

基于曲率跟踪方法的轴上拖挂轮式移动机器人的运动控制设计

苗盛阳,周宇生

贵州大学 数学与统计学院,贵阳 550025

摘要:目的 针对轴上拖挂轮式移动机器人中的挂车对目标轨迹精确跟踪控制问题,提出了一种能够跟踪挂车理想运动轨迹曲线相对曲率的双环控制方法。方法 首先通过梳理轴上拖挂轮式移动机器人受到的非完整约束建立运动学模型,并通过欧拉-拉格朗日方程建立其动力学模型;然后利用运动学方程推导出挂车的理想运动轨迹曲线的相对曲率和拖车与挂车理想偏航角之差之间满足的重要函数关系式;最后基于该核心关系式,利用姿态误差系统的外环速度控制器和动力学模型的内环比例积分反馈控制器组成的双环控制方法来实现给定的跟踪任务。结果 仿真结果表明,对于外环系统,外环速度控制器使得姿态跟踪误差在经过一段时间的变化后全都趋近于零,实际的姿态变量最终稳定地趋近于目标姿态变量;对于内环系统,内环比例积分反馈控制器使得速度跟踪误差经过短暂的调整后趋近于零,实际速度值最终稳定地趋近于参考的速度值。结论 设计的双环控制器可以有效地实现姿态跟踪和速度跟踪,能够使挂车精确地跟踪理想运动轨迹曲线,由于在姿态跟踪过程中引入了挂车运动轨迹曲线的相对曲率,该方法可以极大地提高轨迹跟踪的精确度。

关键词:拖挂轮式移动机器人;轨迹跟踪;曲率;双环控制

中图分类号:TP242;TP273 **文献标识码:**A **doi:**10.16055/j.issn.1672-058X.2024.0002.004

Design of Motion Control of Tractor-trailer Wheeled Mobile Robots with On-axle Hitching Based on Curvature Tracking Method

MIAO Shengyang, ZHOU Yusheng

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China

Abstract: Objective Aiming at the problem of precise tracking control of trailer to target trajectory for a tractor-trailer wheeled mobile robot with an on-axle hitching, a double-loop control method was proposed, which can track the relative curvature of ideal trajectory curve of the trailer. **Methods** Firstly, the kinematics model of tractor-trailer wheeled mobile robot with an on-axle hitching was established by combing the nonholonomic constraints, and its dynamics model was established by Euler-Lagrange equation. Then, an important function relation between the relative curvature of the ideal trajectory curve of the trailer and the difference between the ideal yaw angle of the tractor and the trailer was derived by using the kinematic equation. Finally, based on the core relation, a double-loop control method consisting of the outer-loop speed controller of the attitude error system and the inner-loop proportional-integral feedback controller of the dynamic model was used to realize the given tracking task. **Results** The simulation results showed that for the outer-loop system,

收稿日期:2023-03-05 **修回日期:**2023-05-18 **文章编号:**1672-058X(2024)02-0026-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12162006);子系统都不稳定的切换系统的稳定性研究(ZK[2023]037)。

作者简介:苗盛阳(1999—),男,山东菏泽人,硕士,从事控制理论研究。

通讯作者:周宇生(1984—),男,江西吉水人,教授,博士,从事机器人运动控制研究。Email: yszhou@gzu.edu.cn。

引用格式:苗盛阳,周宇生.基于曲率跟踪方法的轴上拖挂轮式移动机器人的运动控制[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2024,41(2):26—33.

MIAO Shengyang, ZHOU Yusheng. Design of motion control design of tractor-trailer wheeled robots with on-axle hitching based on curvature tracking method[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2024, 41(2): 26—33.

the outer-loop speed controller made the attitude tracking error all approach to zero after a period of change, and the actual attitude variable finally approached to the target attitude variable stably. For the inner-loop system, the inner-loop proportional-integral feedback controller made the speed tracking error approach to zero after a short adjustment, and the actual speed value finally approached to the reference speed value stably. **Conclusion** The designed double-loop controller can effectively realize attitude tracking and speed tracking, and make the trailer accurately track the ideal trajectory curve. Because the relative curvature of the trailer trajectory curve is introduced in the attitude tracking process, this method can greatly improve the accuracy of trajectory tracking.

