求解非单调变分不等式问题的修正惯性次梯度外梯度算法

方珍洁,龙宪军
重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067

摘　要:变分不等式问题在经济金融、交通运输、数学规划、力学等领域都有着广泛的应用。近年来,变分不等式问题受到许多学者的研究,且这些研究主要集中在求解单调或者伪单调变分不等式问题。文章在实希尔伯特空间中,针对非单调变分不等式问题,提出了求解该问题的算法。借助惯性原理和 Mann 型方法,构造了一个带 Armijo 线性搜索的修正惯性次梯度外梯度算法;在没有 Lipschitz 连续性的假设下,证明了由算法产生的迭代序列强收敛于变分不等式问题的解,值得注意的是,定理的证明并没有要求映射的任何单调性假设;最后,给出了两个数值实验,阐明了文章算法的有效性和优越性,所得结果推广和改进了许多最新的结果。

关键词:变分不等式;次梯度外梯度算法;Armijo 线性搜索;强收敛;非单调
中图分类号:O224　　**文献标识码:**A　　doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2023.0005.012

Modified Inertial Subgradient Extragradient Algorithms for Solving Non-monotone Variational Inequality

FANG Zhenjie, LONG Xianjun
School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: Variational inequality problems have a wide range of applications in economics and finance, transportation, mathematical planning, mechanics, and other fields. In recent years, the problem of variational inequalities has been studied by many scholars, and these studies have mainly focused on solving monotone or pseudo-monotone variational inequalities. This article presented an algorithm for solving non-monotone variational inequality problems in real Hilbert spaces. A modified inertial subgradient extragradient algorithm with Armijo linear search was constructed using the inertia principle and Mann-type method. Under the assumption of non-Lipschitz continuity, it was proved that the sequence of iterations generated by the algorithm converged strongly to the solution of the variational inequality problems. It is worth noting that the proof of the theorem does not require any monotonicity assumption for the mapping. Finally, two numerical experiments were given to illustrate the effectiveness and superiority of the algorithm in the paper. The results obtained extend and improve many recent results.

Keywords: variational inequalities; subgradient extragradient algorithm; Armijo linear search; strong convergence; non-monotone

1　引　言

设 H 是实希尔伯特空间,C 是 H 上的非空闭凸子集,$\langle \cdot , \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$ 分别表示定义在 H 上的内积和范数。设 $A:H \to H$ 是一个非线性映射,$x \in H$,记 $P_C(x)$ 为点 x 到 C 上的投影。本文考虑如下经典变分不等式问题(VI):找到点 $x \in C$,使得 $\langle Ax, y-x \rangle \geqslant 0$, $\forall y \in C$,记变

收稿日期:2022-07-10　**修回日期:**2022-08-18　**文章编号:**1672-058X(2023)05-0089-07
基金项目:重庆市自然科学基金(CSTC2021JCYJ-MSXMX0721);重庆市教育委员会科学技术研究重点项目(KJZD-K201900801);重庆工商大学科研团队项目(ZDPTTD201908).
作者简介:方珍洁(1998—),女,四川成都人,硕士研究生,从事最优化理论与算法研究.
引用格式:方珍洁,龙宪军.求解非单调变分不等式问题的修正惯性次梯度外梯度算法[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2023,40(5):89—95.
FANG Zhenjie, LONG Xianjun. Modified inertial subgradient extragradient algorithms for solving non-monotone variational inequality[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2023, 40(5): 89—95.

分不等式问题的解集为 $VI(C,A)$。近年来,变分不等式在数学规划、经济、工程力学、交通运输、非线性方程等领域有着广泛的应用,许多学者对变分不等式的理论和算法进行了研究[1-5]。

1976 年,Korpelevich[5]提出了外梯度算法:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n) \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n) \end{cases} \tag{1}$$

其中,A 是单调且 Lipschitz 连续的,L 为 Lipschitz 常数,$\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{L}\right)$。若解集非空,则由式(1)产生的迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于变分不等式问题的解。值得注意的是,式(1)在每步迭代时,需要计算两次到可行集 C 上的投影,若可行集 C 的结构不够简单,则会增加投影的计算成本,从而影响该方法的效率和适用性。为了克服这个不足,Censor 等[6]提出了次梯度外梯度算法,其中将第二步到 C 上的投影替换为到一个半空间上的投影:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n) \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda A y_n) \end{cases} \tag{2}$$

其中,$T_n := \{z \in H : \langle x_n - \lambda A x_n - y_n, z - y_n \rangle \leqslant 0\}$,$A$ 是单调且 Lipschitz 连续的,L 为 Lipschitz 常数,$\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{L}\right)$。Censor 等证明了由式(2)产生的迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于变分不等式问题的解。近年来,为了加快算法的收敛速度,Thong 等[7]提出如下 Mann 型惯性次梯度外梯度算法(MISEA):

$$\begin{cases} w_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = P_C(w_n - \lambda A w_n) \\ z_n = P_{T_n}(w_n - \lambda A y_n) \\ x_{n+1} = (1 - \theta_n - \beta_n) x_n + \beta_n z_n \end{cases} \tag{3}$$

其中,$T_n := \{z \in H : \langle w_n - \lambda A w_n - y_n, z - y_n \rangle \leqslant 0\}$,$A$ 是单调且 Lipschitz 连续的,$\lambda \in \left(0, \dfrac{1}{L}\right)$。显而易见,对于式(1)—式(3),由于步长与 Lipschitz 常数有关,当映射不是 Lipschitz 连续或者 Lipschitz 常数未知时,上述算法都是不可行的。为了克服这一缺陷,Khanh 等[8]提出了如下 Mann 型次梯度外梯度算法(MTSEA):

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n) \\ z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) \\ x_{n+1} = (1 - \theta_n - \beta_n) x_n + \beta_n z_n \end{cases}$$

