第 41 卷第 2 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2024 年 4 月
Vol. 41 No. 2 J Chongqing Technol & Business Univ(Nat Sci Ed) Apr. 2024

可分 Frobenius 扩张下的 Gorenstein 余挠维数

罗玉祥[1],陈 刚[2],任 伟[1*]
1. 重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331
2. 重庆大学城第三中学校,重庆 401331

摘 要:针对环变化下的 Gorenstein 同调性质,提出模的 Gorenstein 余挠性质及相应维数在环的可分 Frobenius 扩张下的保持性质。首先证明对可分 Frobenius 扩张 $R \to S$,S-模 M 是 Gorenstein 余挠模当且仅当 M 是 Gorenstein 余挠的 R-模,从而可得模的 Gorenstein 余挠维数沿着该环扩张保持不变; 作为应用,证明了若该环扩张是可裂的,则环的整体 Gorenstein 余挠维数也保持不变;此外,讨论了群环上的 Gorenstein 余挠维数,进一步验证 Gorenstein 余挠维数在环的可分 Frobenius 扩张下的不变性。

关键词:Gorenstein 余挠;Frobenius 扩张;可分扩张;群环
中图分类号:O154. 2 **文献标识码**:A doi:10. 16055/j. issn. 1672-058X. 2024. 0002. 014

Gorenstein Cotorsion Dimension under Separable Frobenius Extensions

LUO Yuxiang[1], CHEN Gang[2], REN Wei[1*]
1. School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China
2. No. 3 Middle School of Chongqing University Town, Chongqing 401331, China

Abstract: For the Gorenstein homological properties under changes of rings, the Gorenstein cotorsion property of modules and the preserving property of the corresponding dimension under a separable Frobenius extension of the ring were proposed. It was first proved that for a separable Frobenius extension $R \to S$, the S-module M was a Gorenstein cotorsion module if and only if M was an R-module of a Gorenstein cotorsion module, and thus the Gorenstein cotorsion dimension of modules remain invariant along such ring extension. As an application, it was shown that if this ring extension was splittable, the overall Gorenstein cotorsion dimension of the ring remained invariant as well. In addition, the Gorenstein cotorsion dimensions over group rings were discussed, and the invariance of the Gorenstein cotorsion dimensions under the separable Frobenius extensions was further verified.

Keywords: Gorenstein cotorsion; Frobenius extension; separable extension; group ring

1 引 言

本文中,环指有单位元的结合环,如非特别说明,模均指左模。设 A 是环,M 是 A-模,用 $\mathrm{Mod}(A)$ 表示左 A-模范畴。如果存在平坦左 A-模的正合复形

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to F_{-2} \to \cdots$$

使得对任意内射右 A-模 I,用 $I \otimes_A -$ 作用该复形后仍得到正合复形且 $M \cong \mathrm{Ker}(F_0 \to F_{-1})$,则称 M 是 Gorenstein 平坦 A-模[1]。显然,平坦模都是 Gorenstein 平坦模。用 $\mathcal{GF}(A)$ 表示所有 Gorenstein 平坦 A-模构成的类。

为了刻画非有限阿贝尔群的结构性质,Harrison[2] 引入了余挠模的概念: 称 A-模 C 是余挠模,如果对任意平坦 A-模 F,有 $\mathrm{Ext}_A^1(F, C) = 0$。余挠模类包含所有

收稿日期:2023-02-10 **修回日期**:2023-03-14 **文章编号**:1672-058X(2024)02-0115-06
基金项目:重庆市自然科学基金(CSTC2018JCYJAX0541).
作者简介:罗玉祥(1996—),男,四川凉山人,硕士研究生,从事同调代数研究.
通讯作者:任伟(1983—),男,甘肃文县人,教授,博士,从事同调代数及非交换代数研究. Email:rwemail@163.com.
引用格式:罗玉祥,陈刚,任伟. 可分 Frobenius 扩张下的 Gorenstein 余挠维数[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2024,41(2):115—120.
LUO Yuxiang, CHEN Gang, REN Wei. Gorenstein cotorsion dimension under separable Frobenius extensions[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2024, 41(2): 115—120.