Keywords: tractor-trailer wheeled mobile robot; trajectory tracking; curvature; double-loop control

1 引言

轮式移动机器人是一种通过驱动轮子转动完成运动任务的机械结构,在现实中有着广泛的应用,如以两轮式倒立摆为模型的商用平衡车 Segway^[1],具有清洁功能的扫地机器人^[2-3],自动化工厂中的无人巡逻车^[4]等等。另外,还可以由两个或两个以上的轮式移动机器人相互连接而得到拖挂结构,称之为拖挂轮式移动机器人。一般来说,最前面的轮式移动机器人(以下简称拖车)含有驱动轮,能够自主实现前向和转向运动;而跟随的轮式移动机器人(以下简称挂车)通过连杆被动地与拖车相连,其运动依赖于连杆的拉拽作用^[5-6]。根据相邻两个移动机器人之间连接方式的不同,拖挂轮式移动机器人可以分为轴上拖挂和离轴拖挂两种。轴上拖挂轮式移动机器人的连接点位于前车轮轴的中心位置,而离轴拖挂轮式移动机器人的连接点位于前车尾杆的末端处。与其他轮式移动机器人相比,由于拖挂轮式移动机器人的运输能力强,运输效率高,因此被广泛地应用于工厂、车站、机场和仓库等地方的货物运输^[7]。然而,由于挂车上无任何控制输入作用,并且整个系统的自由度数量远远大于控制输入数量,这使得实现挂车的精确运动控制变得非常困难。

要实现拖挂轮式移动机器人中的挂车沿给定目标轨迹曲线精确运动,首先应该建立拖挂轮式移动机器人的运动学模型和动力学模型。其中运动学模型是指拖挂轮式移动机器人的广义坐标受到的所有完整和非完整约束,在非完整约束下,拖挂轮式移动机器人系统的状态变量满足着一定的运动规律。目前一些研究针对拖挂轮式移动机器人的运动学模型,利用先进的控制方法设计速度控制器从理论上实现轨迹跟踪运动任务^[8-9]。然而实际上速度控制器最终还是需要通过力或力矩来实现的,因此在控制器设计时必须同时考虑

其动力学模型。动力学模型描述了速度或角速度在力或力矩的作用下的变化情况,可以通过 Kane 法^[10],牛顿力学法^[11],欧拉-拉格朗日方程^[12]等方法进行推导。由于轴上拖挂轮式移动机器人受到的约束较多,采用 Kane 法和牛顿力学法推导动力学模型会比较繁琐,所以一般采用基于系统能量函数的欧拉-拉格朗日方程进行推导。而在利用欧拉-拉格朗日方程推导动力学方程的时候要用到其运动学模型,因此必须先建立其运动学模型,然后基于运动学模型建立其动力学模型。

由于拖挂轮式移动机器人是含有多个非完整约束且严重欠驱动的系统,想要设计合适的控制器实现精确的运动任务相对困难。另外再考虑到模型的强非线性、系统内部的不确定性和受到的外界环境干扰,都会给控制器设计和实现带来很多困难。对于动力学模型的非线性,通常情况下是将非线性模型进行线性化处理,但对于离轴拖挂轮式移动过机器人,实现精确的线性化是一件困难的事情,为了解决这个问题,文献[13]通过引入一个虚拟的轴上拖挂轮式移动机器人来近似模仿真实的非线性离轴拖挂轮式移动机器人的运动状况,并基于该方法设计出了一种轨迹跟踪控制器,有效地解决非线性离轴拖挂轮式移动机器人的轨迹跟踪控制问题。针对由控制输入数量不足而引起的欠驱动特性,目前同时考虑运动学模型和动力学模型的研究一般采用双环控制方法,比如,文献[14]中提出了一种由基于运动学模型的预测控制器和基于动力学模型的滑膜控制器组成的双环控制方法,该控制策略可以将多种控制方法结合起来,充分发挥不同控制策略的优点,实现精确的姿态跟踪和速度跟踪。对于建模不确定性和外界干扰,文献[15]基于高增益观测器、径向基神经网络和自适应方法提出了一种输出反馈控制器,该控制器可以有效解决不确定性因素和外界干扰影响下的离轴拖挂轮式移动机器人的编队控制问题。

虽然上述的研究利用先进的控制方法实现了预期的运动控制任务,但忽略了拖挂轮式移动机器人内在的运动规律,这会使拖挂轮式移动机器人的运动精度低于预期水平。为了解决这个问题,文献[16]提出了一种跟踪理想轨迹曲率的动态轨迹跟踪方法,该方法的核心是通过引入弧长所表示的曲率函数来把轨迹跟踪目标转化为速度跟踪目标,其中前向速度跟踪目标设计为一个合适的光滑函数,偏航转速跟踪目标设计为理想轨迹的曲率和前向速度的乘积,从而将对目标曲线的跟踪转化为了对其曲率的跟踪,能够从根本上解决速度误差累积的问题。文献[17]发现轴上拖挂轮式移动机器人中的拖车和挂车的运动轨迹满足一个核心的曲率关系,利用该曲率关系可以由拖车的轨迹曲线推导出挂车的轨迹曲线,并通过动态轨迹跟踪方法实现挂车对目标曲线的精确跟踪。上述同时考虑运动学模型和动力学模型的研究虽然基于运动规律实现了精确的轨迹跟踪,但是在实施过程中需要设计额外计算弧长与曲率的关系,给控制过程增添计算难度,并且设计一个合适的光滑函数也相对比较困难。为了克服这些问题,并同时考虑拖挂轮式移动机器人非线性、欠驱动特性和不确定性等因素的影响,给出了拖车和挂车偏航角之差和挂车运动轨迹曲线的相对曲率之间的关系,然后基于此关系式应用双环控制策略实现挂车对目标轨迹的精确跟踪。具体双环控制策略如下:对于外环系统,基于姿态误差设计速度控制器实现了姿态跟踪;对于内环系统,利用动力学模型给出了一种比例积分反馈控制器,实现了对期望速度的跟踪。