其中,$T_n := \{z \in H : \langle x_n - \lambda A x_n - y_n, z - y_n \rangle \leqslant 0\}$,$\lambda_n = \gamma l^{m_n}$ 且 m_n 是最小的非负整数,m 满足 $\gamma l^m \| A x_n - A y_n \| \leqslant \mu \| x_n - y_n \|$,Khanh 等在伪单调假设下,证明了算法的强收敛性。

最近,Cai 等[9]提出如下黏性次梯度外梯度算法(VSEA):

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n) \\ z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n) \\ x_{n+1} = (1 - \beta_n) f(x_n) + \beta_n z_n \end{cases}$$

其中,$T_n := \{z \in H : \langle x_n - \lambda A x_n - y_n, w - y_n \rangle \leqslant 0\}$,$\lambda_n = \gamma l^{m_n}$ 且 m_n 是最小的非负整数,m 满足:

$$\gamma l^m \langle A y_n - A x_n, y_n - z_n \rangle \leqslant \frac{\mu}{2}(\| x_n - y_n \|^2 + \| y_n - z_n \|^2)$$

Cai 等在伪单调的假设下,证明了算法的强收敛性。

通过上述文献可以发现,单调性或者伪单调性在证明由算法迭代产生的序列收敛性中起着至关重要的作用。但是,许多函数并不满足单调性或者伪单调性的假设。本文针对非单调变分不等式问题,提出了带 Armijo 线性搜索的修正惯性次梯度外梯度算法;在没有 Lipschitz 连续性假设下,证明了由算法产生迭代的序列强收敛变分不等式问题的解。数值实验证明了本文算法的优势。

2 相关定义与引理

假设 H 是实希尔伯特空间,C 是 H 上的非空闭凸子集,记 $x_n \rightharpoonup x$ 为序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x,记 $x_n \to x$ 为序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x,对任意的 $x, y \in H$ 和 $\alpha \in \mathbf{R}$,有

$$\| \alpha x + (1-\alpha) y \|^2 = \alpha \| x \|^2 + (1-\alpha) \| y \|^2 - \alpha(1-\alpha) \| x - y \|^2$$

$$\| x + y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2\langle y, y + x \rangle$$

对任意的 $x, y, z \in H$ 和 $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$,且 $\alpha + \beta + \gamma = 1$,有

$$\| \alpha x + \beta y + \gamma z \|^2 = \alpha \| x \|^2 + \beta \| y \|^2 + \gamma \| z \|^2 - \alpha\beta \| x - y \|^2 - \alpha\gamma \| x - z \|^2 - \beta\gamma \| y - z \|^2$$

任给 $x \in H$,则在 C 中存在唯一的点 $P_C(x)$ 满足 $\| x - P_C(x) \| \leqslant \| x - y \|$,$\forall y \in C$,这里 P_C 被称为 H 到 C 上的投影,不难看出 P_C 是非扩张的。

定义 1[10] 设 $A: H \to H$ 是一个映射,称

(1) A 是单调当且仅当 $\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geqslant 0$,$\forall x, y \in H$。

(2) A 是伪单调当且仅当 $\langle Ay, x - y \rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle Ax, x - y \rangle \geqslant 0$,$\forall x, y \in H$。

注 1 若 A 是单调的,则 A 是伪单调的,但反之不成立。

定义 2 设 $A: H \to H$ 是一个映射,若对任意序列 $\{x_n\} \subseteq H$,当 $n \to \infty$ 时,由 $x_n \rightharpoonup x$ 可推出 $A x_n \rightharpoonup A x$,则称 A 是序列弱连续的。

引理 1[3] 设 H_1 和 H_2 是两个实希尔伯特空间,映射 $A: H_1 \to H_2$ 在 H_1 的任意有界子集上是一致连续的,

若 M 是 H_1 上的有界子集,则 $A(M)$ 有界。

引理 2[2]　$\forall x\in H, z=P_C(x)$,当且仅当 $\langle x-z,z-y\rangle\geqslant 0,\forall y\in C$。

引理 3[2]　$\forall x,y\in H$,有

(1) $\|P_C(x)-P_C(y)\|^2\leqslant\langle P_C(x)-P_C(y),x-y\rangle$。

(2) 若 $y\in C$,则 $\|P_C(x)-y\|^2\leqslant\|x-y\|^2-\|x-P_C(x)\|^2$。

引理 4[11]　设 $x\in H$ 以及 $\alpha\geqslant\beta>0$,则

$$\alpha^{-1}\|x-P_C(x-\alpha Ax)\|\leqslant\beta^{-1}\|x-P_C(x-\beta Ax)\|$$

$$\|x-P_C(x-\beta Ax)\|\leqslant\|x-P_C(x-\alpha Ax)\|$$

引理 5[4]　设 $\{a_{n_j}\}$ 是非负实序列 $\{a_n\}$ 的子列,且子列满足对于任意的 $j\in\mathbf{N}$,有 $a_{n_j}<a_{n_j+1}$ 成立,则存在单调递增的整数子列 $\{m_k\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}m_k=\infty$,而且当 $k\in\mathbf{N}$ 充分大时,有 $a_{m_k}\leqslant a_{m_k+1}$,$a_k\leqslant a_{m_k+1}$,事实上 m_k 是集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中满足 $a_n<a_{n+1}$ 的最大整数。

引理 6[12]　设 $\{a_n\}$ 是非负实数序列,满足

$$a_{n+1}\leqslant(1-\gamma_n)a_n+\gamma_n b_n,\ \forall n\geqslant 0$$

其中,$\{\gamma_n\}\subset(0,1)$ 且 $\{b_n\}$ 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数列,满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n=\infty$,$\limsup\limits_{x\to\infty}b_n\leqslant 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

