

## 材料梯度、几何非线性和高阶剪切效应对压电纳米梁力电特性的耦合影响

虞志勇, 曾 汕, 罗思贵

南昌航空大学 飞行器工程学院, 南昌 330063

**摘要:**目的 压电材料由于其优越的力电性能在 MEMS/NEMS 得到广泛应用。针对目前对压电纳米结构力电响应计算忽视了微/纳米尺度下压电材料的挠曲电效应以及剪切效应问题,提出了囊括挠曲电效应和压电效应的功能梯度压电(Functionally Graded Piezoelectric, FGP)纳米梁数学模型。纳米梁由压电层和功能梯度层组成,其中功能梯度层材料遵循幂律指数分布。方法 首先,基于 Reddy 三阶剪切变形理论、非局部应变梯度理论(NGST)和哈密顿原理,并考虑了 Von Kármán 几何非线性,获得了梯度梁的非线性力电耦合控制方程及相应的边界条件;然后结合 Runge-Kutta 方法和 Galerkin 方法得到了简支梁的线性和非线性固有频率以及均方根(RMS)输出电压。结果 提出的模型与已有文献结果对比十分吻合。此外,数值结果表明挠曲电常数、压电常数、应变梯度尺度参数、非局部参数、幂律指数和几何尺寸对非线性固有频率和均方根电压有影响。结论 相较于 Euler 梁理论和 Timoshenko 梁理论,采用 Reddy 三阶剪切变形理论得到的梯度梁在相同质量下具有更高的 RMS 电压,同时会降低非线性固有频率。

**关键词:**非线性振动;Reddy 三阶剪切变形理论;功能梯度;压电;挠曲电

**中图分类号:** O302 **文献标识码:** A **doi:** 10.16055/j.issn.1672-058X.2024.0004.005

### Coupling Effects of Material Gradient, Geometric Nonlinearity and High-order Shear Effect on the Electro-mechanical Properties of Piezoelectric Nanobeam

YU Zhiyong, ZENG Shan, LUO Sigui

School of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China

**Abstract:** **Objective** Piezoelectric materials are widely used in MEMS/NEMS due to their excellent electromechanical properties. A mathematical model of functionally graded piezoelectric (FGP) nanobeams including the flexoelectric effect and the piezoelectric effect was proposed to solve the problem that the flexoelectric effect and shear effect of piezoelectric materials at the microscale/nanoscale are neglected in the current calculation of the electromechanical response of piezoelectric nanostructures. The nanobeam consists of a piezoelectric layer and a functionally graded layer, while the materials of the functionally graded layer follow the power-law exponential distribution. **Methods** Firstly, based on Reddy's third-order shear deformation theory, nonlocal strain gradient theory (NSGT), Hamilton's principle, and Von Kármán geometric nonlinearity, the nonlinear electromechanical coupling governing equations and corresponding boundary conditions of the gradient beam were obtained. Then, the linear frequency, nonlinear natural frequency, and the root mean square (RMS) output voltage of the simply supported beam were obtained by combining the Runge-Kutta method and the Galerkin method. **Results** The presented model in this study was verified by existing literature results. In addition,

**收稿日期:** 2023-03-05 **修回日期:** 2023-05-18 **文章编号:** 1672-058X(2024)04-0036-09

**基金项目:** 江西省自然科学基金资助项目(20202BAB211005)。

**作者简介:** 虞志勇(1996—),男,江西上饶人,硕士研究生,从事微纳力学研究。

**通讯作者:** 罗思贵(1996—),男,江西宜春人,硕士研究生,从事多场耦合力学研究。Email: lsg2606644068@163.com.

**引用格式:** 虞志勇,曾汕,罗思贵. 材料梯度、几何非线性和高阶剪切效应对压电纳米梁力电特性的耦合影响[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2024, 41(4): 36—44.

YU Zhiyong, ZENG Shan, LUO Sigui. Coupling effects of material gradient, geometric nonlinearity and high-order shear effect on the electro-mechanical properties of piezoelectric nanobeam[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2024, 41(4): 36—44.

the numerical results showed that flexoelectric constants, piezoelectric constants, strain gradient parameters, nonlocal parameters, power-law index, and geometric dimensions have an impact on the nonlinear natural frequency and RMS voltage. **Conclusion** Compared with the Euler beam theory and Timoshenko beam theory, the gradient beam with the same mass has higher RMS voltage and lower nonlinear natural frequency when using Reddy's third-order shear deformation theory.

**Keywords:** nonlinear vibration; Reddy's third-order shear deformation theory; functional gradient; piezoelectricity; flexoelectricity

## 1 引言

功能梯度材料是一种新型复合材料,其成分和微观结构沿空间方向不断变化,导致材料性能的连续变化。由于其优异的热性能和机械性能,它在航空航天、生物医学、能源、汽车等领域具有广泛的应用<sup>[1-2]</sup>。功能梯度材料经常用于解决层间应力分量跳跃、界面脱粘和基体开裂等问题,这是因为它们能够提供结构中连续梯度变化的应力分布。随着纳米功能梯度材料的制备成功并得到广泛研究,人们发现,尺寸效应对小尺寸的功能梯度材料的性能有很大影响<sup>[3-4]</sup>。

压电材料作为智能材料之一,具有优越的机电性能和广阔的发展前景。由于压电材料的压电效应,它们通常用于能量收集器、传感器、执行器等<sup>[5-6]</sup>。另一方面,由于器件小型化的发展,压电微/纳米结构越来越受到关注<sup>[6-7]</sup>。压电器件通常制成层压结构,由于接触界面缺乏粘附性,它们容易在界面处开裂。为了解决这个问题,功能梯度材料的概念已经扩展到压电材料,这种新材料被称为 FGP 材料。FGP 材料可以避免层状压电材料中遇到的界面脱粘和应力集中问题<sup>[8-9]</sup>。

挠曲电本质上是一种类似于压电的机电耦合效应。近年来,纳米压电材料的挠曲电效应越来越受到关注。和压电又有所不同,挠曲电不仅存在于压电材料中,理论上存在于所有电介质中<sup>[10]</sup>。与纳米材料的压电效应相比,挠曲电效应在微/纳米结构中更容易产生电极化,不可忽略。因此,本研究在分析 FGP 纳米梁的振动行为时将考虑挠曲电效应带来的影响。

当结构尺寸降低至纳米量级时,小尺寸效应不容忽视。研究人员发现,非局部理论只能解释纳米结构的刚度软化现象,而应变梯度理论只能解释纳米结构的刚度强化效应。为了将考虑尺度效应的理论进一步推广,Lim 等<sup>[11]</sup>同时考虑非局部效应和应变梯度效应,形成了非局部应变梯度理论(NSGT),该理论能同时解释纳米结构的刚度软化和硬化现象。Barati 和 Shahverdi<sup>[12]</sup>基于 NGST 对多孔功能梯度纳米板在均匀动载荷作用下的强迫振动进行了分析,结果表明非局部参数和应变梯度参数等对纳米板的强迫振动特性有显著影响。Anh 和 Hieu<sup>[13]</sup>使用 NSGT 研究了功能梯度