2 问题描述

2.1 模型介绍

如图 1 所示,拖挂轮式移动机器人由一个拖车和一个挂车组成,两车通过一个刚性连杆进行连接。拖车上有两个驱动轮和一个作为支撑的万向轮,挂车上有两个被动轮,两个驱动轮里各自安装有一个驱动马达,通过驱动左右两轮转动来实现轴上拖挂轮式移动机器人的运动。设挂车的轮轴中心坐标是 (x, y) ,拖车的轮轴中心坐标是 (x_1, y_1) ,拖车的偏航角是 θ_1 ,挂车的偏航角是 θ_2 ,用 $\mathbf{q}=[x, y, \theta_1, \theta_2]^T$ 来表示拖挂轮式移动机器人的姿态信息。如果把 $\mathbf{V}=[v_1, w_1]^T$ 看作是系统的输入向量,其中 v_1 表示拖车的前向速度, w_1 表示拖车的偏航转速,那么拖挂轮式移动机器人是一个四

自由度两输入的欠驱动系统。与此同时,用 v_2 表示挂车的前向速度,用 w_2 表示挂车的偏航转速。所使用的变量和参数如表 1 所示。

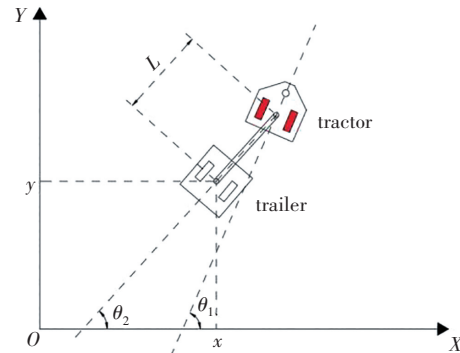


图 1 拖挂轮式移动机器人示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the tractor-trailer wheeled mobile robot

表 1 拖挂轮式移动机器人的变量和参数

Table 1 Variables and parameters of the tractor-trailer wheeled mobile robot

变量或参数	物理意义
m_1	拖车车身的质量
m_2	挂车车身的质量
m_w	车轮的质量
I_1	拖车车身绕 Z 轴方向的转动惯量
I_2	挂车车身绕 Z 轴方向的转动惯量
I_w	车轮绕 Z 轴方向的转动惯量
b	轮轴中点到车轮的距离
r	车轮的半径
L	杆的长度
x	挂车轮轴中点的横坐标
y	挂车轮轴中点的纵坐标
θ_1	拖车的偏航角度
θ_2	挂车的偏航角度
τ_r	拖车右轮的驱动力矩
τ_l	拖车左轮的驱动力矩
x_1	拖车轮轴中点的横坐标
y_1	拖车轮轴中点的纵坐标

2.2 运动学方程

假设拖车和挂车在运动过程中轮子不发生侧滑和空转,则可以得到下面的非完整约束关系:

$$\begin{cases} \dot{x} \sin \theta_1 - \dot{y} \cos \theta_1 - L \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \dot{x} \sin \theta_2 - \dot{y} \cos \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

关系式(1)也可以通过矩阵来描述

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}=0 \quad (2)$$

其中:矩阵 $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ 可以写为

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})=\begin{bmatrix} \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & -L\cos(\theta_1-\theta_2) \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

又因为拖车轮轴中点坐标 (x_1, y_1) 满足如下的关系:

$$\begin{cases} x_1=x+L\cos\theta_2 \\ y_1=y+L\sin\theta_2 \end{cases}$$

结合 $v_1=\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2}$,可以得到:

$$\begin{cases} \dot{x}\sin\theta_1-\dot{y}\cos\theta_1-L\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)=0 \\ \dot{x}\sin\theta_2-\dot{y}\cos\theta_2=0 \\ v_1=\dot{x}\cos\theta_1+\dot{y}\sin\theta_1+L\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) \end{cases}$$

基于上述的分析,可以得到轴上拖挂轮式移动机器人的运动学方程:

$$\begin{cases} \dot{x}=v_1\cos(\theta_1-\theta_2)\cos\theta_2 \\ \dot{y}=v_1\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1=w_1 \\ \dot{\theta}_2=\frac{v_1\sin(\theta_1-\theta_2)}{L} \end{cases} \quad (3)$$

运动学方程式(3)也可以通过矩阵来表示:

$$\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{S}\mathbf{V} \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2)\cos\theta_2 & 0 \\ \cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

