群体博弈合作均衡的存在性和适定性研究

曾　静,丁若文
重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067

摘　要:针对许多经济问题面临着大规模大群体之间的策略互动，且策略互动时,参与主体之间为寻求更高利益可能达成合作的行为，研究群体博弈合作均衡的存在性,为这些情况提供统一分析框架。首先，介绍群体博弈模型及群体博弈合作均衡的定义;其次,在群体状态函数为伪连续的条件下，构造辅助偏好映射，借助伪连续的性质，得到群体博弈问题合作均衡的存在性结果，并举例说明该存在性定理的优越性。针对求解群体博弈合作均衡时，原始数据收集可能会出现偏差，模型数据可能受到干扰，求解的近似解序列可能不可行的情形，研究群体博弈合作均衡的适定性,为数值计算提供理论依据。首先，分别引入该类群体博弈问题合作均衡的 Hadamard 适定性和 Levitin-Polyak 适定性概念;然后，借助合作均衡映射的半连续性和紧性结果，建立 Hadamard 适定性成立的充分性条件;最后，借助群体状态函数的伪连续性，建立 Levitin-Polyak 适定性成立的充分性条件。

关键词:群体博弈;合作均衡;存在性;Hadamard 适定性;Levitin-Polyak 适定性
中图分类号:O224　　**文献标识码:**A　　doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2023.0004.014

The Existence and Well-posedness of Cooperative Equilibrium for Population Games

ZENG Jing, DING Ruowen
School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: For many economic problems facing large-scale strategic interactions between large groups, and when strategic interactions occur, participants may cooperate to seek higher benefits. Studying the existence of cooperative equilibrium in population games provides a unified analytical framework for these situations. In this paper, we first introduced the model of population games and the definition of cooperative equilibrium in these games. Secondly, under the condition that the population state function was pseudo continuous, an auxiliary preference mapping was constructed. With the aid of the property of pseudo continuity, an existence theorem for cooperative equilibrium of population games was established, and an example was given to illustrate its advantages. When solving cooperative equilibrium in population games, there may be deviations in the collection of original data, model data may be disturbed, and the approximate solution sequence may not be feasible. Studying the well-posedness of cooperative equilibriums of population games provides a theoretical basis for numerical calculation. The concepts of Hadamard well-posedness and Levitin Polyak well-posedness of cooperative equilibrium of population games were introduced. By the semicontinuity and compactness of cooperative equilibrium mappings, sufficient conditions of Hadamard well-posedness were established. At last, by the pseudo-continuity of the population state function, sufficient conditions of Levitin-Polyak well-posedness were established.

Keywords: population game; cooperative equilibrium; existence; Hadamard well-posedness; Levitin-Polyak well-posedness

---

收稿日期:2023-01-25　**修回日期:**2023-04-10　**文章编号:**1672-058X(2023)04-0099-07
基金项目:重庆市自然科学基金(基础研究与前沿探索专项)面上项目(CSTC2019JCYJ-MSXMX0605);重庆市教委科学技术研究项目(KJQN201800837);重庆工商大学研究生创新型科研项目(YJSCXX2022-112-74);重庆市研究生导师团队建设项目(YDS223010)
作者简介:曾静(1983—),女,四川彭州人,副教授,博士,从事最优化理论及应用研究.
通讯作者:丁若文(1997—),女,河南南阳人,硕士研究生,从事最优化理论及应用研究. Email: 948005426@qq.com.
引用格式:曾静,丁若文. 群体博弈合作均衡的存在性和适定性研究[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2023,40(4):99—105.
ZENG Jing, DING Ruowen. The existence and well-posedness of cooperative equilibrium for population games[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2023, 40(4): 99—105.

1 引 言

许多经济问题面临着大规模大群体之间的策略互动情形，而群体博弈模型则为这些情况提供了统一分析框架。群体博弈考虑有限个种群，每个群体中又有相当大的个体成员，每一个种群里面的个体成员都是从相同的策略集里选择自己的行动策略。可将参与博弈的所有群体看成一个社会，群体中的个体对策略的选择构成一个社会状态，并且每个个体成员的收益既依赖于自己所选择的策略又依赖于所有社会成员所选择策略的分布。群体博弈均衡则是寻找在哪种状态下，每个个体都没有改变当前策略的动机，从而达到社会稳定。群体博弈可应用于生物学、交通学、社会学、科学技术等各个领域，受到学者们的广泛关注。譬如：Nash[1]用“群体行动”解释混合策略，并假设其博弈模型中的每个参与者是由一些代理人组成的各个种群;2010 年，Sandholm[2]首次明确提出了群体博弈具体模型、相关理论及应用领域，并建立群体博弈 Nash 均衡的存在性定理,从此群体博弈理论逐渐发展起来，并成为一个热门研究方向,近年来，Yang 等[3-4]分别提出了多目标群体博弈 Pareto-Nash 均衡、弱 Pareto-Nash 均衡及加权 Nash 均衡的概念，并用非线性分析的方法证明了其存在性。

