1 \\ O & O & B_2 \end{pmatrix}$$

其中,I_r 为 r 阶单位矩阵,A_1 为 $r\times(n-r)$ 矩阵,B_1 为 $r\times p$ 矩阵,B_2 为 $(m-r)\times p$ 矩阵,则矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是$B_2=0$。在有解时,其通解为

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1-A_1K \\ K \end{pmatrix}$$

其中,K 为任意$(n-r)\times p$ 矩阵。特别,若 $r=m=n$,则矩阵方程 $AX=B$ 的通解为 $X=B_1$。

证明 因为矩阵的初等行变换不改变矩阵方程 $AX=B$ 的同解性,又 $(A,B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix} I_r & A_1 & B_1 \\ O & O & B_2 \end{pmatrix}$,所以,矩阵方程 $AX=B$ 与矩阵方程 $\begin{pmatrix} I_r & A_1 \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ 同解。因此,若 $B_2=0$,则矩阵方程 $\begin{pmatrix} I_r & A_1 \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ 有解,因而矩阵方程 $AX=B$ 有解。反之,若矩阵方程 $AX=B$ 有解,则矩阵方程 $\begin{pmatrix} I_r & A_1 \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ 有解,因而$B_2=0$。故矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是$B_2=0$。在矩阵方程 $AX=B$ 有解时,矩阵方程$\begin{pmatrix} I_r & A_1 \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$有解,因而矩阵方程$(I_r\ \ A_1)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=B_1$ 有解,故其通解为

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1-A_1K \\ K \end{pmatrix}$$

其中,K 为任意$(n-r)\times p$ 矩阵。

特别地,若 $r=m=n$,则 A 为可逆矩阵,矩阵方程 $AX=B$ 的通解为 $X=A^{-1}B=B_1$。

因此,该定理推广了矩阵方程 $AX=B$ 的判解条件和通解形式。

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \\ -7 & 16 \end{pmatrix}$$

求矩阵方程 $AX=B$ 的解。

解 $(A,B)=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & -7 & 16 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 15 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_2 & A_1 & B_1 \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

由定理 1 知 $B_2=O$,所以,矩阵方程 $AX=B$ 有解,且其通解为

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1-A_1K \\ K \end{pmatrix}$$

又 $K=(k_1\ \ k_2)$,

$$B_1-A_1K=\begin{pmatrix} 6 & -11 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}(k_1\ \ k_2)=$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -11 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3k_1 & 3k_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-3k_1 & -11-3k_2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

因此

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1-A_1K \\ K \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-3k_1 & -11-3k_2 \\ -1 & 5 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

其中,k_1、k_2 为任意常数。

例 2 (2018 年考研试题)已知 a 是常数,且矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$$

可经初等列变换化为矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$。

解 (1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0,\ \forall a,$$ 恒有 $r(\boldsymbol{A})=2$,又 $\boldsymbol{B}$ 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix}0&1\\-1&1\end{vmatrix}\neq 0$ 且 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=2-a$,所以 $r(\boldsymbol{B})=2\Leftrightarrow|\boldsymbol{B}|=0\Leftrightarrow a=2$。

(2) 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 就是矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的可逆解 $\boldsymbol{X}$,又

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=$$

$$\begin{pmatrix}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&3&-6&-3&-3&-3\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

由定理 1 知 $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{O}$,所以,矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解,且其通解为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{K}\\\boldsymbol{K}\end{pmatrix}$$

又 $\boldsymbol{K}=(k_1\quad k_2\quad k_3)$,

$$\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}3&4&4\\-1&-1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}(k_1\quad k_2\quad k_3)=$$

$$\begin{pmatrix}3&4&4\\-1&-1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6k_1&6k_2&6k_3\\-2k_1&-2k_2&-2k_3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}3&4&4\\-1&-1&-1\\k_1&k_2&k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&4&0\\0&-1&0\\k_1-k_2&k_2&k_3-k_2\end{vmatrix}=$$

$$k_3-k_2\neq 0$$

故 $$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{K}\\\boldsymbol{K}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$$

其中,k_1、k_2、k_3 为任意常数且 $k_2\neq k_3$。

另解 (2) 用矩阵的初等列变换化矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&3&0\\2&7&-2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-2c_1}\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\2&3&-2\\1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3+c_2]{c_1-c_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\-1&3&1\\3&-2&-2\\-1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2+2c_1}\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\-1&1&1\\3&4&-2\\-1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{P}\end{pmatrix}$$