纯内射模和内射模。为了将该概念推广到 Gorenstein 同调代数,Enochs 和 López[3]引入 Gorenstein 余挠模的概念:如果对任意 Gorenstein 平坦 A-模 M,有 $\mathrm{Ext}_A^1(M,N)=0$,那么称 A-模 N 是 Gorenstein 余挠模。用 $\mathscr{GC}(A)$ 表示所有 Gorenstein 余挠 A-模构成的类。

文献[4]定义了模的余挠维数和环的整体余挠维数,并且证明了在环的几乎优越扩张下,环的整体余挠维数是保持的;文献[5]和[6]给出了模的 Gorenstein 余挠维数和环的整体 Gorentein 余挠维数的等价刻画及一些性质。这些结论都是建立在假设环是凝聚环的前提下获得的,而在下面的讨论中将去掉这一假设。

有限群的整群环扩张、交换代数上的 Azumaya 代数、Markov 扩张等都是 Frobenius 扩张(例 1)。环的 Frobenius 扩张概念是 Frobenius 代数的自然推广[7],在 2-维拓扑量子场论、Cherednik 代数的 Calabi-Yau 性质、平坦 dominant 维数等诸多研究领域起到了重要作用[8-9]。模的 Gorenstein 同调性质在 Frobenius 扩张下的不变性也在近期受到了广泛关注[10-14]。如文献[10]证明了模的无挠性和自反性在 Frobenius 扩张下是保持的;文献[11-13]证明了 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 平坦模在 Frobenius 扩张下是保持的。

由文献[15]引理 4.7 易知,几乎优越扩张是 Frobenius 扩张,但是一般情况下,Frobenius 扩张并不一定是几乎优越扩张。因此,本文主要研究 Gorenstein 余挠模和 Gorenstein 余挠维数在环的可分 Frobenius 扩张下的一些同调不变性。设 $R\to S$ 是一个可分 Frobenius 扩张,对任意 S-模 M,首先证明 M 是 Gorenstein 余挠 S-模当且仅当 M 作为 R-模是 Gorenstein 余挠的(定理 1);其次,证明任意模的 Gorenstein 余挠维数沿着该环扩张是不变的(定理 2);最后,作为应用,首先证明沿着可分且可裂的 Frobenius 扩张,环的整体 Gorenstein 余挠维数也具有不变性(命题 1),其次讨论群环上的 Gorenstein 余挠维数的性质,为群环上模的 Gorenstein 余挠维数提供了一个上界。在命题 2 中证明了对任意群 G,交换环 R 和 RG-模 M,有 $\mathrm{Gcd}_{RG}(M)\leqslant \mathrm{Gcd}_R(M)+\mathrm{pd}_{RG}R$。

2　Gorenstein 余挠模和 Gorenstein 余挠维数

首先回顾可分 Frobenius 扩张的概念。

定义 1[12,16]　称环扩张 $R\to S$ 是 Frobenius 扩张,如果 S 作为右 R-模是有限生成投射的并且 ${}_RS_S\cong({}_SS_R)^*=\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}({}_SS_R,R)$,该条件也等价于 $S\otimes_R-$ 和 $\mathrm{Hom}_R(S,-)$,是自然等价函子;称 $R\to S$ 是可分扩张,如果乘法映射 $\varphi:S\otimes_R R\to S(s\otimes r\to sr)$ 是可裂的 S-双模满同态;称 $R\to S$ 是可分 Frobenius 扩张,如果它既是 Frobenius 扩张又是可分扩张。

例 1　(1) 对任意有限群 G,整群环扩张 $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}G$ 是可分 Frobenius 扩张[12]。

(2) 设 R 是一个交换代数,S 是 R 上的 Azumaya 代数,则 $R\to S$ 是可分 Frobenius 扩张[14]。

(3) 设 R 是一个环,$n>0$,用 $\boldsymbol{M}_n(R)$ 和 $\boldsymbol{S}_n(R)$ 分别表示 n-阶全矩阵环和中心对称矩阵环,则 $\boldsymbol{S}_n(R)\to\boldsymbol{M}_n(R)$ 是可分 Frobenius 扩张[17]。

(4) 每一个 Markov 扩张都是可分 Frobenius 扩张[16]。

注 1　在文献[18]中,假设环是凝聚的,以保证 Gorenstein 平坦模类关于扩张封闭这一基本性质是成立的。该性质对 Gorenstein 平坦模的研究至关重要,但不易证明。由文献[19]推论 4.12,现在可知该性质对任意环都是成立的,故文献[18]定理 3.14 和文献[13]定理 2.5 等部分结论中凝聚环这一条件都可以去掉。