经典群体博弈理论考虑的均衡解主要是 Nash 均衡，这是一种典型的非合作均衡解，这类解只考虑参与人之间的竞争行为。与之不同的是，合作均衡解还考虑了参与人之间的合作行为。在现实生活中，考虑参与人之间可能会因为某种原因达成合作行为，因此，许多学者对非合作博弈的合作均衡解展开研究：Aumann[5]首次提出常规博弈问题的合作均衡解概念：α-核,即对于任意给定的社会状态，如果一个联盟有一个可行策略，使得不管联盟之外的代理人选择什么策略，联盟中的代理人在该联盟可行策略下都能获得比在原有社会状态下更高的收益，则称该联盟可以 α-改进原来的社会状态,若有社会状态不能被任何联盟 α-改进，则称这样的社会状态集合为 α-核;Scarf[6]利用 Aumann 方法，证明在一般博弈中，当表示代理人偏好的效用函数连续、拟凹时，非空核的存在性;Ichiishi[7]提出一个社会联盟的均衡解，该均衡结合了纳什均衡(非合作均衡解)和核(合作均衡解)的概念，并给出了均衡的存在性证明;Kajii[8]将 Scarf 的研究工作推广到当代理人偏好不满足传递性和完整性时，证明了 α-核的存在性;近来，Askoura、Noguchi[9-10]等在 Scarf 的工作基础上考虑了不完全信息和非对称信息下，常规博弈中 α-核的存在性;Yang 和 Zhang[11]首先提出群体博弈的合作均衡，并得到了合作均衡的存在性定理。

适定性的概念与稳定性、逼近论、数值分析有着密切的联系，是优化问题研究的一个热点。适定性的概念主要分为 3 类：Hadamard 适定性、Tykhonov 适定性以及 Levitin-Polyak 适定性。Hadamard 适定性概念来源于物理现象数学模型的研究，它要求问题的解连续依赖于问题数据，它确保问题数据扰动(包含问题映射扰动和定义域扰动)越小时，扰动问题近似解与目标问题最优解之间的误差越小。Tykhonov 适定性概念源于最优化问题的求解，当用迭代法求解优化问题时，得到一个极小化序列，Tykhonov 适定性要求每个极小化序列都趋于最优解。Tykhonov 适定性要求极小化序列是可行的，Levitin-Polyak 适定性推广了这一点，考虑“逼近”可行集的近似序列，要求这种近似序列收敛于最优解。关于向量优化问题的适定性研究已很成熟[12-14]，不少学者也研究了博弈问题的适定性：Yu 等[15]研究几类非合作博弈问题纳什均衡点的适定性;Scalzo[16]在较弱的条件下建立了常规博弈的 Hadamard 适定性;Yang[17]讨论 α-核在不同数据扰动的环境中的连续性，并证明一些具有非空 α-核的抽象经济问题(或常规博弈问题)的集合具有 Hadamard 适定性;Zeng[18]研究主从博弈问题弱 Nash 均衡解的 Levitin-Polyak 适定性;Khanh[19]考虑参数多目标广义博弈问题，利用非紧性度量建立其 Levitin-Polyak 适定性的完全刻画。

不难发现，博弈问题的适定性研究大都针对经典博弈的 Nash 均衡解，关于群体博弈问题合作均衡解的适定性研究却很匮乏，因此研究群体博弈合作均衡解的两种适定性很有意义。文章结构如下：第二部分介绍群体博弈问题模型以及合作均衡解概念，并回顾一些相关性质;第三部分在群体状态函数伪连续时，证明群体博弈问题合作均衡解的存在性;第四部分提出群体博弈合作均衡解的 Hadamard 适定性和 Levitin-Polyak 适定概念，并建立二者成立的充分性条件。

2 预备知识

本节主要回顾经典群体博弈问题模型和合作均衡解的定义,并介绍一些相关的重要概念和结论。下面首先介绍群体博弈模型、合作均衡解的概念。

设有群体博弈问题 $\Gamma=(P,X,F)$，其中有限集合 $P=\{1,2,\cdots,p_0\}$ 表示由 p_0 个群体组成的一个社会。对于每个群体 $p\in P$，其博弈代理人总量为 $m_p>0$;群体 p 的代理人都从相同的纯策略集 $S^p=\{1,2,\cdots,n_p\}$ 中选择策略;P 中所有群体的纯策略总数为 $n=\sum_{p\in P}n_p$。$X=\prod_{p\in P}X_p$ 表示整个社会 P 的策略状态的集合,其中 X_p 表示群体 p 的策略状态的集合，记作 $X_p=\{x_p=(x_{p,1},x_{p,2},\cdots,x_{p,n_p})\in R_+^{n_p}\mid\sum_{k=1}^{n_p}x_{p,k}=m_p\}$,$x_p$ 表示群体 p 的一个策略状态，记为 $x_p=(x_{p,1},x_{p,2},\cdots,x_{p,n_p})$,元素 $x_{p,i}$ 代表群体 p 中选择纯策略 $i\in S^p$ 时的代理人数量,$R_+^{n_p}=\{(a_1,a_2,\cdots,a_{n_p})\in R^{n_p}:a_i\geqslant 0,\forall i\}$。$F=(F_1,F_2,\cdots,F_{p_0}):\prod_{p\in P}R_+^{n_p}\to R^n$ 表示整个社会 P 的支付分配，为每个策略状态分配其对应的支付向量，记作 $F=(F_1,F_2,\cdots,F_{p_0}):\prod_{p\in P}R_+^{n_p}\to R^n$,其中 F_p 表示纯策略集 S^p 的所有策略的支付函数，记作 $F_p=(F_{p,1},F_{p,2},\cdots,F_{p,n_p}):\prod_{p\in P}R_+^{n_p}\to R^{n_p}$,$F_{p,i}:\prod_{p\in P}R_+^{n_p}\to\mathbf{R}$ 表示群体 $p\in P$ 中，代理人选择纯策略 i 时的支付函数。这是一个经典的群体博弈。