结合式(2)和式(4),可以得出 $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ 和 \mathbf{S} 满足如下的关系:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{S}=0 \quad (5)$$

2.3 动力学方程

为了使用欧拉-拉格朗日方程推导出轴上拖挂轮式移动机器人的动力学模型,应该计算出系统各个部分的动能。首先,先来计算挂车及其车轮的总动能:

$$K_1=\frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2+m_w(\dot{x}^2+\dot{y}^2+b^2\dot{\theta}_2^2)+I_w\dot{\theta}_1^2$$

其次,假设中间的连杆是轻质的,质量相对于车体忽略不计,则 $K_2=0$ 。

最后,拖车及其车轮的总动能表示为

$$K_3=\frac{1}{2}m_1s_1+\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+m_w s_2+I_w\dot{\theta}_1^2$$

其中:

$$\begin{cases} s_1=\dot{x}^2+\dot{y}^2+L^2\dot{\theta}_2^2-2\dot{x}\dot{\theta}_2L\sin\theta_2+2\dot{y}\dot{\theta}_2L\cos\theta_2 \\ s_2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+L^2\dot{\theta}_2^2+b^2\dot{\theta}_1^2-2\dot{x}\dot{\theta}_2L\sin\theta_2+2\dot{y}\dot{\theta}_2L\cos\theta_2 \end{cases}$$

假设拖挂轮式移动机器人始终在平坦的地面上运动,那么可以忽略系统的势能。因此,拉格朗日函数可表示为

$$E=K_1+K_2+K_3$$

利用非完整机械系统的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)+\frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}}=\mathbf{X}(\mathbf{q})\mathbf{T}+\mathbf{F}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{X}(\mathbf{q})$ 表示控制输入匹配矩阵, \mathbf{T} 表示输入力矩向量, $\boldsymbol{\lambda}$ 表示拉格朗日乘子

$$\mathbf{X}(\mathbf{q})=\frac{1}{r}\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \sin\theta_2 \\ b & -b \\ L\sin(\theta_1-\theta_2) & L\sin(\theta_1-\theta_2) \end{bmatrix}, \mathbf{T}=\begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}$$

具体的计算过程如下:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial E}{\partial x}=(m_1+m_2+4m_w)\ddot{x}-(m_1+2m_w)L\sin\theta_2-$$

$$(m_1+2m_w)L\cos\theta_2\dot{\theta}_2^2=\frac{\cos\theta_2(\tau_r+\tau_l)}{r}-\sin\theta_2\lambda_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial E}{\partial y}=(m_1+m_2+4m_w)\ddot{y}+(m_1+2m_w)L\cos\theta_2-$$

$$(m_1+2m_w)L\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2=\frac{\sin\theta_2(\tau_r+\tau_l)}{r}+\cos\theta_2\lambda_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial E}{\partial \theta_1}=(I_1+2I_w+2m_w b^2)\ddot{\theta}_1=\frac{b(\tau_r-\tau_l)}{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial E}{\partial \theta_2}=(I_2+m_1L_2+2I_w+2m_w b^2+2m_w L^2)\ddot{\theta}_2-$$

$$(m_1+2m_w)L\sin\theta_2\ddot{x}+(m_1+2m_w)L\cos\theta_2\ddot{y}=\frac{L\sin(\theta_1-\theta_2)(\tau_r+\tau_l)}{r}$$

基于式(6)的计算结果,欧拉-拉格朗日方程按照状态变量的各阶导数可以整理为

$$\ddot{\mathbf{M}}\mathbf{q}+\dot{\mathbf{C}}\mathbf{q}=\mathbf{X}(\mathbf{q})\mathbf{T}+\mathbf{F}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (7)$$

为了消去式(7)中的拉格朗日乘子,将式(4)代入式(7),可以得到:

$$M(\dot{S}V+S\dot{V})+CSV=X(q)T+F^T(q)\lambda \quad (8)$$

然后将式(8)两边同乘 S^T , 并且利用式(5)将拉格朗日乘子消去

$$S^T M \dot{S} V + (S^T M S + S^T C S) V = S^T X(q) T \quad (9)$$

由于拖挂轮式移动机器人在运动过程中不可避免会受到外界的不确定性干扰, 因此在外界不确定性干扰 D_1 的影响下, 式(9)可以进一步表示为

$$M_1 \dot{V} + C_1 V + D_1 = T_1 \quad (10)$$

其中的矩阵和具体参数如下所示:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, T_1 = \begin{bmatrix} \frac{\tau_v}{r} \\ b\tau_w \\ r \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} t_{d1} \\ t_{d2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{a_3 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{L^2} \\ \Delta_2 = (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \left(\frac{a_3}{L^2} - a_1 \right) \\ a_1 = m_1 + m_2 + 4m_w \\ a_2 = I_1 + 2I_w + 2m_w b^2 \\ a_3 = I_2 + m_1 L^2 + 2I_w + 2m_w L^2 + 2m_w b^2 \\ \tau_v = \tau_r + \tau_l \\ \tau_w = \tau_r - \tau_l \end{cases}$$