引理 7[1]　对于 $x^*\in VI(C,A)$,当且仅当 $x^*=P_C(x^*-\lambda Ax^*)$,即 $r(x^*)=0$,其中 $r(x)=x-P_C(x-\lambda Ax)$。

3　算法与收敛性证明

本文假设以下条件:

(1) 解集 $VI(C,A)$ 非空。

(2) 映射 A 在 C 上是序列弱连续的,且在 H 的有界子集上是一致连续的。

(3) $\forall x^*\in VI(C,A)$,有 $\langle Ay,y-x^*\rangle\geqslant 0,\forall y\in C$。

本文提出如下算法:

算法 1　给定 $\gamma>0$,$l\in(0,1)$,$\mu\in(0,1)$,$\{\alpha_n\}\subset[0,\alpha)$,其中 $\alpha>0$,$\alpha_n\to 0(n\to\infty)$,$\{\beta_n\}\subset[c,1-\theta_n)$,$c>0$,$\{\theta_n\}\subset(0,1)$,$\theta_n\to 0(n\to\infty)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n=\infty$,选取初始点 $x_0,x_1\in H$,并且令 $n=1$。

步骤 1　令 $w_n=x_n+\alpha_n(x_n-x_{n-1})$,并计算 $y_n=P_C(w_n-\lambda_n Aw_n)$,若 $y_n=w_n$,则停止,故 y_n 是问题(VI)的解;否则,进入下一步。

步骤 2　计算 $z_n=P_{T_n}(w_n-\lambda_n Ay_n)$,其中,$T_n:=\{z\in H:\langle w_n-\lambda Aw_n-y_n,z-y_n\rangle\leqslant 0\}$,$\lambda_n:=\gamma l^{m_n}$,且 m_n 是使式(4)成立的最小非负整数 m,满足:

$$\gamma l^m\langle Aw_n-Ay_n,z_n-y_n\rangle\leqslant\frac{\mu}{4}(\|w_n-y_n\|+\|z_n-y_n\|)^2\tag{4}$$

步骤 3　计算 $x_{n+1}=(1-\theta_n-\beta_n)w_n+\beta_n z_n$,令 $n:=n+1$ 并回到步骤 1。

引理 8　假设条件(1)—(3)成立,则由算法 1 定义的 Armijo 线性搜索步长式(4)是有意义的。

证　明　若 $w_n\in VI(C,A)$,则 $w_n=P_C(w_n-\lambda_n Aw_n)$,令 $m=0$,则式(4)成立;若 $w_n\notin VI(C,A)$,则假设对任意的 $m\geqslant 1$,有

$$\gamma l^m\langle Aw_n-AP_C(w_n-\gamma l^m Aw_n),z_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\rangle>$$
$$\frac{\mu}{4}(\|w_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|+\|z_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|)^2$$

由柯西-施瓦兹不等式得

$$\gamma l^m\|Aw_n-AP_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|\times\|z_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|>$$
$$\frac{\mu}{2}[\|w_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|\times\|z_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|]$$

即有

$$\gamma l^m\|Aw_n-AP_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|>\frac{\mu}{2}\|w_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|\tag{5}$$

接下来考虑两种情形。

情形 1　若 $w_n\notin C$,则

$$\lim_{m\to\infty}\|w_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|>0\tag{6}$$

$$\lim_{m\to\infty}\gamma l^m\|Aw_n-AP_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|=0$$

可知式(5)和式(6)矛盾。

情形 2　若 $w_n\in C$,由 P_C 和 A 的连续性知

$$\lim_{m\to\infty}\|w_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|=0$$

由于映射 A 在 H 的有界子集上一致连续,知

$$\lim_{m\to\infty}\|Aw_n-AP_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|=0\tag{7}$$

结合式(5)和式(7)得

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\|w_n-P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)\|}{\gamma l^m}=0$$

令 $s_m=P_C(w_n-\gamma l^m Aw_n)$,由引理 8 得

$$\langle s_m-w_n+\gamma l^m Aw_n,x-s_m\rangle\geqslant 0,\ \forall x\in C$$

进一步,有

$$\langle\frac{s_m-w_n}{\gamma l^m},x-s_m\rangle+\langle Aw_n,x-s_m\rangle\geqslant 0,\ \forall x\in C \text{ 等价于}$$

$$\langle\frac{s_m-w_n}{\gamma l^m},x-s_m\rangle+\langle Aw_n,x-w_n\rangle+\langle Aw_n,w_n-s_m\rangle\geqslant 0,\ \forall x\in C\tag{8}$$

在式(8)中,令 $m\to\infty$,则 $\langle Aw_n,x-w_n\rangle\geqslant 0,\forall x\in C$。式(8)表明 $w_n\in VI(C,A)$,这与假设矛盾。证毕。

引理 9　假设条件(1)—(3)成立,设 $\{w_n\}$ 是由算

法 1 产生的序列,$\{w_{n_k}\}$ 是其子序列,若存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于 $q\in H$,且 $\lim\limits_{k\to\infty}\|w_{n_k}-y_{n_k}\|=0$,则 $q\in VI(C,A)$。

证 明 由 $w_n=x_n+\alpha_n(x_n-x_{n-1})$ 知

$$\lim_{k\to\infty}\|w_{n_k}-x_{n_k}\|=\lim_{k\to\infty}\alpha_{n_k}\|x_{n_k}-x_{n_k-1}\|=0$$

因 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_{n_k}-q\|=0$,由三角不等式得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|w_{n_k}-q\|=0$,表明序列 $\{w_{n_k}\}$ 弱收敛于 q;由 $\lim\limits_{k\to\infty}\|w_{n_k}-y_{n_k}\|=0$ 得 $r(q)=0$,即 $q=P_C(q-\lambda_n Aq)$。由引理 7 可知 $q\in VI(C,A)$。证毕。