考虑群体之间会因为某种原因产生合作关系形成联盟，对每个由一些群体形成的联盟 $C\subseteq P$，记 $\hat{X}_C$ 为联盟 C 的可行状态集：

$$\hat{X}_C=\{y_C\in\prod_{p\in C}R_+^{n_p}\mid\sum_{p\in C}\sum_{i=1}^{n_p}y_{p,i}=\sum_{p\in C}m_p\}$$

定义 1[11]　若存在 $y_C\in\hat{X}_C$，使得 $(y_C)_p\cdot F_p(x)>x_p\cdot F_p(x)$，$\forall p\in C$，则称联盟 C 改进了策略状态 $x\in\prod_{p\in P}R_+^{n_p}$，也就是存在一个联盟的可行状态，可以让联盟中的每个成员在此可行状态下的收益比在给定的策略状态 x 下的收益更好,其中 $(y_C)_p\cdot F_p(x)=\sum_{i=1}^{n_p}y_{p,i}F_{p,i}(x)$。

定义 2[11]　若 $x^*\in\hat{X}_P$ 并且不能被任何联盟改进，则称策略状态 $x^*\in\prod_{p\in P}R_+^{n_p}$ 是群体博弈的一个合作均衡。

注 1　文献[2]中的群体博弈没有考虑群体之间会形成联盟进而开展合作的行为，但是文献[11]考虑了这一情况，允许各个群体之间相互协调，达成合作以追求更高的利益，进而提出群体博弈合作均衡解的概念：当联盟状态可以使得所有代理人都不能从联盟重组中获益，即在这种联盟状态中，所有代理人都没有改变目前状态的动力，从而达到合作均衡。此外，文献[20]中举例说明了群体博弈模型中 Nash 均衡与合作均衡是两个的不同解。

下面介绍后文所需的重要定义和相关结论。

定义 3[21]　设 A、B 是 X 的两个非空子集，则 A、B 之间的 Hausdorff 距离定义为 $H(A,B)=\max\{e(A,B),e(B,A)\}$，其中 $e(A,B)=\sup_{a\in A}d(a,B)$，$d(a,B)=\inf_{b\in B}||a-b||$。

定义 4[22]　设 X 为 Banach 空间,$f:X\to\bar{R}$ 为拓展实值函数。若有 $[f(x)>f(x_0)]\Rightarrow[f(x)>\limsup f(z),\forall z\to x_0]$，则称 f 在 $x_0\in X$ 处是上伪连续的;若 $-f$ 在 $x_0\in X$ 处上伪连续，则称 f 在 $x_0\in X$ 处下伪连续;若 f 在 x_0 处既是上伪连续，又是下伪连续，则称 f 在 x_0 处伪连续。

引理 1[17]　设 f 为定义在 Hausdorff 拓扑空间 X 上的一个实值函数，称 f 在 X 上伪连续，当且仅当 $f(x)<f(z)$ 时，存在 x 的一个开邻域 N_x 和 z 的一个开邻域 N_z，使得对任意 $x'\in N_x$ 和任意 $z'\in N_z$，有 $f(x')<f(z')$。

引理 2[17]　在连通拓扑空间 X 中，若一个实值函数 f 在 X 上伪连续，则下式成立：

$$f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow]f(x_1),f(x_2)[\cap f(X)\neq\varnothing$$

定义 5[21]　设 X、Y 为两个 Hausdorff 拓扑空间，F:XY 为集值映射,有

(1) 若对任意满足 $F(x)\subset O$ 的 Y 中开集 O，存在 x 的一个开邻域 $U(x)$，使得对任意 $x'\in U(x)$ 有 $O\supset F(x')$，则称 F 在 $x\in X$ 上半连续。

(2) 若对任意满足开集 $O\cap F(x)\neq\varnothing$的 Y 中开集 O，存在 x 的一个开集 $U(x)$，使得对任意 $x'\in U(x)$ 有 $O\cap F(x')\neq\varnothing$，则称 F 在 $x\in X$ 下半连续。

若 F 在每一 $x\in X$ 处都是上(下)半连续，则称 F 在 X 上是上(下)半连续。

引理 3[17]　若 X、Y 为局部紧的 Hausdorff 空间，映射 F:$X\to Y$ 为闭映射，当且仅当该映射 F 为上半连续且为紧值。

引理 4[8]　常规博弈问题 $(P,(X_i,G_i)_{i\in P},(G^C)_{C\subset P})$，其中 P 为代理人的集合，X_i 为代理人 i 的