3 偏航角与相对曲率

根据实际需要为拖挂轮式移动机器人设计理想跟踪目标是实现精确控制的重要环节。虽然目前相关的控制方法有很多, 但很少有研究设计跟踪目标与理想轨迹曲线的曲率相关, 如果不能很好地跟踪理想轨迹曲线的曲率, 其速度误差的累积容易导致很大的位置误差。为了跟踪目标轨迹曲线的曲率, 首先列出挂车运动轨迹相对曲率 K_2 和前向速度 v_2 与偏航转速 w_2 的关系

$$K_2 = \frac{w_2}{v_2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

根据运动学方程(3)可知:

$$w_2 = \dot{\theta}_2 = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) v_1}{L}$$

所以

$$\theta_1 - \theta_2 = \arcsin\left(\frac{Lw_2}{v_1}\right) \quad (11)$$

然后由文献[17]给出的拖车和挂车的前向速度关系可得, v_1 可以用 $\sqrt{v_2^2 + L^2 w_2^2}$ 替换, 式(11)可以改写为

$$\theta_1 - \theta_2 = \arcsin\left(\frac{Lw_2}{\sqrt{v_2^2 + L^2 w_2^2}}\right)$$

将上述等式右边括号里的分式分子分母同除 v_2 , 可以得到两车偏航角之差和轨迹曲线相对曲率之间的关系:

$$\theta_1 - \theta_2 = \arcsin\left(\frac{LK_2}{\sqrt{1 + L^2 K_2^2}}\right) \quad (12)$$

对式(12)关于时间 t 求导可得:

$$w_1 - w_2 = \frac{L\dot{K}_2}{1 + L^2 K_2^2} \quad (13)$$

因此, 挂车的偏航角和偏航转速满足式(12)和式(13), 拖车的理想偏航角 θ_{1r} 和理想偏航转速 w_{1r} 可以由式(12)和式(13)推出:

$$\begin{cases} \theta_{1r} = \theta_{2r} + \arcsin\left(\frac{LK_{2r}}{\sqrt{1 + L^2 K_{2r}^2}}\right) \\ w_{1r} = w_{2r} + \frac{L\dot{K}_{2r}}{1 + L^2 K_{2r}^2} \end{cases} \quad (14)$$

式(14)中: θ_{2r} 表示挂车的理想偏航角, w_{2r} 表示挂车的理想偏航转速, K_{2r} 表示挂车目标轨迹曲线的相对曲率。因此, 根据上述的分析, 想要实现轴上拖挂轮式移动机器人的姿态跟踪, 就务必要设计有效的控制器使得挂车运动轨迹曲线的相对曲率跟踪理想轨迹的相对曲率。

4 控制器设计

由于轴上拖挂轮式移动机器人在运动学层面会受到非完整约束以及在动力学层面受到外界因素的干扰, 因此采用双环控制方法来实现精确的目标跟踪。双环控制总控制目标是通过设计有效的内环控制器和外环控制器来同时实现精确的速度跟踪和轨迹跟踪。两个控制器的具体设计过程如下

4.1 外环控制器设计

为了实现拖挂轮式移动机器人的姿态跟踪, 很有必要基于理想姿态和当前的姿态建立一个姿态跟踪误差模型, 然后利用此姿态跟踪误差模型设计外环控制

器。设轴上拖挂轮式移动机器人的理想姿态用 $\mathbf{q}_r = [x_r, y_r, \theta_{1r}, \theta_{2r}]^T$ 表示, 姿态跟踪误差用 $\mathbf{q}_e = [x_e, y_e, \theta_{1e}, \theta_{2e}]^T$ 来表示, 由文献[8]可知, $\mathbf{q}, \mathbf{q}_r, \mathbf{q}_e$ 三者之间满足如下的关系:

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{Y}(\mathbf{q}_r - \mathbf{q})$$

其中矩阵 \mathbf{Y} 为

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于上述误差状态关于时间 t 求导, 可以进一步得出:

$$\begin{cases} \dot{x}_e = y_e \dot{\theta}_2 - v_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + v_{2r} \cos\theta_{2e} \\ \dot{y}_e = -x_e \dot{\theta}_2 + v_{2r} \sin\theta_{2e} \\ \dot{\theta}_{1e} = w_{1r} - w_1 \\ \dot{\theta}_{2e} = \frac{\sin(\theta_{1r} - \theta_{2r}) v_{1r}}{L} - \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) v_1}{L} \end{cases} \quad (15)$$

其中: θ_{1r} 和 w_{1r} 的具体形式如式(14)所示, 拖车理想前向速度满足 $v_{1r} = \sqrt{v_{2r}^2 + L^2 w_{2r}^2}$ 。