定理 1 假设条件(1)—(3)成立,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\theta_n}\|x_n-x_{n-1}\|=0 \tag{9}$$

则由算法 1 产生的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $p\in VI(C,A)$。

证 明 该证明分为以下 4 个步骤:

步骤 1 证明序列 $\{x_n\}$ 有界。由引理 3 得

$$\begin{aligned}
&\|z_n-p\|^2=\|P_{T_n}(w_n-\lambda_n Ay_n)-p\|^2\leqslant\\
&\|w_n-\lambda_n Ay_n-p\|^2-\|w_n-\lambda_n Ay_n-z_n\|^2=\\
&\|w_n-p\|^2+\lambda_n^2\|Ay_n\|^2-2\lambda_n\langle w_n-p,Ay_n\rangle-\\
&\|w_n-z_n\|^2-\lambda_n^2\|Ay_n\|^2+2\lambda_n\langle Ay_n,w_n-z_n\rangle=\\
&\|w_n-p\|^2-\|w_n-z_n\|^2+2\lambda_n\langle Ay_n,p-z_n\rangle=\\
&\|w_n-p\|^2-\|w_n-z_n\|^2-2\lambda_n\langle Ay_n,y_n-p\rangle+\\
&2\lambda_n\langle Ay_n,y_n-z_n\rangle
\end{aligned}$$

因为 $p\in VI(C,A)$,所以 $\langle Ay,y-p\rangle\geqslant0$,$\forall y\in C$,又由 $y_n\in C$,故 $\langle Ay_n,y_n-p\rangle\geqslant0$,因此

$$\begin{aligned}
&\|z_n-p\|^2\leqslant\\
&\|w_n-p\|^2-\|w_n-z_n\|^2+2\lambda_n\langle Ay_n,y_n-z_n\rangle=\\
&\|w_n-p\|^2-\|w_n-y_n\|^2-\|y_n-z_n\|^2-\\
&2\langle w_n-y_n,y_n-z_n\rangle+2\lambda_n\langle y_n-z_n,Ay_n\rangle=\\
&\|w_n-p\|^2-\|w_n-y_n\|^2-\|y_n-z_n\|^2+\\
&2\langle y_n-z_n,y_n-w_n+\lambda_n Ay_n\rangle=\\
&\|w_n-p\|^2-\|w_n-y_n\|^2-\|y_n-z_n\|^2+\\
&2\langle w_n-\lambda_n Aw_n-y_n,z_n-y_n\rangle+2\lambda_n\langle Ay_n-Aw_n,y_n-z_n\rangle
\end{aligned}$$

由于 $z_n\in T_n$,故 $\langle w_n-\lambda_n Aw_n-y_n,z_n-y_n\rangle\leqslant0$,由此得

$$\begin{aligned}
&\|z_n-p\|^2\leqslant\\
&\|w_n-p\|^2-\|w_n-y_n\|^2-\|y_n-z_n\|^2+\\
&2\lambda_n\langle Ay_n-Aw_n,y_n-z_n\rangle\leqslant\\
&\|w_n-p\|^2-\|w_n-y_n\|^2-\|y_n-z_n\|^2+\\
&\frac{\mu}{2}(\|w_n-y_n\|+\|z_n-y_n\|)^2\leqslant\\
&\|w_n-p\|^2-\|w_n-y_n\|^2-\|y_n-z_n\|^2+\\
&\mu\|w_n-y_n\|^2+\mu\|z_n-y_n\|^2=\\
&\|w_n-p\|^2+(\mu-1)\|w_n-y_n\|^2+(\mu-1)\|y_n-z_n\|^2
\end{aligned} \tag{10}$$

从而 $\|z_n-p\|\leqslant\|w_n-p\|$。由 $\{w_n\}$ 的定义知

$$\begin{aligned}
&\|w_n-p\|=\|x_n+\alpha_n(x_n-x_{n-1})-p\|\leqslant\\
&\|x_n-p\|+\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|=\\
&\|x_n-p\|+\theta_n\cdot\frac{\alpha_n}{\theta_n}\|x_n-x_{n-1}\|
\end{aligned}$$

由式(9)知,存在常数 $M_1\geqslant0$,使得对任意的 $n\geqslant0$,$\frac{\alpha_n}{\theta_n}\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant M_1$ 成立,因此 $\|w_n-p\|\leqslant\|x_n-p\|+\theta_n M_1$。再由式(10)得

$$\|z_n-p\|\leqslant\|w_n-p\|\leqslant\|x_n-p\|+\theta_n M_1 \tag{11}$$

结合 $\{x_n\}$ 的定义和式(11),得

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-p\|=\|(1-\theta_n-\beta_n)w_n+\beta_n z_n-p\|=\\
&\|(1-\theta_n-\beta_n)(w_n-p)+\beta_n(z_n-p)-\theta_n p\|\leqslant\\
&(1-\theta_n-\beta_n)\|w_n-p\|+\beta_n\|z_n-p\|+\theta_n\|p\|\leqslant\\
&(1-\theta_n-\beta_n)\|w_n-p\|+\beta_n\|w_n-p\|+\theta_n\|p\|=\\
&(1-\theta_n)\|w_n-p\|+\theta_n\|p\|\leqslant\\
&(1-\theta_n)\|x_n-p\|+(1-\theta_n)\theta_n M_1+\theta_n\|p\|\leqslant\\
&(1-\theta_n)\|x_n-p\|+\theta_n M_1+\theta_n\|p\|=\\
&(1-\theta_n)\|x_n-p\|+\theta_n(M_1+\|p\|)\leqslant\\
&\max\{\|x_n-p\|,M_1+\|p\|\}\leqslant\cdots\leqslant\\
&\max\{\|x_0-p\|,M_1+\|p\|\}
\end{aligned}$$