可行集，$X=\prod_{i\in P}X_i$ 为社会策略状态，$G_i:X\rightrightarrows X$ 为代理人的策略偏好映射，联盟 C 为 P 的子集，$G^C:X\rightrightarrows X_C$ 为联盟 C 的可行策略映射。若满足以下条件：

(1) 每个 X_i 为赋范向量空间 V 的一个非空紧凸子集。

(2) 每个代理人的偏好关系 G_i 为非自反的，即对任意 $x\in X$，$x\notin G_i(x)$，并且 G_i 应为凸映射，G_i 的图在 $X\times X$ 上是开集。

(3) 联盟中代理人偏好对应 G^C 在联盟可行集的投影是连续的(同时满足上半连续和下半连续)，并且对任意 $x\in X$，$G^P(x)=G^P$，其中 G^P 为 X 的非空闭凸子集。

(4) 平衡性条件：即对任意具有平衡权重$\{\lambda^C:C\in\beta\}$的联盟平衡族 β，如果对任意 $C\in\beta$，有 $y_C\in G_i^C$，$y'\in G^P$，其中 $y_i'=\sum_{C\in\beta(i)}\lambda^C(y_C)_i$。

则该博弈问题$(P,(X_i,G_i)_{i\in P},(G^C)_{C\subset P})$至少存在一个 α-核。

3 合作均衡的存在性

本节通过定义代理人偏好映射，借助伪连续的性质，证明群体博弈合作均衡的存在性。

在下文中，设 P，S^p，m_p 是给定的，对任意 $p\in P$，令 $k\in R_+$，使得 $\sum_{p\in P}m_p<k$，设 $X_p^k=\{x_p\in R_+^{n_p}\mid x_{p,i}\leqslant k,\forall i\}$ 且 $X^k=\prod_{p\in P}X_p^k$。

定理 1 设有群体博弈问题 $\Gamma=(P,X,F)$，函数 $H:P\times X^k\times X^k\to\mathbf{R}$ 为 $H(p,v,x)=v_p\cdot F_p(x)$，且 $H(p,\cdot,\cdot)$在 $X^k\times X^k$ 上是伪连续的，则群体博弈问题 Γ 至少存在一个合作均衡。

证 明 对任意群体 $p\in P$，首先定义代理人偏好映射 $G_p:X^k\rightrightarrows X^k$ 为 $G_p(x):=\{y\in X^k\mid H(p,y,x)>H(p,x,x)\}$。

从而群体博弈问题 $\Gamma=(P,X,F)$ 可转换为广义博弈问题$(P,(X_p^k,G_p),(\hat{X}_C)_{C\subset P})$，下面借助引理 4 来证明本定理。

由已知条件，类似文献[20]定理 3.3 的证明(1)、(3)和(4)可知，引理 4 的条件(1)、(3)和(4)满足。下面只需证明引理 4 的条件(2)也满足，即证明代理人偏好映射 G_p 为非自反的、凸值，且它的图是开集。

首先证 $G_p(x)$ 的图为开集。假设序列$\{x_n,y_n\}\subset X^k\times X^k$，$y_n\notin G_p(x_n)$，且$(x_n,y_n)\to(x,y)$，只需证 $y\notin G_p(x)$。反证法：假设 $y\in G_p(x)$，则有 $H(p,y,x)>H(p,x,x)$，因为 $H(p,\cdot,x)$在 X^k 上伪连续，由引理 2 可知，存在 $z_1,z_2\in X^k$，使得 $H(p,y,x)>H(p,z_1,x)>H(p,z_2,x)>H(p,x,x)$。

又因为 $H(p,\cdot,\cdot)$在 $X^k\times X^k$ 上伪连续，由引理 1 知，存在(y,x)的开邻域 $U^p(y)\times U_1^p(x)$和(x,x) 的开邻域 $U_2^p(x)\times U_2^p(x)$，使得对任意 $y'\in U^p(y)$，$x'\in U_1^p(x)$，$x''\in U_2^p(x)$，有 $H(p,y',x')>H(p,z_1,x)>H(p,z_2,x)>H(p,x'',x'')$，令 $U(y)=\bigcap_{p\in P}U^p(y)$，$U^p(x)=\bigcap_{i=1,2}U_i^p(x)$，$U(x)=\bigcap_{p\in P}U^p(x)$，$\varepsilon=\min_{p\in P}\{H(p,z_1,x)-H(p,z_2,x)\}$，即对任意 $y'\in U(y)$和 $x'\in U(x)$，$x''\in U(x)$，有

$$H(p,y',x')-H(p,x'',x'')>\varepsilon \tag{1}$$

因为$\{x_n,y_n\}\subset X^k\times X^k$，且$(x_n,y_n)\to(x,y)$，所以当 n 足够大时，有 $y_n\in U(y)$ 和 $x_n\in U(x)$；特别地，取 $x'=x''=x_n\in U(x)$，$y'=y_n$，从而式(1)为 $H(p,y_n,x_n)-H(p,x_n,x_n)>\varepsilon$，这与 $y_n\notin G_p(x_n)$矛盾，故 $y\notin G_p(x)$。因此 $G_p(x)$的图为开集得证。