纳米梁的非线性随机振动,结果表明纳米梁的响应均方值随着幂律指数和非局部参数的增加而增加。

线性梁、板理论在预测结构几何大变形时存在较大误差,研究人员在分析压电纳米结构的振动问题时引入了非线性理论。比如,Luo 等<sup>[14]</sup>使用 Timoshenko 梁模型研究压电夹层纳米梁在 Winkler 地基上的非线性振动时考虑了 Von Kármán 应变的几何非线性。Tao 等<sup>[15]</sup>采用 Von Kármán 几何非线性来解释纳米板中平面的拉伸效应。与线性理论相比,非线性理论在预测结构几何大变形时更加精准,同时非线性也能增强结构的力电响应。但是,这些研究忽视了结构振动时剪切变形带来的影响。因此,为了弥补这些研究的不足,本研究在对 FGP 纳米梁结构振动进行分析时引入了 Reddy 三阶剪切变形理论。该理论包含剪切变形,且不需要引入附加剪切修正因子。研究人员基于 Reddy 三阶剪切变形理论做了大量研究。例如,Vuong 等<sup>[16]</sup>利用 Reddy 三阶剪切变形理论建立了控制方程,分析了 Pasternak 型弹性基础上简支功能梯度环形壳段的非线性振动和动力响应;Reddy 等<sup>[17]</sup>基于三阶剪切变形理论的考虑,研究了功能梯度板中的非线性修正耦合应力;Hong<sup>[18]</sup>研究了三阶剪切变形理论和可变剪切修正系数对热环境下功能梯度材料圆柱壳的全均质方程振动频率的影响。然而,这些研究忽略了挠曲电效应。

本文创新之处在于克服了采用经典连续力学理论对微纳米功能梯度材料无法精确建模的弊端,而采用 Reddy 三阶剪切变形理论和 NGST 对位移场阶数较高且高度非线性的力电耦合问题更为准确。并且综合分析了材料梯度、Von Kármán 型几何非线性和高阶剪切效应下对具有挠曲电性的 FGP 纳米梁的力电特性的耦合影响。同时,为了突出 Reddy 三阶剪切变形理论在处理该问题的优越性,将所得结果分别与 Euler 梁理论和 Timoshenko 梁理论下的结果进行对比分析。

## 2 材料和数学建模

### 2.1 FGP 纳米梁

图 1 为 FGP 纳米梁示意图。梁的上层由压电材料组成,并与负载电阻相连,下层由功能梯度材料组成。假设梁的上层和下层完全粘附,中间无滑移。梁的长、宽、

总厚度分别为  $L, b$  和  $h$ 。笛卡尔坐标  $xOz$  的原点在梁中平面上的左端。压电层的厚度为  $h_p$ , 功能梯度层的厚度为  $h_b = h - h_p$ , 梯度梁顶层和底层到轴距离均为  $h/2$ 。

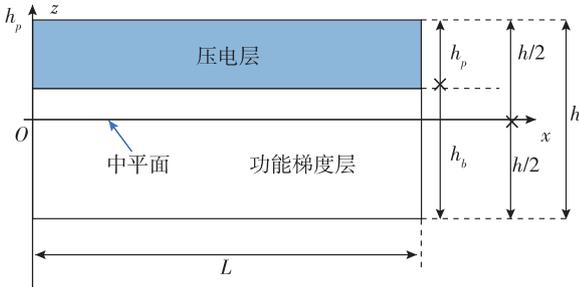


图 1 FGP 纳米梁示意图

Fig. 1 Schematic diagram of FGP nanobeam

假设功能梯度层的材料特性按幂律指数变化, 则弹性常数  $C_{ij}$ , 质量密度  $\rho_{ij}$  可以表示为<sup>[19]</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ij}(z) = (C_{\text{top}} - C_{\text{bottom}}) \left( \frac{z+h/2}{h_p} \right)^p + C_{\text{bottom}}, \\ \left( -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} - h_p \right) \\ C_{ij}(z) = C_p, \frac{h}{2} - h_p < z \leq \frac{h}{2} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{ij}(z) = (\rho_{\text{top}} - \rho_{\text{bottom}}) \left( \frac{z+h/2}{h_p} \right)^p + \rho_{\text{bottom}}, \\ \left( -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} - h_p \right) \\ \rho_{ij}(z) = \rho_p, \frac{h}{2} - h_p < z \leq \frac{h}{2} \end{array} \right. \quad (2)$$

式(1)一式(2)中,  $p$  是表示材料性能变化程度的幂律指数。  $C_{\text{top}}$  和  $C_{\text{bottom}}$  分别是功能梯度层顶部和底部的弹性常数;  $\rho_{\text{top}}$  和  $\rho_{\text{bottom}}$  分别是功能梯度层顶部和底部的质量密度;  $C_p$  和  $\rho_p$  分别是压电层的弹性常数和密度。

## 2.2 位移场

假设  $u$  和  $w$  是梁分别沿  $x$  轴和沿  $z$  轴的位移,  $\Psi_x$  是法线绕  $y$  轴的中平面转动。根据 Reddy 理论, 梁位移分量可以表示为

$$\bar{u} = u + z\Psi_x - \chi \frac{4z^3}{3h^2} \left( \Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3)$$

$$\bar{w} = w(x, t) \quad (4)$$

式(3)和式(4)中,  $t$  代表时间。在式(3)中,  $\chi$  是一个特征参数, 如果  $\chi = 1$ , 式(3)、式(4)则可以简化为一阶剪切变形梁理论的情况。

## 2.3 应变场

梁的应变场可以表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_1^0 + z(\kappa_1^0 + z\kappa_1^1 + z^2\kappa_1^2) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_5^0 + z\kappa_5^1 + z^2\kappa_5^2 \end{array} \right. \quad (5)$$

式(5)中:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \varepsilon_5^0 = \Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \kappa_1^0 = \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}$$

$$\kappa_1^1 = 0, \kappa_1^2 = -\chi \frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\kappa_5^1 = 0, \kappa_5^2 = -\chi \frac{4}{h^2} \left( \Psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

## 2.4 应力和内力

根据压电和挠曲电的对称性, 包含压电效应和挠曲电效应的经典方程为

$$\sigma_{xx} = C_{11}\varepsilon_{xx} - e_{311}E_z \quad (6)$$

$$\sigma_{xz} = C_{55}\varepsilon_{xz} \quad (7)$$

$$\sigma_{xxz} = -\mu_{3131}E_z \quad (8)$$

$$\sigma_{xxz} = -\mu_{3113}E_z \quad (9)$$

$$D_z = a_{33}E_z + e_{311}\varepsilon_{xx} + \mu_{3113}\varepsilon_{xx,z} + \mu_{3131}\varepsilon_{xz,x} \quad (10)$$