引理 1[13]　设 $R\to S$ 是环的 Frobenius 扩张,M 是 S-模,则 M 是 Gorenstein 平坦 S-模当且仅当 M 作为 R-模是 Gorenstein 平坦的。

下面给出一些关于 Gorenstein 余挠模的事实。

引理 2[5]　设 R-是任意环,则 Gorenstein 余挠 R-模类 $\mathscr{GC}(R)$ 有下列结论:

(1) $\mathscr{GC}(R)$ 关于扩张封闭,即对任意 R-模的短正合序列 $0\to M''\to M'\to M\to 0$,如果 $M'',M\in\mathscr{GC}(R)$,那么 $M'\in\mathscr{GC}(R)$。

(2) $\mathscr{GC}(R)$ 关于直和项封闭,即对任意 R-模 M 的直和项 N,如果 M 是 Gorenstein 余挠模,那么 N 也是 Gorenstein 余挠模。

利用上述引理及相关事实,可以得到 Gorenstein 余挠模在可分 Frobenius 扩张下是保持的。

定理 1　设 $R\to S$ 是环的可分 Frobenius 扩张,M 是 S-模,下列条件等价:

(1) M 是 Gorenstein 余挠 S-模。

(2) M 作为 R-模是 Gorenstein 余挠的。

(3) $S\otimes_R M\cong\mathrm{Hom}_R(S,M)$ 是 Gorenstein 余挠 S-模。

证明　(1)⇒(2):设 M 是 Gorenstein 余挠 S-模,F 是任意 Gorenstein 平坦 R-模。由文献[13]引理 2.4(1)可知,$S\otimes_R F$ 是 Gorenstein 平坦 S-模,对任意 $i>0$,

由于 S 作为 R-模是平坦的,因此根据文献[20]定理 11.65,有同构:

$$\mathrm{Ext}_R^i(F,M)\cong\mathrm{Ext}_S^i(S\otimes_R F,M)$$

由于 M 是 Gorenstein 余挠 S-模且 $S\otimes_R F$ 是 Gorenstein 平坦 S-模,因此

$$\mathrm{Ext}_S^i(S\otimes_R F,M)=0$$

进而$\mathrm{Ext}_R^i(F,M)=0$;故 M 作为 R-模是 Gorenstein 余挠的。

(2)⇒(3):设 M 是 Gorenstein 余挠 R-模,Q 是任意 Gorenstein 平坦 S-模,由于 $R\to S$ 是 Frobenius 扩张,因此有同构:

$$S\otimes_R M\cong\mathrm{Hom}_R(S,M)$$

进而有

$$\mathrm{Ext}_S^i(Q,S\otimes_R M)\cong\mathrm{Ext}_S^i(Q,\mathrm{Hom}_R(S,M))$$

又 S 作为 R-模是投射的,因此根据文献[20]定理 11.66,有下列同构:

$$\mathrm{Ext}_S^i(Q,\mathrm{Hom}_R(S,M))\cong\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)$$

由引理 1 知 Q 作为 R-模是 Gorenstein 平坦的,故

$$\mathrm{Ext}_R^1(Q,M)=0$$

进而

$$\mathrm{Ext}_S^i(Q,S\otimes_R M)\cong\mathrm{Ext}_S^i(Q,\mathrm{Hom}_R(S,M))=0$$

即 $S\otimes_R M\cong\mathrm{Hom}_R(S,M)$是 Gorenstein 余挠 S-模。

(3)⇒(1):设 Q 是任意 Gorenstein 平坦 S-模,由引理 1 可知 Q 作为 R-模也是 Gorenstein 平坦的,又 S 作为 R-模是平坦的,因此根据文献[20]定理 11.65,有

$$\mathrm{Ext}_S^i(S\otimes_R Q,M)\cong\mathrm{Ext}_R^i(Q,M)$$

注意到 M 是 $S\otimes_R M$ 的直和项,因此由引理 2 可知 M 是 Gorenstein 余挠 R-模,故

$$\mathrm{Ext}_R^1(Q,M)=0$$

从而

$$\mathrm{Ext}_S^1(S\otimes_R Q,M)=0$$

由于 $R\to S$ 是可分扩张,由文献[12]引理 2.9 知,Q 作为 S-模是 $S\otimes_R Q$ 的直和项,故$\mathrm{Ext}_S^1(Q,M)=0$,即 M 是 Gorenstein 余挠 S-模。证毕。