接着证明对于任意 $p\in P,x\in X_p^k,G_p(x)$是凸集。设 $y_1,y_2\in G_p(x)$，$\lambda\in(0,1)$，则有 $H(p,y_1,x)>H(p,x,x)$，$H(p,y_2,x)>H(p,x,x)$；根据 H 的定义，从而有 $H(p,\lambda y_1,x)>H(p,\lambda x,x)$，$H(p,(1-\lambda)y_2,x)>H(p,(1-\lambda)0x,x)$，进而有 $H(p,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2,x)>H(p,x,x)$，因此$(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\in G_p(x)$。故 $G_p(x)$是凸集，综上，定理得证。

注 2 文献[11]在引理 5 的基础上给出了合作均衡的存在性定理：每个连续的群体博弈(P,X,F)至少存在一个合作均衡解。这里的连续指每个群体 $p\in P$ 选择策略 $i\in S^p$ 的支付函数 $F_{p,i}$ 连续。受文献的启发，定理 1 将群体状态函数 $v_p\cdot F_p$ 削弱为伪连续，证明了该类群体博弈问题合作均衡解的存在性。下面给出 $v_p\cdot F_p$ 为伪连续，但是 $F_{p,i}$ 不一定是连续函数的群体博弈问题的例子。

例 1 设群体 $P=\{1,2\}$，纯策略集 $S^1=S^2=\{1,2\}$，代理人总量为 $m_1=1$，策略状态集为

$$X_1=\{x_1\in R_+^2\mid x_{11}+x_{12}=1\}=\hat{X}_1$$

$$X_2=\{x_2\in R_+^2\mid x_{21}+x_{22}=1\}=\hat{X}_2$$

$$\hat{X}_{12}=\{(x_1,x_2)\in R_+^4\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}=2\}$$

群体 $p\in P$ 支付函数为

$$F_p(x)=\begin{cases}(x_{p1}-2,-x_{p2}-1) & (x_{p1},x_{p2})\in\left(\frac{1}{2},1\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right)\\(2,2) & (x_{p1},x_{p2})=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\(x_{p1}+2,-x_{p2}+3) & (x_{p1},x_{p2})\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

群体 $p\in P$ 的状态函数 $x_p\cdot F_p(x)$ 可表示为

$$\begin{cases}x_{p1}(x_{p1}-2)+x_{p2}(-x_{p2}-1) & (x_{p1},x_{p2})\in\left(\frac{1}{2},1\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right)\\2(x_{p1}+x_{p2}) & (x_{p1},x_{p2})=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\x_{p1}(x_{p1}+2)+x_{p2}(-x_{p2}+3) & (x_{p1},x_{p2})\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

由于 $x_p\in X_p$，故有 $x_{p1}+x_{p2}=1$，从而上式可变为

$$x_p\cdot F_p(x)=\begin{cases}x_{p1}-2 & x_{p1}\in\left(\frac{1}{2},1\right]\\2 & x_{p1}=\frac{1}{2}\\x_{p1}+2 & x_{p1}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

或者

$$x_p\cdot F_p(x)=\begin{cases}-x_{p2}-1 & x_{p2}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\2 & x_{p2}=\frac{1}{2}\\-x_{p2}+3 & x_{p2}\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

显然该群体状态函数为伪连续，其支付函数却不是连续函数。

下面继续考虑该问题的合作均衡解，由其定义得到下式：

$$\begin{cases}x_{p1}(x_{p1}-2)+x_{p2}(-x_{p2}-1)\leqslant x_{p1}-2\\2(x_{p1}+x_{p2})\leqslant 2\\x_{p1}(x_{p1}+2)+x_{p2}(-x_{p2}+3)\leqslant x_{p1}+2\end{cases}$$

则该群体博弈问题的合作均衡解集为

$$\{(x_{11},x_{12},x_{21},x_{22})\in R_+^4\mid x_{11}+x_{12}=1,x_{21}+x_{22}=1\}$$

4　适定性

本节提出群体博弈合作均衡的 Hadamard 适定性和 Levitin-Polyak 适定性概念，并建立群体博弈模型 Hadamard 适定性和 Levitin-Polyak 适定性成立的充分性条件。

首先介绍群体博弈 Hadamard 适定性概念以及相关性质。在该节中，设 M 为满足合作均衡解非空条件的群体博弈问题 Γ 组成的集合，X^k 为非空连通紧子集，此外定义 M 的度量 ρ 为

$$\rho(\Gamma,\Gamma')=\sum_{p\in P}\sup_{i\in S^p}\sup_{x\in X^k}|F_{p,i}(x)-F_{p,i}'(x)|+\max_{C\subseteq P}H_C(\hat{X}_C,\hat{X}_C')$$

其中,H_C 表示在 $\hat{X}_C$ 上的 Hausdorff 距离。

定义 6[17]　设合作均衡解集非空的群体博弈问题 $\Gamma=(P,X,F)$ 的集合为 M，合作均衡映射为 $\Omega:M\rightrightarrows X^k$。