上式表明序列 $\{x_n\}$ 有界,因此序列 $\{z_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 有界。

步骤 2 证明

$$\begin{aligned}
&\beta_n(1-\mu)\|w_n-y_n\|^2+\beta_n(1-\mu)\|y_n-z_n\|^2\leqslant\\
&\|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2+\theta_n M_3
\end{aligned} \tag{12}$$

其中,$M_3>0$。事实上,

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-p\|^2=\|(1-\theta_n-\beta_n)w_n+\beta_n z_n-p\|^2=\\
&\|(1-\theta_n-\beta_n)(w_n-p)+\beta_n(z_n-p)+\theta_n(-p)\|^2=\\
&(1-\theta_n-\beta_n)\|w_n-p\|^2+\beta_n\|z_n-p\|^2+\\
&\theta_n\|p\|^2-(1-\theta_n-\beta_n)\beta_n\|w_n-z_n\|^2-\\
&(1-\theta_n-\beta_n)\theta_n\|w_n\|^2-\beta_n\theta_n\|z_n\|^2\leqslant\\
&(1-\theta_n-\beta_n)\|w_n-p\|^2+\beta_n\|z_n-p\|^2+\theta_n\|p\|^2
\end{aligned}$$

结合式(10)和式(11)得

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant\\
&(1-\theta_n-\beta_n)\|w_n-p\|^2+\beta_n\|w_n-p^2\|+\\
&\beta_n(\mu-1)\|w_n-y_n\|^2+\beta_n(\mu-1)\|y_n-z_n\|^2+\theta_n\|p\|^2=\\
&(1-\theta_n)\|w_n-p\|^2-\beta_n(1-\mu)\times\|w_n-y_n\|^2-\\
&\beta_n(1-\mu)\times\|y_n-z_n\|^2+\theta_n\|p\|^2\leqslant\\
&\|w_n-p\|^2-\beta_n(1-\mu)\|w_n-y_n\|^2-\\
&\beta_n(1-\mu)\times\|y_n-z_n\|^2+\theta_n\|p\|^2
\end{aligned} \tag{13}$$

由式(11)知,存在 $M_2>0$,使得

$$\begin{aligned}
&\|w_n-p\|^2\leqslant(\|x_n-p\|+\theta_n M_1)^2\leqslant\\
&\|x_n-p\|^2+2\theta_n M_1\|x_n-p\|+(\theta_n M_1)^2\leqslant\\
&\|x_n-p\|^2+\theta_n M_2
\end{aligned}$$

由式(13)有

$$\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant \|x_n-p\|^2+\theta_nM_2-\beta_n(1-\mu)\|w_n-y_n\|^2-\beta_n(1-\mu)\|y_n-z_n\|^2+\theta_n\|p\|^2$$

同理存在 $M_3>0$,使得

$$\beta_n(1-\mu)\|w_n-y_n\|^2+\beta_n(1-\mu)\|y_n-z_n\|^2\leqslant \|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2+\theta_nM_3$$

步骤 3　证明存在 $M_4>0$,使得

$$\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant(1-\theta_n)\|x_n-p\|^2+\theta_n\left[\frac{\alpha_n}{\theta_n}(1-\theta_n)\|x_n-x_{n-1}\|M_4+2\beta_n\|w_n-z_n\|\|p-x_{n+1}\|+2\langle p,p-x_{n+1}\rangle\right]$$

事实上,由 $\{x_{n+1}\}$ 的定义知

$$x_{n+1}=(1-\theta_n-\beta_n)w_n+\beta_nz_n=(1-\beta_n)w_n+\beta_nz_n-\theta_nw_n$$

令 $t_n:=(1-\beta_n)w_n+\beta_nz_n$,则

$$\begin{aligned}\|t_n-p\|^2&=\|(1-\beta_n)w_n+\beta_n(z_n-p)\|^2=\\&\|(1-\beta_n)(w_n-p)+\beta_n(z_n-p)\|^2=\\&(1-\beta_n)^2\|w_n-p\|^2+\beta_n^2\|z_n-p\|^2+2\beta_n(1-\beta_n)\langle w_n-p,z_n-p\rangle\leqslant\\&(1-\beta_n)^2\|w_n-p\|^2+\beta_n^2\|z_n-p\|^2+2\beta_n(1-\beta_n)\|w_n-p\|\|z_n-p\|\leqslant\\&(1-\beta_n)^2\|w_n-p\|^2+\beta_n^2\|z_n-p\|^2+\beta_n(1-\beta_n)\|w_n-p\|^2+\beta_n(1-\beta_n)\|z_n-p\|^2=\\&(1-\beta_n)\|w_n-p\|^2+\beta_n\|z_n-p\|^2\leqslant\\&(1-\beta_n)\|w_n-p\|^2+\beta_n\|w_n-p\|^2=\|w_n-p\|^2\end{aligned}\tag{14}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\|w_n-p\|^2&=\|x_n+\alpha_n(x_n-x_{n-1})-p\|^2=\\&\|x_n-p\|^2+\alpha_n^2\|x_n-x_{n-1}\|^2+2\alpha_n\langle x_n-p,x_n-x_{n-1}\rangle\leqslant\\&\|x_n-p\|^2+\alpha_n^2\|x_n-x_{n-1}\|^2+2\alpha_n\|x_n-p\|\times\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant\\&\|x_n-p\|^2+\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|\times[2\|x_n-p\|+\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|]\leqslant\\&\|x_n-p\|^2+\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|M_4\end{aligned}\tag{15}$$