所以,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3&4&-2\\-1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,使 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$。

例 3 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\\-1&1&-3\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&-1\\7&3\\2&8\end{pmatrix}$$

解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$。

解 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&-1\\2&5&6&7&3\\-1&1&-3&2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&-1\\0&1&0&-1&5\\0&3&0&6&7\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&6&-11\\0&1&0&-1&5\\0&0&0&9&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$$

由定理 1 知 $\boldsymbol{B}_2=(9-8)\neq\boldsymbol{O}$,所以,矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解。

3　实例应用与分析

3.1　在求向量组线性表示式中的应用

例 4 判断向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,4)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(2,2,6)^{\mathrm{T}}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,若能,试求出线性表示式。

解 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,向量组

$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示等价于矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 是否有解。由于

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&2\\2&3&1&4&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&2\\0&1&-1&2&1&2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&0\\0&1&-1&2&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

由定理1知 $\boldsymbol{B}_2=O$,所以矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解,且其通解为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{K}\\\boldsymbol{K}\end{pmatrix}$。

又 $\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{k}_1\quad\boldsymbol{k}_2\quad\boldsymbol{k}_3)$,

$$\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}(k_1\quad k_2\quad k_3)=$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2k_1&2k_2&2k_3\\-k_1&-k_2&-k_3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-1-2k_1&1-2k_2&-2k_3\\2+k_1&1+k_2&2+k_3\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\\boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{K}\\\boldsymbol{K}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2k_1&1-2k_2&-2k_3\\2+k_1&1+k_2&2+k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$,其中,$k_1$、$k_2$、$k_3$ 为任意常数。因此,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,其线性表示式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(-1-2k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(2+k_1)\boldsymbol{\alpha}_2+k_1\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\beta}_2=(1-2k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\beta}_3=-2k_3\boldsymbol{\alpha}_1+(2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

其中,k_1、k_2、k_3 为任意常数。

3.2 在求基到基的过渡矩阵中的应用

例5 在向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中,求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,6)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(2,1,4)^{\mathrm{T}}$ 的过渡矩阵 。

解 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,则求基 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵等价于求矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解。由于

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&2&3&6&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&1&0&1&2&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&1\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&1&-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1&3\\0&1&0&1&2&0\\0&0&1&-1&1&-1\end{pmatrix}=$$

$$(\boldsymbol{I}_3\quad\boldsymbol{B}_1)$$

由定理1矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&2&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$,即 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&2&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$。

所以,由基 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$、$\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&2&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

4 结束语

给出了矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的新的判别条件及其通解表达式、推广了矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的判解条件和通解形式。大大简化了矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的求解过程,同时也大大简化了向量组的线性表示式和基到基过渡矩阵的计算。这对于充实矩阵方程的求解理论和简化计算具有重要意义。该文方法在其他领域的应用还待进一步探索。

参考文献(References):

[1] HASANOVV I. Positive definite solutions of the matrix equations $X\pm A*X^{-q}A=Q$[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 404(15): 166-182.

[2] YANG Y T. The iterative method for solving nonlinear matrix equation $X^s+A^*X^{-t}A=Q$[J]. Applied Mathematics Computation, 2007, 188(1): 46-53.

[3] ZHANG Xian. Hermitiannon negative-definite and positive definite solutions of the matrix equation[J]. Applied Mathematics E-Notes, 2004(4): 40-47.

[4] KHATRI C G, MITRA S K, Hermitian nonnegative definite solution of linear matrix equations[J]. SIAM Journal of Applied Mathematics 1976, 31(3): 579-585.

[5] JAMESON A, KXEINDLER E, LANEASTER R. Symmetric positive semidefinite positive real solutions of $AX=XA^{\mathrm{T}}$ and $AX=YB$[J]. Linear Algebra and Its Applications , 1992, 160(3): 189-215.

[6] 杨昌兰,王龙波. Hermite 矩阵方程[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(3): 500-502.
YANG Chang-lan, WANG Long-bo. Hermite matrix equation[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2004, 24(3): 500-502.

[7] 严益水,杨忠鹏,陈清华. 关于二次 Hermite 矩阵方程的解的注记[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2010, 26(1): 1-4.

YAN Yi-shui, YANG Zhong-peng, CHENG Qing-hua. Notes on the solutions of the second Hermite matrix equation[J]. Journal of Fujian Normal University (Natural Sciences Edition), 2010, 26(1): 1-4.