(1) 若 $\Omega(\Gamma)\neq\varnothing$，并且对 $X\times M$ 的任一序列 (x^m,Γ^m)，有 $\Gamma^m\to\Gamma$ 和 $x^m\in\Omega(\Gamma^m)$，存在序列 x^m 的极限点 x，使得 $x\in\Omega(\Gamma^m)$，则称 $\Gamma\in M$ 为广义 Hadamard 适定。

(2) 若 Γ 为广义 Hadamard 适定，并且 $\Omega(\Gamma)$ 为单点集，则称 $\Gamma\in M$ 为 Hadamard 适定。

定义 7[17]　若对任一 $\Gamma\in M$ 都是(广义) Hadamard 适定的，则 M 有(广义) Hadamard 适定性。

引理 5[15]　设合作均衡解集非空的群体博弈问题 $\Gamma=(P,X,F)$ 的集合为 M，合作均衡映射为 $\Omega:M\rightrightarrows X^k$。

(1) 若 Ω 在 $\Gamma\in M$ 上是上半连续，$\Omega(\Gamma)$ 为非空紧，则 Γ 是广义 Hadamard 适定的。

(2) 若 Ω 在 $\Gamma\in M$ 上是上半连续，$\Omega(\Gamma)$ 为单点集，则 Γ 是 Hadamard 适定。

定理 2　若群体博弈合作均衡集合非空，即对任意 $\Gamma\in M$，有 $\Omega(\Gamma)\neq\varnothing$,则称 M 有 Hadamard 适定性。

证　明　先证合作均衡映射 $\Omega:M\rightrightarrows X^k$ 为上半连续并且为非空紧，对 $\Gamma\in M$，显然有 $\Omega(\Gamma)\neq\varnothing$。由引理 3 可得，只需证 Ω 的图为闭集即可。

假设 $\{\Gamma^m,x^m\}$ 为 $M\times X^k$ 的一个序列并且 $x^m\in\Omega(\Gamma^m)$ 和 $(\Gamma^m,x^m)\to(\Gamma,x)\in M\times X^k$;由 $x^m\in\Omega(\Gamma^m)$，有 $x^m\in\hat{X}_P^m$;由于 $\Gamma^m\to\Gamma$，则有

$$d(x,\hat{X}_P)\leqslant d(x,x^m)+d(x^m,\hat{X}_P^m)+H_P(\hat{X}_P^m,\hat{X}_P)\leqslant d(x,x^m)+\rho(\Gamma^m,\Gamma)\to 0$$

因此,$x\in\hat{X}_P$。下证 $x\in\Omega(\Gamma)$。用反证法：假设存在 $C\subseteq P$ 和 $y_C\in\hat{X}_C$,使得对任意 $p\in C$,有 $(y_C)_p\cdot F_p(x)>x_p\cdot F_p(x)$,即 $H(p,y_C,x)>H(p,x,x)$。因为 $H(p,\cdot,x)$ 在 X^k 上是伪连续，根据引理 2，存在 X_p^k 的元素 z_1、z_2,

使得 $H(p,y_C,x)>H(p,z_1,x)>H(p,z_2,x)>H(p,x,x)$；又因为 $H(p,\cdot,\cdot)$ 在 $X^k\times X^k$ 上是伪连续，由引理 1 知，存在 (y_C,x) 的开邻域 $U^p(y_C)\times U_1^p(x)$ 和 (x,x) 的开邻域 $U_2^p(x)\times U_2^p(x)$，使得对任意 $y_C'\in U^p(y_C)$，$x'\in U_1^p(x)$ 和 $x''\in U_2^p(x)$，$H(p,y_C',x')>H(p,z_1,x)>H(p,z_2,x)>H(p,x'',x'')$ 成立。令 $U(y)=\bigcap_{p\in P}U^p(y_C)$，$U^p(x)=\bigcap_{i=1,2}U_i^p(x)$，$U(x)=\bigcap_{p\in P}U^p(x)$；$\varepsilon_C=\min_{p\in C}\{H(p,z_1,x)-H(p,z_2,x)\}$，即对任意 $y_C'\in U(y)$，$x'\in U(x)$ 和 $x''\in U(x)$，有

$$H(p,y_C',x')-H(p,x'',x'')>\varepsilon_C \tag{2}$$

因为，$H_C(\hat{X}_C^m,\hat{X}_C)\to 0$，即存在 $\hat{X}_C$ 的一个序列 $\{y_C^m\}$，使得 $y_C^m\in\hat{X}_C^m$ 和 $y_C^m\to y_C$，故存在 m_1，使得当 $m>m_1$ 时，$y_C^m\in U(y_C)$ 和 $x^m\in U(x)$ 成立，则有 $y_C^m\in\hat{X}_C^m$；特别地取 $y_C^m=y_C'$，$x^m=x'$，则式(2)为 $H(p,y_C^m,x^m)-H(p,x^m,x^m)>\varepsilon_C$。此外，由于 $\Gamma^m\to\Gamma$，则对 $\frac{\varepsilon_C}{2}>0$，存在 m_2，使得当 $m>m_2$ 时，对任意 $(y_0,x_0)\in X\times X$，有

$$H^m(p,y_0,x_0)-H^m(p,x_0,x_0)>H(p,y_0,x_0)-H(p,x_0,x_0)-\frac{\varepsilon_C}{2}$$