式(6)一式(10)中,  $\sigma_{xx}$  和  $\sigma_{xz}$  分别为弹性法向应力和弹性剪切应力;  $\sigma_{xxz}$  和  $\sigma_{xxz}$  表示由挠曲电效应引起的弯矩应力;  $D_z$  为电场位移;  $\mu_{3131}$  和  $\mu_{3113}$  为挠曲电常数;  $a_{33}$  和  $e_{311}$  分别为介电常数和压电常数;  $\varepsilon_{xx,z}$  和  $\varepsilon_{xz,x}$  为应变梯度;  $E_z$  为沿  $z$  方向的电场位移, 可定义为

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (11)$$

式(11)中,  $\varphi$  为电势场。在计算过程中忽略了沿  $x$  和  $y$  方向的电场。

根据 NGST, 应力场  $t_{ij}$  不仅和非局部弹性应力场有关, 也和应变梯度应力场有关, 即:

$$t_{ij} = \sigma_{ij} - \nabla \sigma_{ij}^{(1)}$$

则纳米梁的本构方程可以表示为

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] t_{xx} = C_{11} (1 - l^2 \nabla^2) \varepsilon_{xx} - e_{311} E_z \quad (12)$$

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] t_{xz} = C_{55} (1 - l^2 \nabla^2) \varepsilon_{xz} \quad (13)$$

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{xxz} = -\mu_{3131} E_z \quad (14)$$

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{xxz} = -\mu_{3113} E_z \quad (15)$$

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] D_z = a_{33} E_z + e_{311} \varepsilon_{xx} + \mu_{3113} \varepsilon_{xx,z} + \mu_{3131} \varepsilon_{xz,x} \quad (16)$$

式(12)一式(16)中,  $e_0 a$  为非局部参数,  $l$  为特征尺度参数。根据高斯定理, 有:

$$D_{i,i} = 0 \quad (17)$$

结合式(17)和式(16), 可以得到:

$$D_{z,z} = a_{33} E_{z,z} + e_{311} \varepsilon_{xx,z} + \mu_{3113} \varepsilon_{xx,zz} + \mu_{3131} \varepsilon_{xz,xz} \quad (18)$$

假设电势在  $z = h/2$  处为  $V_0$ , 在  $z = h/2 - h_p$  处为零。结合电边界条件及式(18)和式(11), 可求得电场  $E_z$  和电势  $\varphi_z$ 。则非局部应力和非局部电势可以进一步写成:

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] t_{xx} = C_{11} (1 - l^2 \nabla^2) \varepsilon_{xx} - e_{311} E_{z0} +$$

$$\frac{e_{311} e_{311}}{a_{33}} (z\kappa_1^0 + z^3\kappa_1^2) + \frac{e_{311} \mu_{3113}}{a_{33}} 3z^2\kappa_1^1 + \frac{e_{311} \mu_{3131}}{a_{33}} z^2 \frac{\partial \kappa_5^2}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
 [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] t_{xz} &= C_{55} (1-l^2 \nabla^2) \varepsilon_{xz} \\
 [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{xxz} &= \frac{\mu_{3113} e_{311}}{a_{33}} (z \kappa_1^0 + z^3 \kappa_1^2) - \mu_{3113} E_{z0} + \\
 &\quad \frac{\mu_{3113} \mu_{3113}}{a_{33}} 3z^2 \kappa_1^2 + \frac{\mu_{3113} \mu_{3131}}{a_{33}} z^2 \frac{\partial \kappa_5^2}{\partial x} \\
 [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{zzx} &= \frac{\mu_{3131} e_{311}}{a_{33}} (z \kappa_1^0 + z^3 \kappa_1^2) - \mu_{3131} E_{z0} + \\
 &\quad \frac{\mu_{3131} \mu_{3113}}{a_{33}} 3z^2 \kappa_1^2 + \frac{\mu_{3131} \mu_{3131}}{a_{33}} z^2 \frac{\partial \kappa_5^2}{\partial x} \\
 [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] D_z &= e_{311} \varepsilon_1^0 + \mu_{3113} \kappa_1^0 + \mu_{3131} \frac{\partial \varepsilon_5^0}{\partial x} + a_{33} E_{z0}
 \end{aligned}$$

2.5 控制方程

电焓能量密度函数表示为

$$H = -\frac{1}{2} a_{kl} E_k E_l + \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \varepsilon_{ij} - \mu_{ijkl} E_i \varepsilon_{jk,l} \quad (19)$$

其变分可由  $\delta H = t_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ijl} \delta \varepsilon_{ij,l} - D_i \delta E_i$  进行计算。

梁的动能密度为

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(z) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (20)$$

根据虚功原理,外力做功变分为

$$\delta V = -\int_0^L q(x) \delta w dx \quad (21)$$

根据哈密尔顿原理,有:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \iiint_V H dV + \delta V + \delta T) dt = 0 \quad (22)$$

将式(19)一式(21)代入式(22)并计算,可以得到梁的控制方程,即:

$$\begin{aligned}
 \delta u: [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} = \\
 [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] \left( I_0 \ddot{u} + \bar{I}_1 \ddot{\Psi}_x + \bar{I}_{11} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right) \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w: [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \bar{Q} + \chi \left( \frac{4\bar{R}}{h^2} \right) \right] + \right. \\
 \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\hat{Q} + \chi \frac{4}{h^2} \left( \frac{P}{3} + R \right) \right] + q(x) \right] \\
 = [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] \left( I_0 \ddot{w} + \bar{I}_{21} \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \right. \\
 \left. I_{22} \frac{\partial \ddot{\Psi}_x}{\partial x} + \bar{I}_{23} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} \right) \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \Psi_x: [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] \frac{\partial}{\partial x} \left[ M + \hat{Q} - \chi \frac{4}{h^2} \left( \frac{P}{3} + R \right) \right] - \\
 [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] \left( \bar{Q} - \chi \frac{4\bar{R}}{h^2} \right) = \\
 [1-(e_0 a)^2 \nabla^2] \left( \bar{I}_{31} \ddot{u} + \bar{I}_3 \ddot{\Psi}_x + \bar{I}_{32} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right) \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\delta V_0: \bar{N} \frac{\delta V_0}{h_p} = 0 \quad (26)$$

同时可以得到相应的边界条件为

$$\bar{N}(\delta u)_0^L = 0 \quad (27)$$

$$\left( M + \hat{Q} - \frac{4PX}{3h^2} - \frac{4RX}{h^2} \right) (\delta \Psi_x)_0^L = 0 \quad (28)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \hat{Q} - \frac{4PX}{3h^2} - \frac{4RX}{h^2} \right) + \left( \hat{Q} - \frac{4RX}{h^2} + \bar{N} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} (\delta w)_0^L = 0 \quad (29)$$

$$\left( \hat{Q} - \frac{4PX}{3h^2} - \frac{4RX}{h^2} \right) \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_0^L = 0 \quad (30)$$

