

C4 旋转对称光子晶体平板中的对称保护连续谱束缚态

张铭洋

重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067

摘要:在光子晶体平板中,连续谱束缚态关于 C2 和 C6 旋转对称的依赖性已经在数值上进行了广泛研究,但是缺少严格的理论分析过程,此外还缺少对 C4 旋转对称的研究,鉴于此,构建了系统分析连续谱束缚态关于所有旋转对称的依赖性的理论,并且重点研究了 C4 旋转对称的情况;首先,通过分析具有旋转对称的结构中麦克斯韦方程组特征解的性质,将连续谱束缚态的存在性问题转变为旋转矩阵的特征值是否与一个简单代数方程的解相同的问题;其次,给出了 C4 旋转对称的结构中连续谱束缚态存在时所对应的条件;然后,证明了破坏 C4 旋转对称保持 C2 旋转对称时,连续谱束缚态依然存在;最后,利用有限元软件 FreeFEM 进行了大量的数值验证;上述理论可适用于所有旋转对称的情况,深入揭示了旋转对称对连续谱束缚态存在的重要性,深入揭示了高阶旋转对称性与低阶旋转对称性之间的依赖关系,为连续谱束缚态的实际应用提供了理论指导。

关键词:光子晶体;旋转对称;连续谱束缚态

中图分类号: O436 **文献标识码:** A **doi:** 10.16055/j.issn.1672-058X.2023.0003.09

Symmetry-protected Bound States in the Continuum in C4 Rotationally Symmetric Photonic Crystal Plates

ZHANG Mingyang

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: The dependence of bound states in the continuum (BICs) on C2 and C6 rotational symmetry in photonic crystal plates has been extensively studied numerically. However, a rigorous theoretical analysis process is lacking, and there is a lack of studies on C4 rotational symmetries. In view of this, a theory of systematic analysis of the dependence of BICs on all rotational symmetries was constructed, and the case of C4 rotational symmetry was mainly studied. Firstly, by analyzing the characteristic solutions of Maxwell's equations with rotationally symmetric structure, the problem of the existence of BICs was transformed into the question of whether the eigenvalue of the rotation matrix was the same as the solution of a simple algebraic equation. Secondly, the conditions for the existence of BICs in C4 rotationally symmetric structures were given. Then, it was proved that the BICs still existed when C4 rotation symmetry was destroyed and C2 rotatory symmetry was maintained. Finally, the finite element software, FreeFEM, was used to do a lot of numerical verifications. The above theory can be applied to all cases of rotational symmetries, revealing the importance of rotational symmetry for the existence of BICs. The dependence between high-order and low-order rotational symmetries was revealed, providing theoretical guidance for applying BICs.

Keywords: photonic crystal; rotational symmetry; bound states in the continuum

收稿日期: 2022-05-13 **修回日期:** 2022-06-20 **文章编号:** 1672-058X(2023)03-0064-07

基金项目: 重庆市自然科学基金面上项目(CSTC2019JCYJ-MSXMX0717).

作者简介: 张铭洋(1997—),女,重庆忠县人,硕士研究生,从事光子晶体、麦克斯韦方程组数值计算研究.

引用格式: 张铭洋. C4 旋转对称光子晶体平板中的对称保护连续谱束缚态[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2023, 40(3): 64—70.

ZHANG Mingyang. Symmetry-protected bound states in the continuum in C4 rotationally symmetric photonic crystal plates[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2023, 40(3): 64—70.

1 引言

光学连续谱束缚态 (bound states in the continuum, BIC) 是指位于连续谱中的导模,其不能与辐射场耦合,没有能量辐射,被完美地束缚在结构中^[1-3]。数学上,光学连续谱束缚态是指开结构中麦克斯韦方程组的一类频率位于连续谱内的平方可积特征解。通常,导模(即平方可积特征解)的特征频率位于连续谱外。1929年冯诺依曼等^[4]从数学模型上发现在一些特殊的结构中存在特征频率位于连续谱内的导模。直到1985年文献[5]才构造出具有连续谱束缚态的真实物理系统。2008年,文献[3]研究了光子晶体结构中的连续谱束缚态。此后,连续谱束缚态受到广泛关注,与之有关的研究快速发展。目前,连续谱束缚态的概念和研究已推广到水波、声波等其他波动现象^[1]。