其中,$M_4>0$,由式(14)和式(15)得

$$\|t_n-p\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2+\alpha_nM_4\|x_n-x_{n-1}\|\tag{16}$$

注意到 $t_n=(1-\beta_n)w_n+\beta_nz_n$,则 $w_n-t_n=\beta_n(w_n-z_n)$,因此

$$x_{n+1}=t_n-\theta_nw_n=(1-\theta_n)t_n-\theta_n(w_n-t_n)=(1-\theta_n)t_n-\theta_n\beta_n(w_n-z_n)$$

上式表明

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|^2&=\|(1-\theta_n)t_n-\theta_n\beta_n(w_n-z_n)-p\|^2=\\&\|(1-\theta_n)(t_n-p)-[\theta_n\beta_n(w_n-z_n)+\theta_np]\|^2\leqslant\\&(1-\theta_n)^2\|t_n-p\|^2-2\langle\theta_n\beta_n(w_n-z_n)+\theta_np,x_{n+1}-p\rangle\leqslant\\&(1-\theta_n)\|t_n-p\|^2+2\langle\theta_n\beta_n(w_n-z_n),p-x_{n+1}\rangle+2\theta_n\langle p,p-x_{n+1}\rangle\leqslant\\&(1-\theta_n)\|t_n-p\|^2+2\theta_n\beta_n\|w_n-z_n\|\|p-x_{n+1}\|+2\theta_n\langle p,p-x_{n+1}\rangle\end{aligned}\tag{17}$$

结合式(16)和式(17)得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|^2&\leqslant(1-\theta_n)\|x_n-p\|^2+(1-\theta_n)\alpha_nM_4\|x_n-x_{n-1}\|+2\theta_n\beta_n\|w_n-z_n\|\|p-x_{n+1}\|+2\theta_n\langle p,p-x_{n+1}\rangle\leqslant\\&(1-\theta_n)\|x_n-p\|^2+\theta_n\Big[\frac{\alpha_n}{\theta_n}(1-\theta_n)\|x_n-x_{n-1}\|M_4+2\beta_n\|w_n-z_n\|\|p-x_{n+1}\|+2\langle p,p-x_{n+1}\rangle\Big]\end{aligned}\tag{18}$$

步骤 4　证明序列 $\{\|x_n-p\|\}$ 收敛于 0。需考虑两种情形:

情形 1　假设存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,有 $\|x_{n+1}-p\|\leqslant\|x_n-p\|$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ 存在。由式(12)可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\|w_n-y_n\|=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-z_n\|=0$,因此 $\|z_n-w_n\|\leqslant\|z_n-y_n\|+\|y_n-w_n\|\to0$。由式(11)式知

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n-x_n\|=\lim_{n\to\infty}\alpha_n\|x_n-x_{n-1}\|=\lim_{n\to\infty}\theta_n\frac{\alpha_n}{\theta_n}\|x_n-x_{n-1}\|=0$$

因此

$$\|x_n-z_n\|\leqslant\|x_n-w_n\|+\|w_n-z_n\|\to0$$

由此得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\|&=\|(1-\theta_n-\beta_n)w_n+\beta_nz_n-x_n\|=\\&\|\beta_n(z_n-w_n)-(x_n-w_n)-\theta_nw_n\|\leqslant\\&\beta_n\|z_n-w_n\|+\|w_n-x_n\|+\theta_n\|w_n\|\to0\end{aligned}$$

因为 $\{x_n\}$ 有界,则存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_j}\}$,使得 $x_{n_j}\rightharpoonup q\in H$,则

$$\limsup_{n\to\infty}\langle p,p-x_n\rangle=\lim_{j\to\infty}\langle p,p-x_{n_j}\rangle=\langle p,p-q\rangle$$

又因为 $\|w_n-x_n\|\to0$,故 $w_{n_j}\rightharpoonup q$。注意到 $\|w_n-y_n\|=\|w_n-P_C(w_n-\lambda_nAw_n)\|\to0$,由引理 9 得 $q\in VI(C,A)$。由 $p=P_{VI(C,A)}0$ 知 $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle p,p-x_n\rangle=\langle p,p-q\rangle\leqslant0$,由 $\|x_{n+1}-x_n\|\to0$ 得 $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle p,p-x_{n+1}\rangle\leqslant0$,结合引理 6 和式(18),得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-p\|=0$。

情形 2　对于任意的 $j\in N$,存在 $\{\|x_n-p\|\}$ 的子序列 $\{\|x_{n_j}-p\|\}$,使得 $\|x_{n_j}-p\|<\|x_{n_j+1}-p\|$。由引理 5 知存在一个非减序列 $\{m_k\}$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}m_k=\infty$,以及对于任意的 $k\geqslant1$,$\|x_{m_k}-p\|\leqslant\|x_{m_k+1}-p\|$,且 $\|x_k-p\|\leqslant\|x_{m_k+1}-p\|$。

由式(12)知

$$(1-\mu)\beta_{m_k}\|w_{m_k}-y_{m_k}\|^2+(1-\mu)\beta_{m_k}\|y_{m_k}-z_{m_k}\|^2\leqslant$$

$$\| x_{m_k}-p \|^2 - \| x_{m_k+1}-p \|^2 + \theta_{m_k} M_3 \leqslant \theta_{m_k} M_3$$

由此得$\lim\limits_{k\to\infty} \| w_{m_k}-y_{m_k} \| =0$ 且$\lim\limits_{k\to\infty} \| y_{m_k}-z_{m_k} \| =0$。

类似于情形 1 的证明,可得 $\| x_{m_k+1}-x_{m_k} \| \to 0$,$\limsup\limits_{k\to\infty}\langle p,p-x_{m_k+1}\rangle \leqslant 0$。