式(23)一式(30)中:

$$\begin{aligned}
 M &= \bar{M} + \hat{N} - \frac{e_{311}}{a_{33} h_p} I_{p1} \bar{N} + \frac{e_{311}}{a_{33}} \hat{M} \\
 S &= \frac{\mu_{3131}}{a_{33}} \bar{M} - \frac{\mu_{3131}}{a_{33} h_p} I_{p1} \bar{N} + \hat{S} \\
 G &= \bar{G} + \frac{e_{311}}{a_{33}} \hat{G} - \frac{e_{311}}{a_{33} h_p} I_{p2} \bar{N} - \frac{2\mu_{3113}}{a_{33} h_p} I_{p1} \bar{N} + \frac{2\mu_{3113}}{a_{33}} \hat{M} + 2\hat{M} \\
 P &= \bar{P} + \frac{e_{311}}{a_{33}} \hat{P} - \frac{e_{311}}{a_{33} h_p} I_{p3} \bar{N} + \frac{3\mu_{3113}}{a_{33}} \hat{G} - \frac{3\mu_{3113}}{a_{33} h_p} I_{p2} \bar{N} + 3\hat{G} \\
 R &= \frac{\mu_{3131}}{a_{33}} \hat{G} - \frac{\mu_{3131}}{a_{33} h_p} I_{p2} \bar{N} + \hat{R}
 \end{aligned}$$

$$I_{pi} = \int_{\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz, i = 1, 2, \dots, 6$$

$$(\bar{N}, \bar{M}, \bar{G}, \bar{P}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_{xx} (1, z, z^2, z^3) dz$$

$$(\bar{N}, \bar{M}, \bar{G}, \bar{P}) = \int_{\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} D_z (1, z, z^2, z^3) dz$$

$$(\bar{Q}, \bar{S}, \bar{R}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_{xz} (1, z, z^2) dz$$

$$(\hat{N}, \hat{M}, \hat{G}) = \int_{\frac{h}{2}-h_p}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xxz} (1, z, z^2) dz$$

$$(\hat{Q}, \hat{S}, \hat{R}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xzx} (1, z, z^2) dz$$

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) \rho(z) dz, i = 1, 2, \dots, 6$$

$$\bar{I}_1 = I_1 - \chi \frac{4I_3}{3h^2}, \bar{I}_{11} = -\chi \frac{4I_3}{3h^2}$$

$$\bar{I}_{21} = \chi \frac{4I_3}{3h^2}, \bar{I}_{22} = \chi \left( \frac{10I_4}{3h^2} - \frac{16I_6}{9h^4} \right)$$

$$\bar{I}_{23} = -\chi \frac{16I_6}{9h^4}, \bar{I}_{31} = I_1 - \chi \frac{4I_3}{3h^2}$$

$$\bar{I}_3 = I_2 + \chi \left( -\frac{8I_4}{3h^2} + \frac{16I_6}{9h^4} \right), \bar{I}_{32} = \chi \left( -\frac{4I_4}{3h^2} + \frac{16I_6}{9h^4} \right)$$

当 $\chi=1$ 时,可以得到 Reddy 三阶剪切变形理论的控制方程;当 $\chi=0$ 时,可以得到一阶剪切变形理论的控制方程;当 $\Psi_x = -\partial w/\partial x$ 时,可以得到欧拉梁理论的控制方程。

### 3 求解过程

为了便于求解,采用了一个满足经典问题的试函数来进行求解。虽然试函数不能完全满足边界条件,但它仍有足够的精度。因此,位移可以写成以下三角级数形式,即:

$$u(x,t) = \sum_n u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (31)$$

$$w(x,t) = \sum_n w_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (32)$$

$$\Psi_x(x,t) = \sum_n \psi_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (33)$$

利用 Galerkin 方法,可以将控制方程转换成以下形式的微分方程,即:

$$\alpha_{11}u_n = \beta_{11}\ddot{u}_n \quad (34)$$

$$\alpha_{22}w_n + \alpha_{222}w_n^2 + \alpha_{223}w_n^3 + \alpha_{23}\psi_n + \alpha_{233}w_n\psi_n = \beta_{22}\ddot{w}_n + \beta_{23}\psi_n \quad (35)$$

$$\alpha_{32}w_n + \alpha_{33}\psi_n + \alpha_{323}w_n^2 = \beta_{32}\ddot{w}_n + \beta_{33}\psi_n \quad (36)$$

式(34)一式(36)中, $\alpha_s$ 和 $\beta_s$ 待定系数。忽略面内振动,则式(35)一式(36)可以写成:

$$\bar{\alpha}_{22}w_n + \bar{\alpha}_{222}w_n^2 + \bar{\alpha}_{223}w_n^3 + \bar{\alpha}_{23}\psi_n + \bar{\alpha}_{233}w_n\psi_n = \bar{w}_n \quad (37)$$

$$\bar{\alpha}_{32}w_n + \bar{\alpha}_{322}w_n^2 + \bar{\alpha}_{323}w_n^3 + \bar{\alpha}_{33}\psi_n + \bar{\alpha}_{333}w_n\psi_n = \bar{\psi}_n \quad (38)$$

式(37)一式(38)中, $\bar{\alpha}_s$ 和 $\bar{\beta}_s$ 待定系数。该方程可以采用 Runge-Kutta 方法进行求解。结合式(26),电压 $V_0$ 就可以写成位移的函数,即:

$$V_0 = \frac{A_{91}}{a_{33}} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{A_{92}}{a_{33}} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{2\beta}{3a_{33}h^2} \left( \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (39)$$

式(39)中, $A_{ij}(i=2,3,\dots,9,j=1,2,\dots,5)$ 为待定系数, $\beta=3A_{95}h^2/2-2\chi(A_{94}+3A_{97})$ 。同样利用 Galerkin 方法进行求解,电压 $V_0$ 则可以写成以下形式,即:

$$V_0 = \frac{n^2\pi^2 \left( \frac{3}{2}h^2A_{92} + \beta \right)}{6a_{33}h^2L} \psi_n(t) + \frac{n^3\pi^3\beta}{6a_{33}h^2L} w_n(t) - \frac{n^2\pi^2A_{91}}{6a_{33}L} [w_n(t)]^2, n=1,3,5,\dots \quad (40)$$

对于偶数阶振动模态,压电梁无法产生电压,因为在偶数振动模态时,梁的位移是反对称的,产生的电压相互抵消。产生的电压是以时间 $t$ 为函数的交流电压,为了便于评估压电性能,引入了 RMS 电压,其表达式如下<sup>[20]</sup>:

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T_V} \int_0^{T_V} [V_0(t)]^2 dt} \quad (41)$$

式(41)中, $T_V$ 是压电梁交流电压周期。

## 4 结果和讨论

### 4.1 模型验证

首先将本文模型退化经典梁模型和文献中的结果对比(表1)。本例中使用的材料弹性常数和几何参数为: $E_p = 9.56 \text{ GPa}$ ,  $E_b = E_t = 144.8 \text{ GPa}$ ,  $\rho_b = \rho_t = \rho_p = 1389.23 \text{ kg/m}^3$ ,  $L/h = 10$ , 剪切模量分别为: $G_p = 3.45 \text{ GPa}$ ,  $G_t = G_p = 4.14 \text{ GPa}$ 。结果表明本模型和文献结果基本一致。