连续谱束缚态可看成为品质因子为无穷大的共振,只存在于若干离散的频率上。连续谱束缚态由共振模式所包围。通过扰动波矢,可在连续谱束缚态附近找到任意大小品质因子的共振模式^[6]。此性质使得连续谱束缚态在光学、光子学等领域都拥有广阔的应用前景。目前,连续谱束缚态已在波导、光栅、光子晶体及超材料等结构中被广泛研究^[7],光子晶体中的连续谱束缚态现在已经被用于传感器、激光器和滤波器的设计当中^[8-10]。通常,共振模式的品质因子与波矢之差的平方成反比。文献[6]证明了存在特殊的连续谱束缚态使得附近共振模式的品质因子与波矢之差的四次方和六次方成反比,并给出了两类特殊连续谱束缚态的条件。从实际应用角度来讲,在这些特殊的连续谱束缚态附近更容易构造出高品质因子的共振模式。

连续谱束缚态可以大致分为两类:对称保护的连续谱束缚态^[11-15]和非对称保护的连续谱束缚态^[2,16-19]。对称保护的连续谱束缚态 (Symmetry Protected Bound states in the continuum, SPBIC) 的机理是:在对称结构中,布洛赫模的对称性与结构中辐射场的对称性不相容,从而与辐射场不耦合,变成一个连续谱束缚态^[3]。而非对称保护连续谱束缚态的存在机理是:共振模式的辐射场之间发生干涉相消现象,造成没有辐射,成为连续谱束缚态^[3]。

连续谱束缚态的存在性与结构的对称性具有密切联系。早期研究结果都是在对称结构中研究连续谱束缚态,学术界一度认为连续谱束缚态只存在于对称结构中。目前数学上还没有非对称保护连续谱束缚态的存在性理论。非对称保护连续谱束缚态关于结构对称性的依赖关系非常复杂。文献[20-23]从数值和实验上演示了破坏二维结构的C2旋转对称性后,连续谱束缚态演化为共振模式。这间接说明了结构的对称性对

非对称保护连续谱束缚态的存在性具有重要影响。但是破坏对称性后连续谱束缚态是否一定会演化为共振模式并没有明确的结论。最近,文献[24-26]证明了只要引入足够多的结构扰动参数,连续谱束缚态可以连续存在于非对称的结构中,且对于不同类型的连续谱束缚态,所需要引入的最小参数的数量是不同的。上述结论表明,非对称保护连续束缚态可以存在于非对称结构中,只要结构的自由参数足够多。

对称保护连续谱束缚态只存在于对称结构中。光子晶体平板可具有四类旋转对称性:C2、C3、C4和C6旋转对称性,即分别旋转180°、120°、90°和60°后结构不变。文献[11-12]首先从数学理论上证明了在具有C2旋转对称的二维介质结构中对称保护连续谱束缚态的存在性,在非对称结构中一定不存在对称保护连续谱束缚态。研究对称保护连续谱束缚态对上述四种不同类型对称性的连续依赖性具有十分重要的意义。文献[21]研究了C6旋转对称性对具有拓扑电荷为 $q=-2$ 的对称保护连续谱束缚态存在性的影响。通过数值计算发现破坏C6对称保持C2对称,对称保护连续谱束缚态依然存在,但是变成拓扑电荷 $q=-1$;破坏C6对称保持C3对称,对称连续谱束缚态演化为共振模式,而且会产生两个非对称保护连续谱束缚态。上述研究结果给出了一种产生非对称保护连续谱束缚态的方法。目前,对于拓扑电荷为 $q=-1$ 或 $q=1$ 的对称保护连续谱束缚态关于结构对称性的依赖关系没有进行系统讨论,缺乏严格系统的依赖性理论。

研究C4旋转对称结构中对称保护连续谱束缚态关于对称性的依赖关系。建立了严格数学理论证明破坏C4对称保持C2对称,对称保护连续谱依然存在。并利用有限元软件FreeFEM进行数值验证。相比于以前的研究,研究既有严格的数学理论,又有数值验证。研究成果具有一般性,可推广到分析对称保护连续谱束缚态关于C6对称性的依赖性,有利于深入理解连续谱束缚态关于对称性的依赖关系,为其实际应用提供理论指导。