下面回顾 Gorenstein 余挠维数的概念。

定义 2[5-6]　设 M 是任意 R-模,定义 M 的 Gorenstein 余挠维数为

$$\mathrm{Gcd}_R(M)=:\inf\{n\mid\exists\,0\to M\to C_0\to\cdots\to C_n\to 0;\ \forall\,C_i\in\mathscr{GC}(R)\}$$

若 M 没有有限长度的 Gorenstein 余挠分解,则设

$$\mathrm{Gcd}_R(M)=\infty$$

下列引理利用扩张函子 Ext 的消失性给出了 Gorenstein 余挠模一个等价刻画。

引理 3[5]　设 R 是任意环,M 为 R-模和 $n\geqslant 0$ 是一个整数,则下列结论等价:

(1) $\mathrm{Gcd}_R(M)\leqslant n$。

(2) $\mathrm{Ext}_R^i(F,M)=0$,对所有 Gorenstein 平坦右 R-模 F 和所有的 $i>n$。

(3) 对任意正合序列

$$0\to M\to C_0\to\cdots\to C_{n-1}\to C_n\to 0$$

如果 $C_0,\cdots,C_{n-1}$ 是 Gorenstein 余挠 R-模,则 C_n 也是 Gorenstein 余挠的。

注 2　众所周知,任意平坦模是 Gorenstein 平坦的,因此每个 Gorenstein 余挠模是余挠模;此外,每个内射模是 Gorenstein 余挠模。因此对任意 R-模 M,有以下维数关系:

$$\mathrm{cd}_R(M)\leqslant\mathrm{Gcd}_R(M)\leqslant\mathrm{id}_R(M)$$

其中,$\mathrm{cd}_R(M)$表示 M 的余挠维数;$\mathrm{id}_R(M)$表示 M 的内射维数;特别地,若 R 是冯·诺伊曼正则环,则有 $\mathrm{cd}_R(M)=\mathrm{Gcd}_R(M)=\mathrm{id}_R(M)$[6]。

下列结论表明模的 Gorenstein 余挠维数在环的可分 Frobenius 扩张下是保持的。

定理 2　设 $R\to S$ 是环的可分 Frobenius 扩张,对任意 S-模 M,有

$$\mathrm{Gcd}_R(M)=\mathrm{Gcd}_S(M)$$

证明　根据定理 1,任意 Gorenstein 余挠 S-模作为子环 R 上的模也是 Gorenstein 余挠的,因此

$$\mathrm{Gcd}_R(M)\leqslant\mathrm{Gcd}_S(M)$$

下面证明$\mathrm{Gcd}_S(M)\leqslant\mathrm{Gcd}_R(M)$。如果$\mathrm{Gcd}_R(M)=\infty$,结论显然成立;现假设$\mathrm{Gcd}_R(M)=n$ 是有限的,F 是任意 Gorenstein 平坦 S-模,由文献[13]引理 2.2 和 2.4 可知,$S\otimes_R F$ 是 Gorenstein 平坦 S-模,对任意 $i>n$,根据引理 3,有

$$\mathrm{Ext}_S^i(S\otimes_R F,M)=0$$

又 S 作为 R-模是平坦的,因此根据文献[20]定理 11.65,有同构:

$$\mathrm{Ext}_R^i(F,M)\cong\mathrm{Ext}_S^i(S\otimes_R F,M)$$

进而有$\mathrm{Ext}_R^i(F,M)=0$,故再由引理 3 可知$\mathrm{Gcd}_S(M)\leqslant n$。证毕。

推论 1　设 $R\to S$ 是环的可分 Frobenius 扩张,M 是 S-模,则

$$\mathrm{Gcd}_S(M)=\mathrm{Gcd}_S(S\otimes_R M)=\mathrm{Gcd}_R(S\otimes_R M)$$

证明　由定理 2 可得

$$\mathrm{Gcd}_R(S\otimes_R M)=\mathrm{Gcd}_S(S\otimes_R M)$$

由于 $R\to S$ 是环的可分 Frobenius 扩张,因此 M 作为 R-模是 $S\otimes_R M$ 的直和项,故根据引理 2 有

$$\mathrm{Gcd}_R(M)\leqslant \mathrm{Gcd}_R(S\otimes_R M)$$

再由定理 1 立即有 $\mathrm{Gcd}_S(S\otimes_R M)\leqslant \mathrm{Gcd}_R(M)$,即 $\mathrm{Gcd}_R(M)=\mathrm{Gcd}_R(S\otimes_R M)$。证毕。