根据文献[8]的结论, 基于式(15), 设计外环控制器为如下形式:

$$\begin{cases} v_{1c} = \frac{L(k_x x_e + v_{2r} \cos\theta_{2e})}{L \cos(\theta_1 - \theta_2) + K_{\theta 2} \theta_{2e} \sin(\theta_1 - \theta_2)} \\ w_{1c} = w_{1r} + k_{\theta 1} \theta_{1e} \end{cases} \quad (16)$$

其中: v_{2r} 表示挂车的理想前向速度, $k_x, k_{\theta 1}, k_{\theta 2}$ 表示任意正数。

4.2 内环控制器的设计

对于内环系统, 基于动力学方程(10)设计一种比例积分反馈控制器, 具体可以写成下面的形式

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{K}_p \mathbf{V}_e + \mathbf{K}_I \int_0^t \mathbf{V}_e(\tau) d\tau + \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{V}}_e + \mathbf{C}_1 \mathbf{V}_e + \mathbf{K}_I \text{sgn}(\mathbf{V}_e) \quad (17)$$

其中: \mathbf{K}_p 和 \mathbf{K}_I 分别代表比例项矩阵和积分项矩阵, 他们都是正定的常值矩阵, \mathbf{K}_I 表示鲁棒项矩阵。 $\mathbf{V}_e = [v_{1c}, w_{1c}]^T$ 其中具体的表达式如式(16)所示且 $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}$ 。再将式(17)代入式(10), 可以进一步地得到:

$$\mathbf{K}_I \int_0^t \mathbf{V}_e(\tau) d\tau + \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{V}}_e + \mathbf{C}_1 \mathbf{V}_e = \mathbf{D}_1 - \mathbf{K}_p \mathbf{V}_e - \mathbf{K}_I \text{sgn}(\mathbf{V}_e)$$

基于上述的分析, 构造李雅普诺夫函数

$$V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{V}_e^T \mathbf{M}_1 \mathbf{V}_e + \frac{1}{2} \left(\int_0^t \mathbf{V}_e(\tau) d\tau \right)^T \mathbf{K}_I \left(\int_0^t \mathbf{V}_e(\tau) d\tau \right)$$

根据 \mathbf{M}_1 和 \mathbf{K}_I 的正定性, 可以得到 V_2 也是正定的, 再对李亚普诺夫函数 V_2 关于时间 t 求导

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \mathbf{V}_e^T (\mathbf{D}_1 - \mathbf{K}_p \mathbf{V}_e - \mathbf{K}_I \text{sgn}(\mathbf{V}_e)) = \\ & -\mathbf{V}_e^T \mathbf{K}_p \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_e^T \mathbf{D}_1 - \mathbf{V}_e^T \mathbf{K}_I \text{sgn}(\mathbf{V}_e) \end{aligned}$$

其中: $\mathbf{K}_I = \text{diag}[k_{ii}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ 只要令 $k_{ii} \geq |D_1|$, 则有

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{V}_e^T \mathbf{K}_p \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_e^T \mathbf{D}_1 - \mathbf{V}_e^T \mathbf{K}_I \text{sgn}(\mathbf{V}_e) \leq -\mathbf{V}_e^T \mathbf{K}_p \mathbf{V}_e \leq 0$$

由于 \dot{V}_2 是半负定的, 且 \mathbf{K}_p 为正定, 则当 $\dot{V}_2 \equiv 0$ 时, 有 $\mathbf{V}_e \equiv 0$ 。根据拉塞尔不变原理可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_c$ 。

5 仿真实验与结论

5.1 仿真实验验证

在这一节, 为了验证双环控制方法的有效性, 利用 MATLAB 软件进行仿真实验, 拖挂轮式移动机器人的状态量参数如表 2 所示。

表 2 拖挂轮式移动机器人的模型参数

Table 2 The model parameters of the tractor-trailer wheeled mobile robot

状态量	具体取值	状态量	具体取值
m_1	9 kg	I_w	0.01 kg · m ²
m_2	6 kg	L	0.4 m
m_w	4 kg	b	0.2 m
I_1	0.06 kg · m ²	r	0.03 m
I_2	0.03 kg · m ²		

对于仿真实验, 总仿真时间设定为 30 s, 仿真步长设定为 0.01 s, 姿态误差的初始值设定为: $x_e = -0.2$, $y_e = -0.2$, $\theta_{1e} = 0.05\pi$, $\theta_{2e} = 0.05\pi$ 。外界干扰设定为: $t_{d1} = 0.1 \text{cost}$, $t_{d2} = 0.1 \text{cost}$ 。

目标轨迹可以检验轨迹跟踪的效果, 同时考虑拖挂轮式移动机器人的具体应用, 因此考虑半径为 1 的圆形轨迹, 轨迹的参数方程的具体形式为 $(x_r, y_r) = (\sin t, \cos t)$ 。