由式(18)知

$$\begin{aligned} &\| x_{m_k+1}-p \|^2 \leqslant \\ &(1-\theta_{m_k}) \| x_{m_k}-p \|^2 + \theta_{m_k}[\frac{\alpha_{m_k}}{\theta_{m_k}}(1-\theta_{m_k}) M_4 \| x_{m_k}-x_{m_k-1} \| + \\ &2\beta_{m_k} \| w_{m_k}-z_{m_k} \| \ \| p-x_{m_k+1} \| + 2\langle p,p-x_{m_k+1}\rangle] \leqslant \\ &(1-\theta_{m_k}) \| x_{m_k+1}-p \|^2 + \theta_{m_k}[\frac{\alpha_{m_k}}{\theta_{m_k}}(1-\theta_{m_k}) M_4 \| x_{m_k}-x_{m_k-1} \| + \\ &2\beta_{m_k} \| w_{m_k}-z_{m_k} \| \ \| p-x_{m_k+1} \| + 2\langle p,p-x_{m_k+1}\rangle] \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} &\| x_k-p \|^2 \leqslant \| x_{m_k+1}-p \|^2 \leqslant \\ &\frac{\alpha_{m_k}}{\theta_{m_k}}(1-\theta_{m_k}) M_4 \| x_{m_k}-x_{m_k-1} \| + \\ &2\beta_{m_k} \| w_{m_k}-z_{m_k} \| \ \| p-x_{m_k+1} \| + \\ &2\langle p,p-x_{m_k+1}\rangle \end{aligned}$$

综上可得$\lim\limits_{k\to\infty} \| x_k-p \| =0$。证毕。

注 2 定理 1 从以下 3 个方面改进了 Thong 等[7]的定理 3.2:

(1) 映射 A 的 Lipschitz 连续性推广为一致连续性。事实上,Lipschitz 连续性可推出一致连续,反之不可行。例如,定义 $A:[0,1]\to[0,+\infty)$ 为 $Ax=\sqrt{x}$,可知 A 是一致连续的,但 A 不满足 Lipschitz 连续。

(2) 算法 1 的步长选取比文献[7]中算法 3.2 的步长选取更优,其步长的选取与 Lipschitz 常数有关。众所周知,Lipschitz 常数往往难以估算,然而算法 1 利用 Armijo 线性搜索得到步长,避免了 Lipschitz 常数。此外,$\{x_{n+1}\}$的迭代与文献[7]中的迭代不同。

(3) 去掉了映射 A 的单调性假设。

注 3 算法 1 中利用了惯性项,增加惯性项常被视为加快收敛速度的一种方法,算法 1 优于 Khanh 等[8]提出的算法 3.3,这是由于我们的算法增加了惯性项,这使得收敛速度加快。

4 数值实验

为了体现本文提出算法的有效性,本节通过例子将算法 1 与下列文献中的算法进行比较:文献[7]中的 Mann 型惯性次梯度外梯度算法(MISEM),文献[8]中的 Mann 型次梯度外梯度算法(MTSEM),文献[9]中的黏性次梯度外梯度算法(VSEM),文献[13]中的自适应 Mann 型次梯度外梯度算法(SMSEM),文献[14]中的修正次梯度外梯度算法(MSEM)。数值结果见表 1,其中“Iter”和“Sec”分别表示迭代次数和 CPU 运行时间(单位:s),所有代码在 MATLAB R2019b 和 Windows10 系统下运行,计算机基本参数为 Intel(R) Core(TM) i5-10210U CPU @ 1.60 GHz 2.11 GHz。

例 1 令 $A(x)=\boldsymbol{M}x+\boldsymbol{q}$,$A:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^m$,其中 $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^m$,且 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$,$\boldsymbol{S}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$ 是一个对称矩阵,$\boldsymbol{D}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}$ 是对角矩阵,且对角线上的元素非负,显然,$\boldsymbol{M}$ 是一个正定矩阵,可行集是 $\boldsymbol{R}_n^+$,映射 A 是单调且 Lipschitz 连续的,Lipschitz 常数 $L=\|\boldsymbol{M}\|$。各参数选取如下:

算法 1:$\mu=0.5$,$\gamma=0.1$,$l=0.5$,$\alpha_n=0.1$,$\theta_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$,$\beta_n=0.1\cdot(1-\theta_n)$;VSEM:$\mu=0.5$,$\gamma=0.1$,$l=0.5$,$\beta_n=\dfrac{1}{n+2}$,$f(x)=0$;MISEM:$\alpha_n=0.5$,$\theta_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$,$\beta_n=0.1\cdot(1-\theta_n)$;MTSEM:$\mu=0.5$,$\gamma=0.1$,$l=0.5$,$\theta_n=\dfrac{1}{n+1}$,$\beta_n=0.1\cdot(1-\theta_n)$;SMSEM:$\mu=0.5$,$\theta_n=\dfrac{1}{n+1}$,$\beta_n=0.1\cdot(1-\theta_n)$。

令 $q=0$,初始点 $\boldsymbol{x}_0=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^m$,$m=20$,$\| x_{n+1}-x_n \| \leqslant error$ 作为终止条件,测试结果见表 1。

表 1 例 1 算法结果对比表

Table 1 Comparison of algorithm results of example 1

	$error=10^{-4}$		$error=10^{-5}$		$error=10^{-6}$		$error=10^{-7}$	
	Iter	Sec	Iter	Sec	Iter	Sec	Iter	Sec
算法 1	14	0.004 7	21	0.005 6	29	0.009 7	39	0.015 4
SMSEM	16	0.005 2	50	0.015 6	144	0.010 9	415	0.019 8
MTSEM	19	0.007 8	54	0.015 9	149	0.011 0	482	0.020 2
MISEM	84	0.012 4	107	0.016 4	128	0.018 1	150	0.017 9
VSEM	87	0.014 3	237	0.050 7	738	0.155 8	2 110	0.384 3