3 应 用

本节主要研究 Gorenstein 余挠维数的应用。首先证明环的整体 Gorenstein 余挠维数在可分且可裂的 Frobenius 扩张下保持其不变性;其次在群环上给出 Gorenstein 余挠模的一些应用。

首先回顾环的整体 Gorenstein 余挠维数的定义。

定义 3[6] 设 R 是任意环,环 R 的(左)整体 Gorenstein 余挠维数为

$$\text{G-cot. D}(R)=:\sup\{\mathrm{Gcd}_R(M)\mid M\in \mathrm{Mod}(R)\}$$

在文献[5]中,作者给出来环 R 的(左)整体 Gorenstein 余挠维数的一个等价刻画,即

$$\text{G-cot. D}(R)=\sup\{\mathrm{Gcd}_R(Q)\mid Q\in \mathcal{GF}(R)\}=\sup\{\mathrm{pd}_R(F)\mid F\text{ 是平坦 }R\text{-模}\}$$

并且给出如下维数关系

$$\text{cot. D}(R)\leqslant \text{G-cot. D}(R)\leqslant \mathrm{gldim}(R)$$

其中,cot. D(R) 表示环 R 的(左)整体余挠维数;gldim(R) 表示环 R 的(左)整体维数,即所有 R-模的投射维数的上确界。

下面将证明环的整体 Gorenstein 余挠维数沿着可分且可裂的 Frobenius 扩张也具有不变性。

简单回顾一下可裂扩张的概念:称环扩张 $R\to S$ 是可裂的,如果 R 作为 R-模是 S 的直和项。

命题 1 设 $R\to S$ 是环的可分且可裂的 Frobenius 扩张,则

$$\text{G-cot. D}(S)=\text{G-cot. D}(R)$$

证明 对任意 S-模 M,由定理 2 有

$$\mathrm{Gcd}_R(M)=\mathrm{Gcd}_S(M)$$

故 G-cot. D$(S)\leqslant$ G-cot. D(R);设 N 是任意 R-模,由于环扩张 $R\to S$ 是可裂的,因此 N 是 $S\otimes_R N$ 的直和项,从而 $\mathrm{Gcd}_R(N)\leqslant \mathrm{Gcd}_R(S\otimes_R N)$;故又由定理 2 可知

$$\mathrm{Gcd}_R(S\otimes_R N)=\mathrm{Gcd}_S(S\otimes_R N)$$

因此 G-cot. D$(R)\leqslant$ G-cot. D(S)。证毕。

接下来将讨论 Gorenstein 余挠维数在群环上的应用。首先回顾一下,群环上模的相关概念及事实。

设 R 是一个交换环,G 是一个群,设 RG 是 G 的元素生成的自由 R-模,因此 RG 的元素可以唯一地表示为 $\sum\limits_{g\in G}r(g)g$,其中 $r(g)\in R$ 和对几乎所有的 g 有 $r(g)=0$。这使得 RG 构成一个环,称为 G 的群环。

群环 RG 上的一个模 M 是一个 R-模 M 加上群 G 对 M 的作用。对任意 RG-模 M,M 的不变量模[21]定义为 G 平凡作用在 M 上的最大子模记作 $M^G:=\{m\in M\mid gm=m,\ \forall g\in G\}$。类似地,$M$ 的余不变量模[21]定义为 G 平凡作用在 M 上的最大商模,由 $\{gm-m\mid \forall g\in G, m\in M\}$ 形式的元素生成的加法子群,记作 $M_G:=M/\langle gm-m\rangle$。