表 1 梯度梁固有频率(kHz)与参考文献比较

Table 1 Comparison of gradient beam natural frequencies (kHz) with references

模态	本文结果	文献[21]	文献[22]
1	0.199 6	0.209 3	0.207 8
2	0.737 4	0.739 5	0.744 6
3	1.427 7	1.434 0	1.427 8

为了验证本模型在考虑非局部应变梯度效应时的有效性,在表2中,将简支纳米梁的无量纲固有频率( $\omega_n(L/h_t) \sqrt{12\rho/E}$ )和文献[21,22]进行了比较。假设梯度梁两层的材料参数相同,并且忽略了压电和挠曲电。本例中的几何参数为: $h = 1 \text{ nm}$ ,  $L/h = 10$ 。结果表明与文献[21,22]结果吻合较好。

表 2 简支纳米梁无量纲固有频率( $\omega_n(L/h_t) \sqrt{12\rho/E}$ )与文献比较

Table 2 Comparison of dimensionless natural frequencies ( $\omega_n(L/h_t) \sqrt{12\rho/E}$ ) of simply supported nanobeam with references

$e_0 a/\text{nm}$	$l/h$	Euler 梁		Timoshenko 梁	
		文献[23]	本文	文献[23]	本文
0	0	9.829 3	9.829 3	9.707 5	9.727 5
	0.5	9.949 8	9.949 9	9.826 5	9.846 8
	1.0	10.302 9	10.303 0	10.175 3	101 963
0.5	0	9.710 2	9.710 3	9.589 9	9.609 7
	0.5	9.829 3	9.829 3	9.707 5	9.727 5
	1.0	10.178 1	10.178 2	10.052 0	10.072 8
1.0	0	9.377 4	9.377 5	9.261 2	9.280 3
	0.5	9.492 4	9.492 5	9.374 8	9.394 1
	1.0	9.829 3	9.829 3	9.707 5	9.727 5

### 4.2 结果分析

为了便于对梯度梁分析,压电材料参数使用如下: $E_p = 132 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_p = 7500 \text{ kg/m}^3$ ,  $a_{33} = 7.124 \times 10^{-9} \text{ C/(V} \cdot \text{m)}$ ,  $e_{311} = -4.1 \text{ C/m}^2$ ,  $\mu_{3131} = \mu_{3113} = 5 \times 10^{-8} \text{ C/m}$ 。功能梯度材料参数如下: $E_t = 151 \text{ GPa}$ ,  $E_b = 70 \text{ GPa}$ ,  $\rho_t = 3000 \text{ kg/m}^3$ ,  $p = 1$ ,  $\rho_p = 2707 \text{ kg/m}^3$ 。无量纲频率为 $\Omega_n =$

$\omega_n L^2 / (h \pi^2) \sqrt{12 \rho / E_p}$ ,  $\Omega_{NL} / \Omega_L$  为非线性频率比。本研究的级数解在  $n=1$  处截断,这是结构最重要的振动模态。

图 2 给出了幂律指数对不同梁理论下的非线性频率比的影响,  $h=1 \mu\text{m}$ ,  $h_p=0.1 h$ ,  $L=10 h$ ,  $e_0 a=1 \mu\text{m}$ ,  $l=1 \mu\text{m}$ ,  $W_{\max} / h=1$ 。从图 2 中看出,当幂律指数小于 1 时,非线性频率比随幂律指数的增大而增大;而当幂律指数大于 1 时,非线性频率比随幂律指数的增大而减小。当幂律指数足够大时,非线性频率比几乎不再随幂律指数增大而变化。此外,还可以发现具有相同幂律指数的三个梁理论的非线性频率比排序为: Reddy > Timoshenko > Euler,这说明剪切变形的阶数越高,非线性频率比越高。

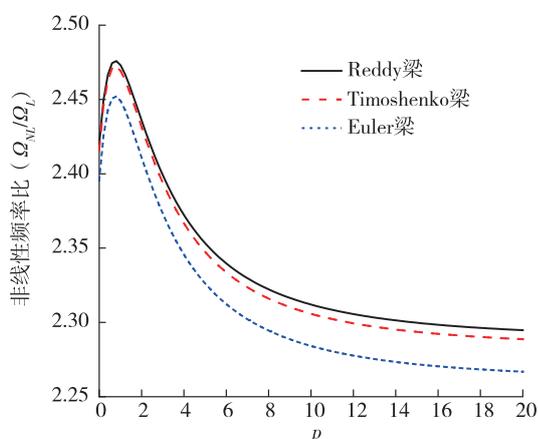


图 2 不同梁理论下幂律指数对非线性频率比的影响

Fig. 2 Effect of power-law index on nonlinear frequency ratios based on different beam theories

图 3 显示了不同梁理论下幂律指数对 RMS 电压的影响,  $h=1 \mu\text{m}$ ,  $h_p=0.1 h$ ,  $L=10 h$ ,  $e_0 a=1 \mu\text{m}$ ,  $l=1 \mu\text{m}$ ,  $W_{\max} / h=1$ 。从图 3 中可以看出,当幂律指数大于 2 时,输出电压值随幂律指数的增大而增大;而当幂律指数小于 2 时,输出电压值随幂律指数的增大而减小。此外,还发现在相同条件下,非线性振动输出电压明显高于线性振动输出电压,且剪切变形阶数越高,输出电压越低。

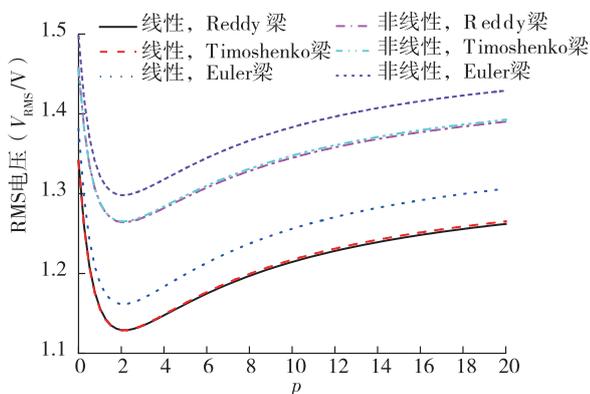


图 3 不同梁理论下幂律指数对 RMS 电压的影响

Fig. 3 Effect of power-law index on the RMS voltage based on different beam theories

图 4 为 Reddy 梁理论下非局部应变梯度理论对无量纲非线性固有频率的影响,  $h_p=0.1 h$ ,  $L=10 h$ ,  $W_{\max} / h=1$ 。从图 4 中可以看出,当  $e_0 a=0, l=0$  时,无量纲非线性频率的值随着梁厚度的增加而保持恒定。这是因为当忽略非局部应变梯度效应时,无量纲非线性固有频率与结构的尺度无关,这与纳米结构的尺度效应不同。此外,考虑非局部效应的无量纲非线性固有频率比不考虑非局部效应的无量纲非线性固有频率要低。这意味着非局部效应会削弱结构的刚度。另一方面,考虑应变梯度效应时的无量纲非线性固有频率比不考虑应变梯度效应的无量纲非线性固有频率要高。这表明考虑应变梯度理论可以强化结构的刚度。