2 连续谱束缚态

考虑一个在 x 与 y 方向为周期,在 z 方向上厚度有限的光子晶体平板。光子晶体平板通过在平板上构造正方形空气柱晶格所构成。设平板厚度为 $2D$,晶格常数为 L ,平板的介电常数为 ε_1 ,空气的介电常数为 $\varepsilon_0=1$ 。记整个结构的介电常数为 $\varepsilon(r)$,其中 $r=(x,y,z)$,则 $|z|>D$ 时有 $\varepsilon(r)=1$,且 $\varepsilon(r)$ 满足

$$\varepsilon(r)=\varepsilon(x+mL,y+nL,z) \quad (1)$$

其中, m 与 n 为任意整数。

设光子晶体平板是无磁性、各向同性的,由麦克斯

韦方程组可知,具有时间依赖 $e^{-i\omega t}$ 的时谐波的电场 E 满足如下的控制方程:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times E - k^2 \varepsilon E &= 0 \\ \nabla \cdot (\varepsilon E) &= 0\end{aligned}$$

其中 $k = \frac{\omega}{c}$ 为真空中的波速, ω 为角频率, c 为真空中的光速。光子晶体平板中的布洛赫模(即麦克斯韦方程组的特征解)可写成:

$$E(r) = \Phi(r) e^{ik \cdot r}$$

其中, $k = (\alpha, \beta, 0)$ 为布洛赫波矢, 实数 α 与 β 分别为 x 与 y 方向的布洛赫波速, $\Phi(r)$ 满足周期条件式(1)。

由于在 $|z| > D$ 时, 结构是均匀的, 由傅立叶展开式与分离变量法可知, 满足向外辐射条件的布洛赫模可以展开为^[18]

$$E(r) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} d_{m,n}^{\pm} e^{ik_{m,n}^{\pm} \cdot r} \quad \pm z > D \quad (2)$$

其中, 常数向量 $d_{m,n}^{\pm}$ 满足 $d_{m,n}^{\pm} \cdot k_{m,n}^{\pm} = 0$, $k_{m,n}^{\pm} = (\alpha_m, \beta_n, \pm \gamma_{m,n})$, $\alpha_m = \alpha + \frac{2m\pi}{L}$, $\beta_n = \beta + \frac{2n\pi}{L}$, $\gamma_{m,n} = \sqrt{k^2 - \alpha_m^2 - \beta_n^2}$ 。

若结构是无耗散的, 即 $\varepsilon(r)$ 为非负实函数, 则布洛赫模可以分为三类: 导模、共振以及连续谱束缚态。

(1) 若 k 为实数, 则布洛赫模为导模。可以证明 k 为实数等价于 $E(r)$ 满足 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} E(r) = 0$, 即没有能量辐射, 没有能量损失。当波速和布洛赫波矢满足条件 $0 < k < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 时, 导模关于 α 与 β 连续存在。在上述条件下, $\gamma_{m,n}$ 的虚部都大于 0, 所以展开式(2)中每一个平面波都在无穷远出衰退到 0, 即 $E(r)$ 自动满足 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} E(r) = 0$, 从而是一个导模。

(2) 若 k 为复数, 则布洛赫模为共振模式。共振模式的波速 k 满足 $[\operatorname{Re}(k)]^2 - [\operatorname{Im}(k)]^2 > \alpha^2 + \beta^2$ 。由于共振的波速 k 为复数且满足向外辐射条件, 共振满足条件 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} E(r) = \infty$, 即在空间上是无限增大, 但随时间指数衰减。共振波速 k (或共振频率 ω) 的虚部小于零, 即 $\operatorname{Im}(k) < 0$, 它表示共振随着时间衰退的速度。共振的品质因子 Q 定义为 $Q = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}(k)}{\operatorname{Im}(k)}$, 表示共振模式的振幅衰退到原来的 e^{-1} 时所需要的振荡周期。共振模式关于 α 与 β 也是连续存在的。

(3) 若 k 为实数且满足 $k > \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, 则布洛赫模是一个连续谱束缚态。连续谱束缚态可以看成是一个 Q 因子为无穷大的共振, 只在离散的 (α, β) 点上存在, 在连续谱束缚态的附近, 通过调整 α 与 β 可以获得任意大小 Q 因子的共振。由于 k 为实数等价于条件 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} E(r) = 0$, 在展开式(2)中, 若 $\operatorname{Im}(\gamma_{m,n}) \geq 0$, 则 $e^{ik_{m,n} \cdot r}$ 可