由上可得，对足够大的 m，有 $y_C^m\in\hat{X}_C^m$，和

$$H^m(p,y_C^m,x^m)-H^m(p,x^m,x^m)>H(p,y_C^m,x^m)-H(p,x^m,x^m)-\frac{\varepsilon_C}{2}>\varepsilon_C-\frac{\varepsilon_C}{2}=\frac{\varepsilon_C}{2}$$

这与 $x^m\in\Omega(\Gamma^m)$ 矛盾，故 $x\in\Omega(\Gamma)$。由引理 5 得 M 有 Hadamard 适定性。

下面介绍群体博弈合作均衡的 Levitin-Polyak 近似序列和 Levitin-Polyak 适定性概念，并建立群体博弈模型 $\Gamma=(P,X,F)$ 的 Levitin-Polyak 适定性成立的充分性条件。

定义 8 设序列 $\{x^n\}\in X^k$，若存在一个序列 $\{\varepsilon_n\}\subset R_+$ 且 $\varepsilon_n\to 0$，使得 $d(x^n,\Omega(\Gamma))\leqslant\varepsilon_n$ 且不存在 $y_C\in\hat{X}_C$，使得 $(y_C)_p\cdot F_p(x^n)>x_p^n\cdot F_p(x^n)+\varepsilon_n$，$\forall p\in C$，则称序列 $\{x^n\}$ 为 Levitin-Polyak 近似序列(简记为 LP 近似序列)。

定义 9 设合作均衡解集非空的群体博弈问题 $\Gamma=(P,X,F)$ 的集合为 M，有 $\Omega:M\rightrightarrows X^k$ 为合作均衡映射。

(1) 若 $x\in\Omega(\Gamma)$ 为单点集，对任一 LP 序列 $\{x^n\}$ 且有 $x^n\to x$，则称 $\Gamma\in M$ 为 Levitin-Polyak 适定(简记为 LP 适定)。

(2) 若 $\Omega(\Gamma)\neq\varnothing$，对每个 LP 序列 $\{x^n\}$，序列 $\{x^n\}$ 的子序列 $\{x^{n_k}\}$ 存在极限点 x，使得 $x\in\Omega(\Gamma)$，则称 $\Gamma\in M$ 为广义 Levitin-Polyak 适定(简记为广义 LP 适定)。

注 3 群体博弈问题 Γ 的广义 LP 适定性意味着该问题解集为紧集。由此，文献的连续群体博弈模型 (P,X,F) 显然满足广义 LP 适定性。

定理 3 若群体博弈合作均衡集合非空，即对任意 $\Gamma\in M$，有 $\Omega(\Gamma)\neq\varnothing$，则 M 有广义 Levitin-Polyak 适定性。

证 明 假设 $\varepsilon_n\subset R_+$ 且 $\varepsilon_n\to 0$，$\{x^n\}$ 为 LP 近似序列。由于 X^k 为紧集，存在一个子序列 $\{x^{n_k}\}$，使得 $x^{n_k}\to x$；不失一般性，将 x^{n_k} 记为 x^n，下证 $x\in\Omega(\Gamma)$。用反证法：假设 $x\notin\Omega(\Gamma)$，则存在 $y_C\in\hat{X}_C$，使得对任意 $p\in C$，有 $(y_C)_p\cdot F_p(x)>x_p\cdot F_p(x)$，即 $H(p,y_C,x)>H(p,x,x)$。

因为 $H(p,\cdot,\cdot)$ 在 $X^k\times X^k$ 上是伪连续，由引理 2 可得，存在 (z_1,x_1)，$(z_2,x_2)\in X^k\times X^k$，使得 $H(p,y_C,x)>H(p,z_1,x_1)>H(p,z_2,x_2)>H(p,x,x)$；又因为引理 1，存在 (y_C,x) 的开邻域 $U^p(y_C)\times U_1^p(x)$ 和 (x,x) 的开邻域 $U_2^p(x)\times U_2^p(x)$，使得对任意 $y'\in U^p(y_C)$，$x'\in U_1^p(x)$ 和 $x''\in U_2^p(x)$，有 $H(p,y',x')>H(p,z_1,x_1)>H(p,z_2,x_2)>H(p,x'',x'')$；令 $U(y_C)=\bigcap_{p\in C}U^p(y_C)$，$U(x)=\bigcap_{p\in C}(U_1^p(x)\cap U_2^p(x))$，$\delta=\min_{p\in C}\{H(p,z_1,x_1)-H(p,z_2,x_2)\}>0$，从而对任意 $y'\in U(y_C)$，$x'\in U(x)$ 和 $x''\in U(x)$，有

$$H(p,y',x')-H(p,x'',x'')>\delta \tag{3}$$

由 $x^n\to x$，存在一个正整数 N，使得当 $n>N$，有 $x^n\in U(x)$；特别地，取 $x'=x''=x^n\in U(x)$，则式(3)变为 $H(p,y_C,x^n)-H(p,x^n,x^n)>\delta$；又因为 $\{\varepsilon_n\}\subset R_+$，$\varepsilon_n\to 0$ 并且 $\delta>0$，显然有 $\varepsilon_n<\delta$，从而 $H(p,y_C,x^n)-H(p,x^n,x^n)>\varepsilon_n$，这与 $\{x^n\}$ 为 LP 近似序列矛盾，故 $x\in\Omega(\Gamma)$。