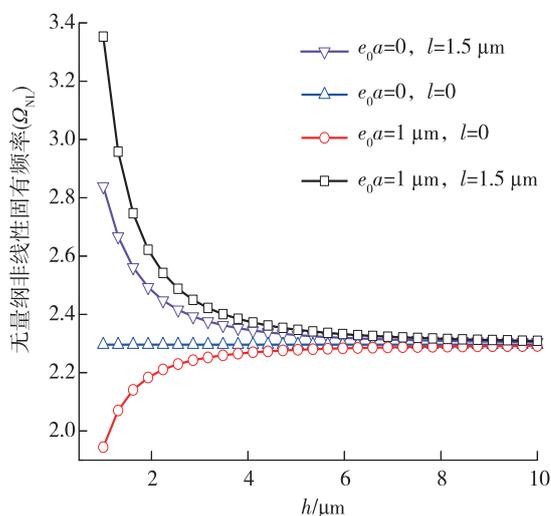


图 4 Reddy 梁理论下非局部应变梯度理论对无量纲非线性固有频率的影响

Fig. 4 Effect of nonlocal strain gradient theory on dimensionless nonlinear frequencies based on Reddy beam theory

图 5 显示了 Reddy 梁理论下长度尺度参数与非局部常数之比对无量纲非线性固有频率的影响,  $h=2 \mu\text{m}$ ,  $h_p=0.1 h$ ,  $L=10 h$ ,  $e_0 a=1 \mu\text{m}$ ,  $W_{\max} / h=1$ 。图 5 中的虚线是经典梁理论( $e_0 a=0, l=0$ )下的无量纲非线性固有频率。可以看出,当  $l/e_0 a < 1$  时,非局部应变梯度理论的无量纲非线性固有频率比经典梁无量纲非线性固有频率要小。当  $l/e_0 a > 1$  时,非局部应变梯度理论的无量纲非线性固有频率比经典梁无量纲非线性固有频率要大。结果还表明,应变梯度参数  $l$  和非局部常数  $e_0 a$  共同决定了结构刚度的硬化或软化。此外,还发现幂律指数  $p$  越大,无量纲非线性固有频率越小。

图 6 为 Reddy 梁理论下长厚比对无量纲非线性固有频率的影响,  $h=2 \mu\text{m}$ ,  $h_p=0.1 h$ ,  $L=10 h$ ,  $e_0 a=1 \mu\text{m}$ ,  $W_{\max} / h=1$ 。结果表明,当  $e_0 a=0, l=0$  和  $e_0 a=$

1  $\mu\text{m}$ ,  $l=0$  时,无量纲非线性固有频率随着长厚比增大而增大,而当  $e_0a=0$ ,  $l=1.5 \mu\text{m}$  时,无量纲非线性固有频率随长厚比增大而减小。这说明,当  $l>e_0a$  时,无量纲非线性固有频率随长厚比的增大而减小。相反,当  $l<e_0a$  时,无量纲非线性固有频率随长厚比增大而增大。这是因为当  $l>e_0a$  时,应变梯度效应占主导地位,而当  $l<e_0a$  时,非局部效应占主导地位。这与经典理论有着明显不同。图 5 中的结果也证实了这一点。

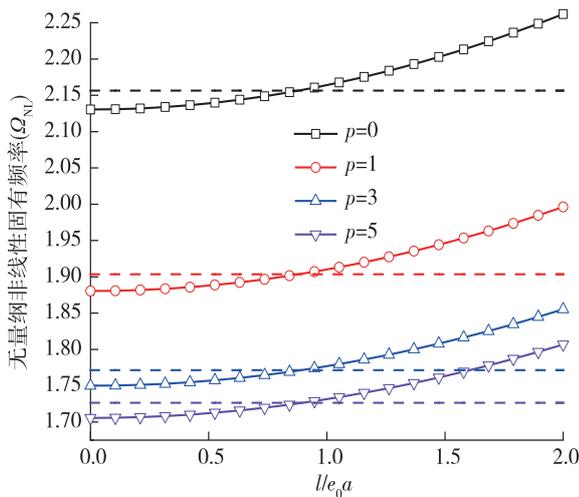


图 5 Reddy 梁理论下长度尺度参数与非局部常数之比对无量纲非线性固有频率的影响

Fig. 5 Effect of the ratio of length scale parameter to the nonlocal constant on the dimensionless nonlinear frequencies based on Reddy beam theory

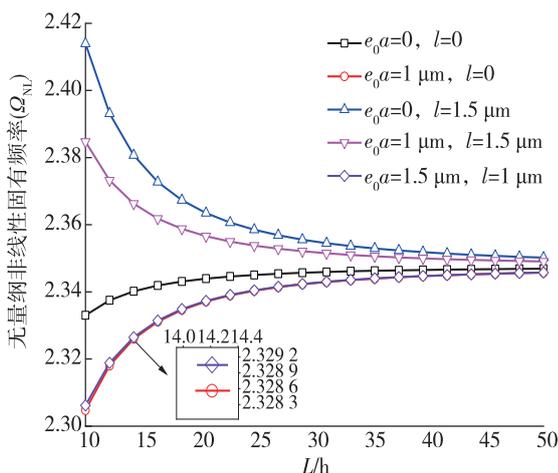


图 6 Reddy 梁理论下长厚比对无量纲非线性固有频率的影响

Fig. 6 Effect of the length-thickness ratio on the dimensionless nonlinear natural frequencies based on Reddy beam theory

图 7 描述了压电常数对 RMS 电压的影响,  $h_p = 0.1 h$ ,  $L = 10 h$ ,  $e_0a = 1 \mu\text{m}$ ,  $l = 1 \mu\text{m}$ ,  $W_{\text{max}}/h = 1$ ,  $\mu_{3113} =$

0。图 8 则描述了挠曲电常数对 RMS 电压的影响,  $h_p = 0.1 h$ ,  $L = 10 h$ ,  $e_0a = 1 \mu\text{m}$ ,  $l = 1 \mu\text{m}$ ,  $W_{\text{max}}/h = 1$ ,  $e_{311} = 0$ 。从图 7 中可以看出,压电常数或挠曲电常数的绝对值越大,输出电压也就越大。另外还可以发现,当压电常数或挠曲电常数为零时,输出电压也为零。这说明输出电压与压电和挠曲电效应有关。