此时理想轨迹的相对曲率 $K_{2r} = -1$, 首先, 为了检验轨迹跟踪效果, 外环控制器参数设为 $k_x = k_{\theta 1} = 1.05$, $k_{\theta 2} = 0.95$ 。通过 MATLAB 仿真给出了轨迹跟踪情况, 如图 2 所示, 其中黑色粗实线表示理想的轨迹, 红色的虚线

表示挂车的真实轨迹。仿真结果表明:在初始姿态误差和外界干扰存在的前提下,欠驱动移动轮式机器人在经过一段时间的调整后,可以稳定地跟踪理想轨迹。

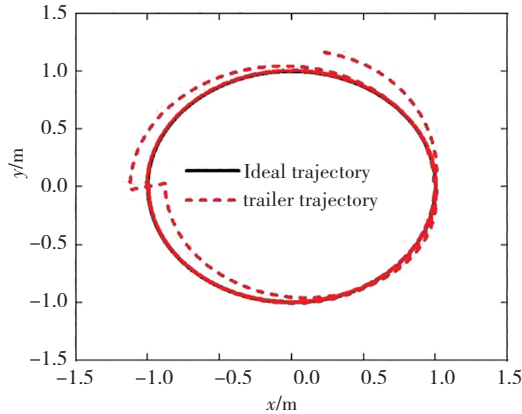


图 2 轨迹跟踪结果

Fig. 2 Results of the trajectory tracking

与此同时,姿态跟踪误差 q_e 随着时间 t 变化的图像如图 3 所示,在初始时刻存在着一定的误差,但是经过一段时间的调整,所有的姿态跟踪误差都趋向于 0,这表明使用的外环速度控制器可以实现姿态跟踪。

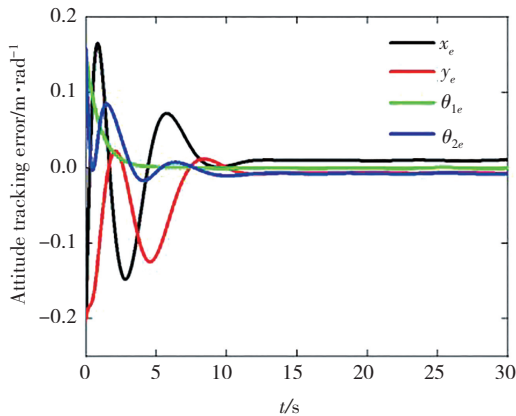


图 3 姿态跟踪误差

Fig. 3 Attitude tracking error

最后,为了验证内环控制器的控制效果,选取比例项矩阵 $K_p = 40 E_3$,积分项矩阵 $K_I = 40 E_3$,鲁棒项矩阵 $K_r = 0.1 E_3$,其中 E_3 表示三阶单位矩阵。拖车的前向速度跟踪误差 v_{1e} 和偏航转速的跟踪误差 w_{1e} 随时间 t 变化的图像如图 4 所示,由于控制参数的取值原因,偏航转速跟踪误差 w_{1e} 几乎是瞬间趋向于零,而前向速度跟踪误差 v_{1e} 则需要经过一段时间的调整才趋向于零。此外,动力学控制输入力矩随时间 t 变化的图像如图 5 所示, τ_w 几乎瞬间稳定在一个合理的值附近, τ_v 在经过短暂的变化后趋近于一个合理的值附近。

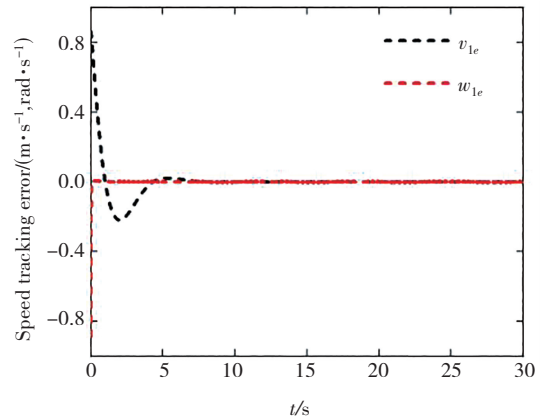


图 4 速度跟踪误差

Fig. 4 Speed tracking error

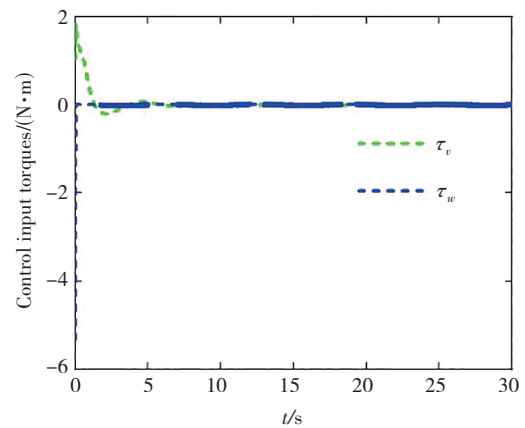


图 5 控制输入力矩

Fig. 5 Control input torques

5.2 研究结论

综上所述,设计的由外环速度控制器和内环比例积分反馈控制器组成的双环控制器可以很好地实现挂车跟踪目标轨迹曲线的目的。此外,通过引入了轨迹曲线的曲率,将对曲线的跟踪转化成了对曲线曲率的跟踪。最终基于双环控制策略可以帮助轴上拖挂轮式移动机器人系统同时实现精确的姿态跟踪和速度跟踪。