[8] 邱红兵. 一个二次方程的解[J]. 广东工业大学学报, 2008, 25(2): 29-30.
QIU Hong-bing. A solution of a quadratic equation[J]. Journal of Guangdong University of Technology, 2008, 25(2): 29-30.

[9] 袁晖坪. 二次广义 Hermite 矩阵方程的解[J]. 吉林大学学报(理学版), 2012, 50(2): 281-283.
YUEN Hui-ping. Solutions of the quadratic generalized Hermite matrix equation[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2012, 50(2): 281-283.

[10] 李桃生. 四元数体上矩阵方程 $\boldsymbol{AXA}^{*}=\boldsymbol{B}, \boldsymbol{CXC}^{*}=\boldsymbol{D}$ 的非负定解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2003, 37(3): 297-300.
LI Tao-sheng. Nonnegative definite solutions of matrix equations over the quaternion field[J]. Journal of Central China Normal University (Natural Sciences Edition), 2003, 37(3): 297-300.

[11] 梁燕来, 张正杰, 周泽文. D 对称非负定矩阵反问题的解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2004, 38(3): 280-283.
LIANG Yan-lai, ZHANG Zheng-jie, ZHOU Ze-wen. Solutions to the inverse problem of D-Symmetric nonnegative definite matrices[J]. Journal of Central China Normal University (Natural Sciences Edition), 2004, 38(3): 280-283.

[12] 杜忠复. 矩阵方程 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-\alpha}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{X}^{-\beta}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ 的正定解[J]. 吉林大学学报(理学版), 2010, 48(1): 26-32.
DU Zhong-fu. Positive definite solutions of $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-\alpha}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{X}^{-\beta}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ matrix equations[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2010, 48(1): 26-32.

[13] 王江涛, 张忠志, 谢冬秀, 等. 一类矩阵方程的埃尔米特自反最小二乘解[J]. 系统科学与数学, 2010, 30(8): 1136-1147.
WANG Jiang-tao, LI Bao-chen, XIE Dong-xiu, et al. Hermitian reflexive least squares solutions of a class of matrix equations[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2010, 30(8): 1136-1147.

[14] 袁晖坪, 罗光耀. 一类矩阵方程的解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2013, 47(1): 8-11.
YUEN Hui-ping, LUO Guang-yao. Solutions of a Class of matrix equations[J]. Journal of Central China Normal University (Natural Sciences Edition), 2013, 47(1): 8-11.

[15] 张健, 王永达. 一类 Von Karman 方程的解的存在唯一性[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, 47(2): 279-286.
ZHANG Jian, WANG Yong-da. Existence and uniqueness of solutions for a class of Von Karman equations[J]. Journal of Shanxi University (Natural Sciences Edition), 2024, 47(2): 279-286.

[16] 马其凤. 求解连续 Sylveste 矩阵方程的 E-extra 迭代法[J]. 应用数学, 2023, 36(1): 220-229.
MA Qi-feng. Solving continuous Sylvester matrix equations using the E-Extra iterative method[J]. Mathematica Applicata, 2023, 36(1): 220-229.

[17] 马其凤, 何艺芬, 谢亚君. 广义-Sylveste 矩阵方程的重新表述[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2024, 47(3): 451-456.
MA Qi-feng, HE Yi-fen, XIE Ya-jun. Reformulation of the generalized -Sylvester matrix equation[J]. Journal of Shanxi University (Natural Sciences Edition), 2024, 47(3): 451-456.

[18] 赵晓路, 关晋瑞, 常帅. QBD 矩阵方程的最小非负解[J]. 宁夏师范学院学报, 2023, 44(10): 19-24.
ZHAO Xiao-lu, GUAN Jin-rui, CHANG Ji-rui. Minimum nonnegative solution of QBD matrix equations[J]. Journal of Ningxia Normal University, 2023, 44(10): 19-24.

[19] 瞿佩佩, 石欣侗, 魏俊潮. 矩阵广义逆与方程的解[J]. 大学数学, 2022, 38(5): 6-11.
QU Pei-pei, Shi Xin-dong, WEI Jun-chao. The moore-penrose pseudo-inverse of matrices and solutions of equations[J]. College Mathematics, 2022, 38(5): 6-11.

[20] 刘喜富, 罗乐. 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的谱范数约束解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2023, 46(1): 58-65.
LIU Xi-fu, LUO Le. The spectral norm constrained solution of the matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Sciences Edition), 2023, 46(1): 58-65.

责任编辑:李翠薇