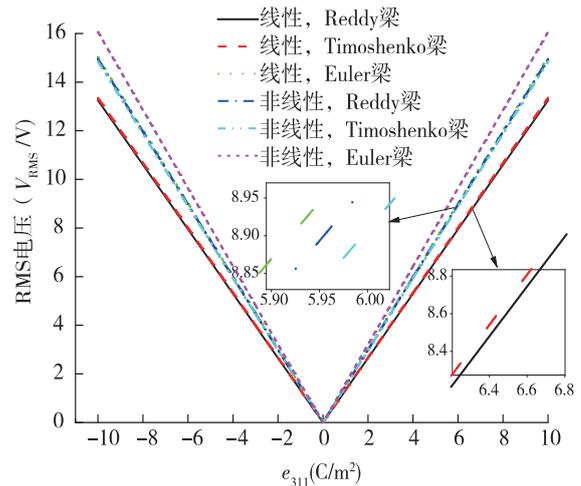


图 7 压电常数对 RMS 电压的影响

Fig. 7 Effect of the piezoelectric constant on the RMS voltage

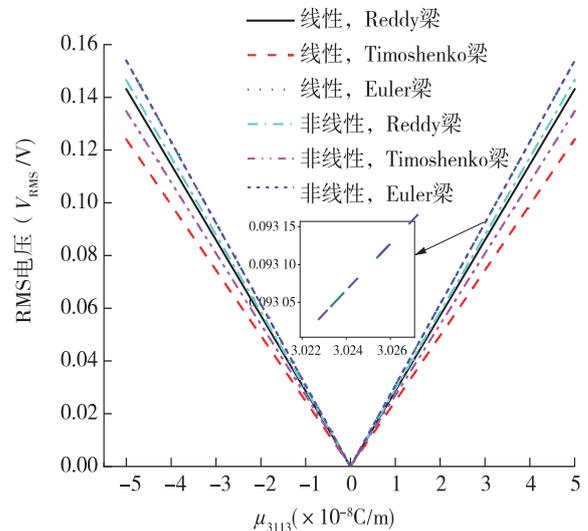


图 8 挠曲电常数对 RMS 电压的影响

Fig. 8 Effect of the flexoelectric constant on the RMS voltage

图 9 显示了 Reddy 理论下压电和挠曲电对输出电压的影响,  $h_p = 0.1 h$ ,  $L = 10 h$ ,  $e_0a = 0$ ,  $l = 0$ ,  $W_{\text{max}}/h = 1$ 。从图 9 中可以看出,当忽略压电和挠曲电时,输出电压为  $V_{\text{RMS}} = 0$ 。当仅考虑挠曲电效应时,输出电压不随梁的总厚度的增大而变化。当只考虑压电电效应时,输出电压随着梁的总厚度的增大而增大。这说明压电对输出电压的影响比挠曲电要更大。

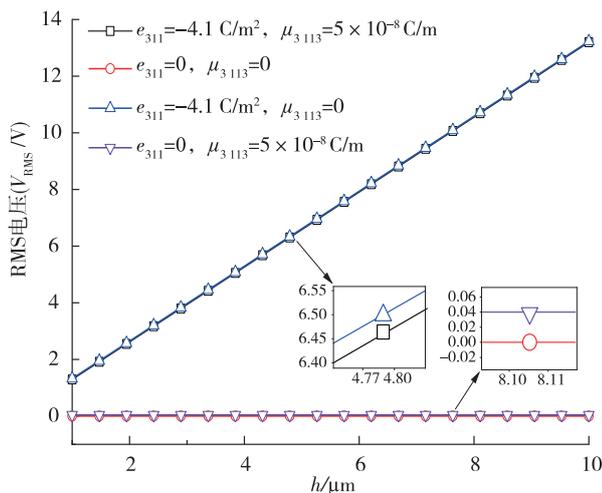


图 9 Reddy 理论下压电和挠曲电对输出电压的影响

Fig. 9 Effect of piezoelectricity and flexoelectricity on output voltage based on Reddy beam theory

表 3 中分别列出了在不同长厚比  $L/h$  下考虑/不考虑挠曲电时 Reddy 梁的 RMS 电压  $V_{RMS}(V)$ 。使用的材料参数和几何尺寸如下:  $E_p = 132 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_p = 7500 \text{ kg/m}^3$ ,  $e_{311} = -4.1 \text{ C/m}^2$ ,  $a_{33} = 7.124 \times 10^{-9} \text{ C/(V} \cdot \text{m)}$ ,  $E_t = 151 \text{ GPa}$ ,  $E_b = 70 \text{ GPa}$ ,  $\mu_{3131} = \mu_{3113} = 5 \times 10^{-8} \text{ C/m}$ ,  $\rho_t = 3000 \text{ kg/m}^3$ ,  $p = 1$ ,  $\rho_b = 2707 \text{ kg/m}^3$ ,  $h = 2 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $h_p = 0.1 \text{ h}$ ,  $e_0 a = 1 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $l = 1.5 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $W_{max}/h = 1$ 。从表 3 中可以看出,输出电压随着长厚比的增大而减小。这是因为结构在处于小尺度时,挠曲电效应更加明显。此外,非线性振动产生的输出电压明显高于线性振动产生的输出电压。这是因为非线性振动提高了结构机电转换效率。挠曲电对梁在线性振动和非线性振动的情况下所产生的输出电压也有不同的影响。总的来说,考虑挠曲电时梁的线性或非线性振动输出电压比不考虑挠曲电时的输出电压均高。

表 3 不同长厚比  $L/h$  下考虑/不考虑挠曲电时

Reddy 梁 RMS 电压  $V_{RMS}(V)$

Table 3 RMS voltage ( $V_{RMS}(V)$ ) based on Reddy beam theory with and without flexoelectricity for different ratios of  $L/h$

$L/h$	不考虑挠曲电		考虑挠曲电		考虑挠曲电时输出电压的变化率	
	$V_{线性}$	$V_{非线性}$	$V_{线性}$	$V_{非线性}$	$V_{线性}$	$V_{非线性}$
6	6.250 6	6.974 1	6.352 7	7.065 5	1.63%	1.31%
8	3.621 3	4.026 8	3.679 8	4.079 3	1.62%	1.30%
10	2.351 2	2.611 5	2.389 0	2.645 5	1.61%	1.30%
16	0.933 4	1.035 8	0.948 3	1.049 3	1.60%	1.30%
20	0.599 7	0.665 3	0.609 2	0.674 0	1.58%	1.31%
30	0.267 5	0.296 8	0.271 8	0.300 6	1.61%	1.28%

在表 4 中分别列出了在不同厚度比  $h/h_p$  下考虑/

不考虑挠曲电时 Reddy 梁的 RMS 电压  $V_{RMS}(V)$ 。使用的材料参数和几何尺寸如下:  $E_p = 132 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_p = 7500 \text{ kg/m}^3$ ,  $e_{311} = -4.1 \text{ C/m}^2$ ,  $a_{33} = 7.124 \times 10^{-9} \text{ C/(V} \cdot \text{m)}$ ,  $E_t = 151 \text{ GPa}$ ,  $E_b = 70 \text{ GPa}$ ,  $\mu_{3131} = \mu_{3113} = 5 \times 10^{-8} \text{ C/m}$ ,  $\rho_t = 3000 \text{ kg/m}^3$ ,  $p = 1$ ,  $\rho_b = 2707 \text{ kg/m}^3$ ,  $h = 2 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $L = 6 \text{ h}$ ,  $e_0 a = 1 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $l = 1.5 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $W_{max}/h = 1$ 。从表 4 中可以看出,随着厚度比  $h/h_p$  增大,输出电压逐渐减小。这是因为电压是由压电层产生的,当  $h/h_p$  增大,压电层厚度减小,梁所产生的电压自然降低。另一方面,考虑挠曲电时梁的线性或非线性振动输出电压比不考虑挠曲电时的输出电压均要高,这在表 3 中也得到了验证。