通过表 1 可以发现,算法 1 比文献[7,8,9,13]中的算法收敛效果更好。

例 2 令 $H=l^2$,$C:=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)\in H:|x_i|\leqslant\dfrac{1}{i},i=1,2,\cdots,n,\}$,定义映射 $A:C\to H$,$A(x)=(\|x\|+\dfrac{1}{\|x\|+c})x$,其中,$c>0$,显然,$A$ 在 H 上伪单调,在 C 上一致连续且序列弱连续,且在 H 上是非 Lipschitz 连续的。令 $c=0.5$,$m=20$,$\| x_n \| \leqslant error$ 作为终止条件,可行集 C 可变为

$$C=\left\{x\in\boldsymbol{R}^m:\frac{-1}{i}\leqslant x_i\leqslant\frac{1}{i},i=1,2,\cdots,m\right\}$$

测试结果见例 2 算法结果对比表(表 2),当迭代步数达到 35 000 时,用“Max”来代替,各参数选取如下:

算法 1:$\mu=0.8,\gamma=0.3,l=0.5,\alpha_n=0.1,\theta_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\beta_n=0.1\cdot(1-\theta_n)$;VSEM:$\mu=0.8,\gamma=0.3,l=0.5,\beta_n=\dfrac{1}{n+2},f(x)=\dfrac{x}{8}$;MTSEM:$\mu=0.8,\gamma=0.3,l=0.5,\theta_n=\dfrac{1}{n+1},\beta_n=0.1\cdot(1-\theta_n)$;MSEM:$\mu=0.8,\gamma=0.8,l=0.1,\beta_n=\dfrac{1}{n+2},f(x)=\dfrac{x}{8}$。

表 2　例 2 算法结果对比表

Table 2　Comparison of algorithm results of example 2

	$error=10^{-2}$		$error=10^{-3}$		$error=10^{-4}$		$error=10^{-5}$	
	Iter	Sec	Iter	Sec	Iter	Sec	Iter	Sec
算法 1	9	0.000 3	16	0.008 9	24	0.011 2	35	0.021 3
MTSEM	20	0.025 8	150	0.266 7	2 148	2.634 5	11 223	13.810
VSEM	43	0.000 5	74	0.011 4	108	0.019 3	143	0.104 3
MSEM	199	0.008 4	2 231	0.021 2	Max	0.183 3	Max	1.747 6

通过表 2 可以发现,算法 1 比文献[8,9,14]中算法的收敛效果更好。

5　结　论

结合惯性原理和 Mann 型方法,提出了带有 Armijo 线性搜索的修正惯性次梯度外梯度算法求解非单调变分不等式问题。在没有 Lipschitz 连续性假设下,证明了由算法产生的迭代序列强收敛于变分不等式问题的解。数值实验验证了本文提出算法的有效性和优越性。

参考文献(References):

[1] FACCHINEI F, PANG J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems[M]. New York: Springer, 2003.

[2] GOEBEL K, REICH S. Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings[M]. New York: Dekker, 1984.

[3] IUSEM A N, NASRI M. Korpelevich' s method for variational inequality problems in Banach spaces[J]. Journal of Global Optimization, 2011, 50(1): 59—76.

[4] MAING'E P E. A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2008, 47(3): 1499—1515.

[5] KORPELEVICH G M. The extragradient method for finding saddle points and other problems[J]. Ekon Mat Metody, 1976, 12(4): 747—756.

[6] CENSOR Y, GIBALI A, REICH S. Strong convergence of subgradient extragradient methods for the variational inequality problem in Hilbert space[J]. Optimization Methods and Software, 2011, 26(4-5): 827—845.

[7] THONG D V, VINH N T, CHO Y J. Accelerated subgradient extragradient methods for variational inequality problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2019, 80(3): 1438—1462.

[8] KHANH P Q, THONG D V, VINH N T. Versions of the subgradient extragradient method for pseudo monotone variational inequalities[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2020, 170(1): 319—345.

[9] CAI G, DONG Q L, PENG Y. Strong convergence theorems for solving variational inequality problems with pseudo-monotone and non-Lipschitz operators[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2021, 188(1): 447—472.

[10] KARAMARDIAN S, SCHAIBLE S. Seven kinds of monotone maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1990, 66(1): 37—46.

[11] DENISOV S V, SEMENOV V V, CHABAK L M. Convergence of the modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators[J]. Cybern Syst Anal, 2015, 51(5): 757—765.

[12] XU Hong-kun. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2002, 66(1): 240—256.

[13] THONG D V, HIEU D V. Strong convergence of extragradient methods with a new step size for solving variational inequality problems[J]. Computational and Applied Mathematics, 2019, 38(3): 136—156.

[14] THONG D V, SHEHU Y, IYIOLA O S. Weak and strong convergence theorems for solving pseudo-monotone variational inequalities with non-Lipschitz mappings[J]. Numerical Algorithms, 2020, 84(2): 795—823.

[15] 贺月红, 龙宪军. 求解伪单调变分不等式问题的惯性收缩投影算法[J]. 数学物理学报, 2021, 41(6): 1897—1911.
HE Yue-hong, LONG Xian-jun. A inertial contraction and projection algorithm for pseudomonotone variational inequality problems[J]. Acta Math Sci, 2021, 41(6): 1897—1911.

[16] 杨静, 龙宪军. 关于伪单调变分不等式与不动点问题的新投影算法[J]. 数学物理学报, 2022, 42(3): 904—919.
YANG Jing, LOGN Xian-jun. A new projection algorithm for solving pseudo-monotone variational inequality and fixed point problems[J]. Acta Math Sci, 2022, 42(3): 904—919.

责任编辑:李翠薇