6 结束语

通过分析轴上拖挂轮式移动机器人所受到的约束,给出了运动学方程,并利用基于能量的欧拉-拉格朗日方程建立了拖挂轮式移动机器人的动力学模型。然后给出了拖车与挂车偏航角之差和挂车运动轨迹曲线相对曲率之间的关系,在此关系的基础上利用双环控制策略实现了挂车对目标轨迹的精确跟踪。

与其他仅仅通过先进控制方法实现控制目标的研究相比,采用的基于偏航角度差与相对曲率之间关系

的双环控制策略可以有效地实现挂车对目标轨迹曲线曲率的跟踪,从而极大地减少速度误差所累积的位置误差。此外,所使用的运动规律和双环控制策略也可以应用于其他机械结构的运动控制设计,比如欠驱动无人船舶,四旋翼无人飞机等。

参考文献(References):

- [1] SORENSEN K, SINGHOSE W. Wheeled inverted pendulum control and slip dynamics[C]//Proceedings of the IEEE 14th International Conference on Control and Automation (ICCA). IEEE, 2018: 336—343.
- [2] BORMANN R, HAMPP J, HÄGELE M. New brooms sweep clean—an autonomous robotic cleaning assistant for professional office cleaning [C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). IEEE, 2015: 4470—4477.
- [3] SEO J, LEE K, JEONG J. Channel selective independent vector analysis based speech enhancement for keyword recognition in home robot cleaner [C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Consumer Electronics (ICCE). IEEE, 2019: 1—3.
- [4] VOLOS C K, KYPRIANIDIS I M, STOUBOULOS I N. A chaotic path planning generator for autonomous mobile robots [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2012, 60 (4): 651—656.
- [5] KHALAJI A K, MOOSAVIAN S A A. Robust adaptive controller for a tractor-trailer mobile robot [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2014, 19(3): 943—953.
- [6] KHALAJI A K, MOOSAVIAN S A A. Stabilization of a tractor-trailer wheeled robot[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2016, 30(1): 421—428.
- [7] YUE M, HOU X, ZHAO X, et al. Robust tube-based model predictive control for lane change maneuver of tractor-trailer vehicles based on a polynomial trajectory[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(12): 5180—5188.
- [8] KIM D H, OH J H. Globally asymptotically stable tracking control for a trailer system [J]. Journal of robotic systems, 2002, 19(5): 199—205.
- [9] YUAN J, SUN F, HUANG Y. Trajectory generation and tracking control for double-steering tractor-trailer mobile robots with on-axle hitching [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(12): 7665—7677.
- [10] 沈飞,曹志强,徐德,等.基于Kane方法的机器海豚动力学建模及速度优化方法[J].自动化学报,2012,38(8):1247—1256.
- [11] SHEN Fei, CAO Zhi-qiang, XU De, et al. Dynamic-modelling and speed optimization method of robot dolphin based on Kane method[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38 (8): 1247—1256.
- [11] 王婕,马晓,宗群,等.四旋翼无人飞行器的轨迹跟踪与滑模事件驱动控制[J].控制理论与应用,2019,36(7):1083—1089.
- [12] WANG Jie, MA Xiao, ZONG Qun, et al. Trajectory tracking and sliding mode event-driven control of quadrotor unmanned aerial vehicle[J]. Control Theory and Applications, 2019, 36 (7): 1083—1089.
- [12] LI J, LI J, WU Z, et al. Practical tracking control with prescribed transient performance for Euler-Lagrange equation[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(10): 5809—5830.
- [13] BOLZERN P, DESANTIS R M, LOCATELLI A, et al. Path-tracking for articulated vehicles with off-axle hitching [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1998, 6 (4): 515—523.
- [14] YUE M, HOU X, GAO R, et al. Trajectory tracking control for tractor-trailer vehicles: A coordinated control approach[J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(2): 1061—1074.
- [15] ELHAKI O, SHOJAEI K. Observer-based neural adaptive control of a platoon of autonomous tractor-trailer vehicles with uncertain dynamics[J]. IET Control Theory & Applications, 2020, 14(14): 1898—1911.
- [16] ZHOU Y, WANG Z, CHUNG K. Turning motion control design of a two-wheeled inverted pendulum using curvature tracking and optimal control theory [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, 181(2): 634—652.
- [17] ZHOU Y, WEN X, XU Q. Precise motion control of tractor-trailer wheeled mobile structures via a newly observed key motion law[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 103(1): 833—848.