表 4 不同厚度比  $h/h_p$  下考虑/不考虑挠曲电时

Reddy 梁 RMS 电压  $V_{RMS}(V)$

Table 4 RMS voltage ( $V_{RMS}(V)$ ) based on Reddy beam theory with and without flexoelectricity for different ratios of  $h/h_p$

$h/h_p$	不考虑挠曲电		考虑挠曲电		考虑挠曲电时输出电压的变化率	
	$V_{线性}$	$V_{非线性}$	$V_{线性}$	$V_{非线性}$	$V_{线性}$	$V_{非线性}$
6	9.499 0	10.799 5	9.666 3	10.946 3	1.76%	1.36%
8	7.553 8	8.483 5	7.680 6	8.596 2	1.68%	1.33%
10	6.250 6	6.974 1	6.352 7	7.065 5	1.63%	1.31%
16	4.102 6	4.537 0	4.167 1	4.595 3	1.57%	1.28%
20	3.334 7	3.677 8	3.386 5	3.724 7	1.55%	1.28%
30	2.270 1	2.494 9	2.304 8	2.526 5	1.53%	1.27%

## 5 结论

本研究基于 NSGT 和 Reddy 三阶剪切变形理论,对具有挠曲电性的 FGP 纳米梁进行了非线性机电行为分析。通过分析,得到以下结论:当应变梯度尺度参数小于非局部参数时,梯度梁的刚度表现出软化效应。而当应变梯度尺度参数大于非局部参数时,梯度梁的刚度表现出强化效应。压电常数和挠曲电常数能提高梯度梁的输出电压,同时随着压电层厚度的减小,挠曲电对输出电压的影响变弱。输出电压随梯度梁几何尺寸的增大而减小。幂律指数小于 2 时梯度梁的输出电压减小,大于 2 时输出电压增大。而幂律指数小于 1 时梯度梁的非线性固有频率增大,大于 1 时非线性固有频率减小。

随着便携式压电传感器在微纳器件中广泛应用,本研究成果可以为提高压电俘器的俘能效率提供一定参考。同时,本研究仅考虑了功能梯度材料特性沿厚度方向梯度分布的情况。实际上,功能材料性能也可以同时沿多个方向连续分布,比如,长度和厚度方向,即多向功能梯度材料。多向功能梯度材料能够满足更复杂的工程环境需要,在未来探索多向功能梯度材料的力电耦合机制将成为热点之一。

## 参考文献(References):

- [1] NAIK A K, NAZEER M, PRASAD D K V D, et al. Development of functionally graded  $ZrB_2^{-BC}$  composites for lightweight ultrahigh-temperature aerospace applications [J]. *Ceramics International*, 2022, 48(22): 33332—33339.
- [2] WANG S, CHEN C, HU L, et al. Spherical piezoelectric transducers of functionally graded materials[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2022, 152(1): 193—200.
- [3] HAMED M A, SADOON A M, ELTAHER M A. Effects of porosity models on static behavior of size dependent functionally graded beam[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2019, 71(1): 89—98.
- [4] MERZOUKI T, AHMED H M S, BESSAIM A, et al. Bending analysis of functionally graded porous nanocomposite beams based on a non-local strain gradient theory [J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2022, 27(1): 66—92.
- [5] JIN H, GAO X, REN K, et al. Review on piezoelectric actuators based on high-performance piezoelectric materials[J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2022, 69(11): 3057—3069.
- [6] ZHANG Y, GUO J, HAN Y, et al. Microanalysis and piezoelectric properties study of piezoelectric film sensors based on heat treatment process [J]. *Sensors and Materials*, 2018, 30(9): 1997—2008.
- [7] LIU X X, LIANG X. Global sensitivity analysis of electromechanical coupling behaviors for flexoelectric nanostructures [J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2022, 18(1): 21—37.
- [8] WU C C M, KAHN M, MOY W. Piezoelectric ceramics with functional gradients: A new application in material design[J]. *Journal of the American Ceramic Society*, 1996, 79 (3): 809—812.
- [9] LAKSHMAN A. Propagation characteristic of Love-type wave in different types of functionally graded piezoelectric layered structure[J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2022, 32(3): 1424—1446.
- [10] TAGANTSEV A K. Piezoelectricity and flexoelectricity in crystalline dielectrics[J]. *Physical Review B, Condensed Matter*, 1986, 34(8): 5883—5889.
- [11] LIM C W, ZHANG G, REDDY J N. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, 78(11): 298—313.
- [12] BARATI M R, SHAHVERDI H. Forced vibration of porous functionally graded nanoplates under uniform dynamic load using general nonlocal stress-strain gradient theory[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2018, 24(20): 4700—4715.
- [13] ANH N D, HIEU D V. Nonlinear random vibration of functionally graded nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory[J]. *Acta Mechanica*, 2022, 233(4): 1633—1648.
- [14] LUO T, MAO Q, ZENG S, et al. Scale effect on the nonlinear vibration of piezoelectric sandwich nanobeams on Winkler foundation [J]. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2021, 9(6): 1289—1303.
- [15] TAO C, DAI T. Large amplitude free vibration of porous skew and elliptical nanoplates based on nonlocal elasticity by isogeometric analysis [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2022, 29(18): 2652—2667.
- [16] VUONG P M, DUC N D. Nonlinear vibration of FGM moderately thick toroidal shell segment within the framework of Reddy' s third order-shear deformation shell theory[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2020, 16(2): 245—264.
- [17] REDDY J N, KIM J. A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates[J]. *Composite Structures*, 2012, 94(3): 1128—1143.
- [18] HONG C C. Vibration frequency of thick functionally graded material cylindrical shells with fully homogeneous equation and third-order shear deformation theory under thermal environment[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2021, 27 (17–18): 2004—2017.
- [19] ZHU L F, KE L L, XIANG Y, et al. Free vibration and damage identification of cracked functionally graded plates[J]. *Composite Structures*, 2020, 250: 112517.
- [20] YUCE E, MINAEI S, TOKAT S. Root-mean-square measurement of distinct voltage signals[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2007, 56(6): 2782—2787.
- [21] SHIMPI R P, AINAPURE A V. Free vibration analysis of two layered cross-ply laminated beams using layer-wise trigonometric shear deformation theory[J]. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2002, 21(16): 1477—1492.
- [22] SHI G, LAM K Y. Finite element vibration analysis of composite beams based on higher-order beam theory[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 219(4): 707—721.
- [23] LU L, GUO X, ZHAO J. Size-dependent vibration analysis of nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2017, 116(4): 12—24.

责任编辑:陈 芳