5 结 论

群体博弈模型因为其参与人的特殊性，被广泛应用于经济学、社会学等领域。现实生活中，考虑群体中参与人之间可能会因为某种原因达成合作行为，故研

究群体博弈问题合作均衡的存在性。首先在群体状态函数为伪连续的情况下得到该群体博弈问题合作均衡解的存在性，且举例说明在一定程度上削弱了文献已有的合作均衡存在性条件；然后考虑群体博弈模型的适定性，引入群体博弈模型 Hadamard 适定性和 Levitin-Polyak 适定性概念，并在合作均衡存在的基础上获得这两种适定性成立的充分性条件。

参考文献(References)：

[1] NASH J. Noncooperative games [D]. Princeton: Princeton University, 1950.

[2] SANDHOLM W H. Population games and evolutionary dynamics[M]. Cambridge: MIT Press, 2010: 21—52.

[3] YANG G H, YANG H. Stability of weakly Pareto-Nash equilibria and Pareto-Nash equilibria for multi-objective population games [J]. Set-Valued and Variational Analysis, 2017, 25(2): 427—439.

[4] YANG G H, YANG H, SONG Q Q. Stability of weighted Pareto-Nash equilibria for multi-objective population games[J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2016, 9(3): 4167—4176.

[5] AUMANN R J. The core of a cooperative game without side payments [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1961, 98(3): 539—552.

[6] SCARF H E. On the existence of a coopertive solution for a general class of N-person games [J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(2): 169—181.

[7] ICHIISHI T. A social coalitional equilibrium existence lemma[J]. Econometrica, 1981, 49(2): 369—377.

[8] KAJII A. A generalization of scarf' s theorem: an α-core existence theorem without transitivity or completeness [J]. Journal of Economic Theory, 1992, 56(1): 194—205.

[9] ASKOURA Y, SBIHI M, TIKOBAINI H. The exante α-core for normal form games with uncertainty [J]. Journal of Mathematical Economics, 2013, 49(2): 157—162.

[10] NOGUCHI M. Alpha cores of games with nonatomic asymmetric information[J]. Journal of Mathematical Economics, 2018, 75(1): 1—12.

[11] YANG Z, ZHANG H Q. Essential stability of cooperative equilibria for population games [J]. Optimization Letters, 2019, 13(7): 1573—1582.

[12] PENG Z Y, WANG J J, LONG X J, et al. Painlevé-Kuratowski convergence of solutions for perturbed symmetric set-valued quasi-equilibrium problem via improvement sets[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research (APJOR), 2020, 37(4): 1—22.

[13] 曾静, 胡瑞婷. 向量优化问题 Benson 真有效解的稳定性[J]. 数学物理学报, 2022, 42(1): 35—44.
ZENG Jing, HU Rui-ting. Stability of Benson proper efficient solutions for vector optimization problems[J]. Acta mathematica scientia, Series A, 2022, 42(1): 35—44.

[14] 胡瑞婷. 集值优化问题近似 Henig 真有效点的稳定性[J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版,2022, 39(2): 53—58.
HU Rui-ting. Stability of approximate Henig proper effective point [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2022, 39(2): 53—58

[15] YU J, YANG H, YU C. Well-posed Ky Fan' s point, quasi-variational inequality and Nash equilibrium problems [J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66(4): 777—790.

[16] SCALZO V. Hadamard well-posedness in discontinuous non-cooperative games[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 360(2): 697—703.

[17] YANG Z, MENG D. Hadamard well-posedness of the α-core[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 452 (2): 1957—1969.

[18] ZENG J, ZHANG W Y. Existence and Levitin-Polyak well-posedness for a class of generalized multiobjective multi-leader-follower games [J]. Pacific Journal of Optimization, 2016, 12(4): 717—726.

[19] KHANH P Q, LUU L M, MINH SON T T. On the stability and Levitin-Polyak well-posedness of parametric multi-objective generalized games [J]. Vietnam Journal of Mathematics, 2016, 44(4): 857—871.

[20] 张海群. 种群博弈中合作均衡的存在性与稳定性研究[D]. 上海: 上海财经大学, 2020.
ZHANG Hai-qun. Study on the existence and stability of cooperative equilibrium in population games[D]. Shanghai: Shanghai University of Finance and Economics, 2020.

[21] LONG X J, PENG J W, PENG Z Y. Scalarization and pointwise well-posedness for set optimization problems [J]. Journal of Global Optimization, 2015, 62(4): 763—773.

[22] MORGAN J, SCALZO V. Pseudocontinuity in optimization and nonzero sum games[J], Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 120(1): 181—197.

责任编辑：李翠薇