由于 R 是交换环,对任意 RG-模 M,群 G 有自反同构 $g\to g^{-1}$。故可将任何左 RG-模视为右 RG-模,其中 $g\in G$ 和 $m\in M$,有 $mg=g^{-1}m$。这样,对于任意两个左 RG-模 M 和 N,张量积 $M\otimes_{RG}N$ 通过关系

$$g^{-1}m\otimes n=mg\otimes n=m\otimes gn$$

引入而变得有意义。用 gm 替换 m,从而有

$$g^{-1}(gm)\otimes n=(gm)g\otimes n=(gm)\otimes gn$$

因此

$$M\otimes_{RG}N=(M\otimes_R N)_G$$

其中,G"对角"作用在 $M\otimes_R N$ 上,即

$$m\otimes n=gm\otimes gn,\text{其中 } m\in M, n\in N, g\in G$$

此外,G 对 M 和 N 的作用通过函数性诱导 G 对 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 的"对角"作用,由

$$(gu)(m)=g\cdot u(g^{-1}m)$$

给出,其中 $g\in G, u\in \mathrm{Hom}_R(M,N), m\in M$。由此可得

$$\mathrm{Hom}_{RG}(M,N)=\mathrm{Hom}_R(M,N)^G$$

设 H 是群 G 的子群,有从 RH-模范畴 Mod(RH) 到 RG-模范畴 Mod(RG) 的诱导函子

$$\mathrm{Ind}_H^G-=RG\otimes_{RH}-$$

和余诱导函子

$$\mathrm{Coind}_H^G-=\mathrm{Hom}_{RH}(RG,-)$$

用 $\_\downarrow_H^G$ 表示从 RG-模到 RH-模的限制函子。

引理 4 设 R 是一个交换环,H 是群 G 的一个子群,如果 RH-模 M 是 Gorenstein 平坦的,则 $\mathrm{Ind}_H^G M$ 是 Gorenstein 平坦 RG-模。

证明 由于 M 是 Gorenstein 平坦 RH-模,因此存在关于 RH-模的完全平坦分解

$$F=\cdots\to F_1\to F_0\to F_{-1}\to\cdots$$

使得 $M\cong \mathrm{Ker}(F_0\to F_{-1})$。对任意内射 RG-模 I,限制为 RH-模仍为内射的,并且根据同构

$$I\otimes_{RG}\mathrm{Ind}_H^G F=I\otimes_{RG}RG\otimes_{RH}F\cong I\otimes_{RH}F$$

可知$\mathrm{Ind}_H^G F$ 是一个关于 RG-模的完全平坦复形,并且有 $\mathrm{Ind}_H^G M \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Ind}_H^G F_0 \to \mathrm{Ind}_H^G F_{-1})$。因此 $\mathrm{Ind}_H^G M$ 是 Gorenstein 平坦 RG-模。证毕。

引理 5　设 R 是一个交换环,H 是群 G 的一个子群,对任意 Gorenstein 余挠 RG-模 M,有 $M\downarrow_H^G$ 是 Gorenstein 余挠 RH-模。

证明　由引理 4 可知,对任意 Gorenstein 平坦的 RH-模 F,$\mathrm{Ind}_H^G F$ 是 Gorenstein 平坦 RG-模;对任意 $i>0$,由于 RG 作为 RH-模是平坦的,因此根据文献[20]定理 11.65,有同构

$$\mathrm{Ext}_{RH}^i(F, M\downarrow_H^G) \cong \mathrm{Ext}_{RG}^i(\mathrm{Ind}_H^G F, M)$$

又由于 M 是 Gorenstein 余挠 RG-模,因此

$$\mathrm{Ext}_{RG}^i(\mathrm{Ind}_H^G F, M) = 0$$

进而

$$\mathrm{Ext}_{RH}^i(F, M\downarrow_H^G) = 0$$

故 $M\downarrow_H^G$ 是 Gorenstein 余挠 RH-模。证毕。

引理 6　设 M 和 N 是任意 RG-模,对任意 $i>0$,如果$\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$,则

$$\mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(M,N)) \cong \mathrm{Ext}_{RG}^i(M,N)$$

证明　对任意 RG-模 M,存在关于 RG-模的短正合序列

$$0 \to K \to P \to M \to 0$$

其中,P 是投射的 RG-模。因为 P 是投射的 RG-模,所以存在一个 RG-模 Q,使得 $P \oplus Q \cong \coprod RG$。从而,对任意 $i>0$,有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(P,N)) \oplus \mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(Q,N) \cong \\ &\quad \mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \prod \mathrm{Hom}_R(RG,N) \cong \\ &\quad \prod \mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(RG,N))\end{aligned}$$

又由于 RG 作为 R-模是投射的,因此根据文献[20]定理 11.66,有同构

$$\mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(RG,N)) \cong \mathrm{Ext}_R^i(R,N)$$

进而

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(P,N)) \oplus \mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(Q,N) \cong \\ &\quad \prod \mathrm{Ext}_R^i(R,N) = 0\end{aligned}$$

故$\mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(P,N)) = 0$。

对任意 $i>0$,由于$\mathrm{Ext}_R^i(M,N)=0$,因此短正合序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(P,N) \to \mathrm{Hom}_R(K,N) \to 0$$

是正合的。又由维数转移可知

$$\mathrm{Ext}_R^i(K,N) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,N) = 0$$

考虑下列交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{RG}(R, \mathrm{Hom}_R(P,N)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{RG}(R, \mathrm{Hom}_R(K,N)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_{RG}^1(R, \mathrm{Hom}_R(M,N)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathrm{Hom}_{RG}(P,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{RG}(K,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{RG}(M,N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

注意对任意的 RG-模 M 和 N,有同构

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{RG}(R, \mathrm{Hom}_R(M,N)) = \\ &\quad (\mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_R(M,N)))^G \cong \\ &\quad (\mathrm{Hom}_R(M,N))^G = \\ &\quad \mathrm{Hom}_{RG}(M,N)\end{aligned}$$

因此由引理 5 立即有

$$\mathrm{Ext}_{RG}^1(R, \mathrm{Hom}_R(M,N)) \cong \mathrm{Ext}_{RG}^1(M,N)$$

同理可得

$$\mathrm{Ext}_{RG}^1(R, \mathrm{Hom}_R(K,N)) \cong \mathrm{Ext}_{RG}^1(K,N)$$

从而根据下列交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(K,N)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_{RG}^{i+1}(R, \mathrm{Hom}_R(M,N)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{RG}^i(K,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{RG}^{i+1}(M,N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

立即有$\mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(M,N)) \cong \mathrm{Ext}_{RG}^i(M,N)$。证毕。

命题 2　设 R 是交换环,G 是群,对任意的 RG-模 M,有

$$\mathrm{Gcd}_{RG}(M) \leqslant \mathrm{Gcd}_R(M) + \mathrm{pd}_{RG} R$$

证明　如果$\mathrm{Gcd}_R(M)$和$\mathrm{pd}_{RG}R$ 至少有一个是无穷大,那么结论显然。现假设$\mathrm{Gcd}_R(M)=m$ 和$\mathrm{pd}_{RG}R=n$ 都是有限的,对任意的 RG-模 M,存在正合序列

$$0 \to M \to C_0 \to C_1 \to \cdots \to C_{m-1} \to C_m \to 0$$

其中,$C_0,\cdots,C_{m-1}$ 是 Gorenstein 余挠 RG-模。由引理 5 可知,上述序列可视为 R-模的正合序列并且 $C_0,\cdots,C_{m-1}$ 仍为 Gorenstein 余挠 R-模。又$\mathrm{Gcd}_R(M)=m$,根据引理 3 可知 C_m 也是 Gorenstein 余挠 R-模。

对任意 Gorenstein 平坦的 RG-模 F,将 F 限制为 R-模仍为 Gorenstein 平坦的,从而有

$$\mathrm{Ext}_R^i(F, C_m) = 0$$

其中,$i>0$,则由引理 6,有同构

$$\mathrm{Ext}_{RG}^i(F, C_m) \cong \mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(F, C_m))$$

对任意 $i>n$,因为$\mathrm{pd}_{RG}R=n$,所以

$$\mathrm{Ext}_{RG}^i(R, \mathrm{Hom}_R(F, C_m)) = 0$$

进而$\mathrm{Ext}_{RG}^i(F, C_m)=0$,即$\mathrm{Gcd}_{RG} C_m \leqslant n$。因此$\mathrm{Gcd}_{RG} M \leqslant$

$m+n$。证毕。

推论2 设 G 是群,R 是交换环,则

$$\text{G-cot. D}(RG) \leqslant \text{G-cot. D}(R) + \text{pd}_{RG}R$$

设 R 是交换环,G 是群,H 是群 G 的一个子群,易知群环的扩张 $RH \to RG$ 是可裂的。由文献[21],若$[G:H]<\infty$,则 $RH \to RG$ 是 Frobeinus 扩张;由文献[22]可知,如果$[G:H]$在 R 中可逆,那么 $RH \to RG$ 是可分扩张。因此,由定理2和命题1即有下述结论。

命题3 设 R 是交换环,G 是群,H 是群 G 的子群,对任意 RG-模 M,如果$[G:H]$在 R 中可逆,那么$\text{Gcd}_{RH}(M)=\text{Gcd}_{RG}(M)$。特别地,$\text{G-cot. D}(RH)=\text{G-cot. D}(RG)$。

4 结束语

在文献[3]中,作者证明了在环的几乎优越扩张下,模的余挠维数和环的整体余挠维数是保持的。而几乎优越扩张是 Frobenius 扩张,但 Frobenius 扩张不一定是几乎优越扩张,几乎优越扩张的条件更强。本文证明了 Gorenstein 余挠模和 Gorenstein 余挠维数在可分 Frobenius 扩张下保持不变。作为应用,首先证明了在可分且可裂的 Frobenius 扩张下,环的整体 Gorenstein 余挠维数也具有不变性;其次讨论了 Gorenstein 余挠维数在群环上的应用,为群环的 Gorenstein 余挠维数提供了一个上界。

参考文献(References):

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein flat modules[J]. Nanjing University Math, Biquarterly, 1993, 10(1): 1—9.

[2] HARRISON D K. Infinite abelian groups and homological methods[J]. The Annals of Mathematics, 1959, 69(2): 366—391.

[3] ENOCHS E E, LÓPEZ RAMOS J A. Gorenstein flat modules[M]. New York: Nova Science Publishers, 2001.

[4] MAO L, DING N. The cotorsion dimension of modules and rings[C]//Abelian Groups, Rings, Modules, and Homological Algebra, Chapman and hau/cRc, 2006.

[5] LEI R, MENG F. Notes on gorenstein cotorsion modules[J]. Math Notes, 2014, 96(5-6): 716—731.

[6] GAO Z. On gorenstein cotorsion dimension over GF-closed rings[J]. Bull Korean Math Soc, 2014, 51(1): 173—187.

[7] KASCH F. Grundlagen einer theorie der frobeniuser weiterungen[J]. Math Ann, 1954, 127(1): 453—474.

[8] BROWN K A, GORDON I G, STROPPEL C H. Cherednik, Hecke and quantum algebras as free Frobenius and Calabi-Yau extensions[J]. Algebra, 2008, 319(3): 1007—1034.

[9] XI C. Frobenius bimodules and flat-dominant dimensions[J]. Science China Mathematics, 2021, 64(1): 33—44.

[10] 周芮,赵志兵. Frobenius 扩张下模的无挠性和自反性[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(10): 52—58.
ZHOU Rui, ZHAO Zhi-Bing. Torsionfreeness and reflexivity under Frobenius extensions[J]. Journal of Shandong University (Natural Science Edition), 2022, 57(10): 52—58.

[11] HU J. Frobenius functors and gorenstein flat dimensions[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(3): 1257—1265.

[12] REN W. Gorenstein projective modules and Frobenius extensions[J]. Sci China Math, 2018, 61(7): 1175—1186.

[13] 任伟. Gorenstein 平坦模与 Frobenius 扩张[J]. 数学学报, 2019, 62(4): 647—652.
REN Wei. Gorenstein flat modules and frobenius extensions[J]. Acta Mathematica Sinica, 2019, 62(4): 647—652.

[14] ZHAO Z. Gorenstein homological invariant properties under Frobenius extensions[J]. Science China Mathematics, 2019, 62(12): 2487—2496.

[15] HUANG Z, SUN J. Invariant properties of representations under excellent extensions[J]. Journal of Algebra, 2012, 358(1): 87—101.

[16] KADISON L. New examples of Frobenius extensions[M]. Providence, RI: American Mathematical Soc, 1999.

[17] XI C, YIN S. Cellularity of centrosymmetric matrix algebras and Frobenius extensions[J]. Linear Algebra and its Applications, 2020, 590: 317—329.

[18] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure Appl Algebra, 2004, 189(1): 167—193.

[19] ŠAROCH J, ŠTOVÍČEK J. Singular compactness and definability for Σ-cotorsion and Gorenstein modules[J]. Selecta Mathematica, 2020, 26(2): 1—40.

[20] ROTMAN J J. An introduction to homological algebra[M]. New York: Academic Press, 1979.

[21] BROWN K S. Cohomology of groups[C]//Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1976.

[22] XIANG Y. Homological dimensions of skew group rings[J]. Algebra Colloquium, 2020, 27(2): 319—330.

责任编辑:李翠薇