向 $z \rightarrow \infty$ 辐射能量, (m, n) 是对应一个开放的辐射通道。若 $\operatorname{Im}(\gamma_{m,n}) < 0$, 则 $e^{ik_{m,n} \cdot r}$ 在 $|z| \rightarrow \infty$ 时衰退到零, 对应一个关闭的辐射通道。若 $\operatorname{Re}(k) > \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, 则至少有 $\operatorname{Im}(\gamma_{0,0}) \geq 0$, 即 $(0, 0)$ 处辐射通道是开放的。记 Z_0 表示所有开放的辐射通道, 即 $Z_0 = \{(m, n) | \operatorname{Im}(\gamma_{m,n}) \geq 0\}$, 则条件 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} E(r) = 0$ 等价于

$$d_{m,n}^{\pm} = 0, \quad \forall (m, n) \in Z_0 \quad (3)$$

式(3)是布洛赫模的一个附加条件, 在一般情况下, 连续谱束缚态不容易存在。

3 对称保护连续谱束缚态

当光子晶体平板具有旋转对称性时, 可能存在对称保护连续谱束缚态。下面给出具有 C_n 旋转对称的光子晶体平板中对称保护连续谱束缚态的定义, 并分析其关于对称性的依赖关系。利用旋转对称性下布洛赫模的性质, 将连续谱束缚态的存在性问题转变为旋转矩阵的特征值是否与一个简单代数方程的解相同的问题; 其次, 给出了 C_4 旋转对称的结构中连续谱束缚态存在时所对应的条件; 然后, 证明了破坏 C_4 旋转对称保持 C_2 旋转对称时, 连续谱束缚态依然存在;

具有 C_n 旋转对称性结构的介电函数 $\varepsilon(r)$ 满足条件

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(T^{-1}r)$$

其中, $T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 表示旋转矩阵, $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, 只

考虑 $n=2$ 与 $n=4$ 的情况。其理论可推广到 $n=3$ 与 $n=6$ 的情况。 C_n 旋转对称光子晶体平板中的布洛赫模具有以下性质^[24]: 若 $E(r) = \Phi(r) e^{ik \cdot r}$ 是一个对应于波矢 $k = (\alpha, \beta, 0)$ 和波速 k 的布洛赫模, 则 $TE(T^{-1}r)$ 是一个对应于波矢 Tk 和波速 k 的布洛赫模。

特别地, 取 $\alpha = \beta = 0$, 即 $k = (0, 0, 0)$, 有 $Tk = k$, 此时 $E(r)$ 与 $TE(T^{-1}r)$ 是对应同一个波矢与波速的两个布洛赫模。若特征值问题是非退化的, 则 $E(r)$ 与 $TE(T^{-1}r)$ 线性相关, 即存在常数 τ 使得:

$$TE(T^{-1}r) = \tau E(r) \quad (4)$$

由于任何结构旋转 n 次 $\frac{2\pi}{n}$ 角度 (即 2π) 后都不变, 有

$T^n = I$, 其中 I 表示单位算子。所以有 $\tau^n = 1$, 即 $\tau = e^{\frac{2\pi i j}{n}}$, $j=0, 1, 2, \dots, n-1$ 。更具体地, 当 $n=2$ 时, $\tau = \pm 1$; 当 $n=4$ 时, $\tau = \pm 1, \pm i$ 。注意到 τ 的取值对应于 C_n 点群的不可约表示的特征。设布洛赫模的波矢为 $k = (0, 0, 0)$ 且频率满足 $0 < \operatorname{Re}(k) \sqrt{\varepsilon_0} < \frac{2\pi}{L}$, 即只有 $(0, 0)$ 处辐射通道是开放的, 则当 $n=2$ 时, 对应于 $\tau=1$ 以及当 $n=4$ 时, 对

应于 $\tau = \pm 1$ 的布洛赫模一定是连续谱束缚态,称为对称保护连续谱束缚态。

在上述条件下,布洛赫模是一个连续谱束缚态的充要条件是 $d_{0,0}^+ = 0$ 。下面证明当 $n=2$ 时, $\tau=1$ 以及当 $n=4$ 时, $\tau = \pm 1$, 有 $d_{0,0}^+ = 0$ 。

将展开式(2)代入条件式(4)得:

$$Td_{0,0}^+ = \tau d_{0,0}^+ \quad (5)$$

令, $d_{0,0}^+ = [d_x^+, d_y^+, d_z^+]^T$, $\hat{T} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, $d_{\perp}^+ = [d_x^+, d_y^+]^T$ 表示 $d_{0,0}^+$ 的 x 与 y 分量所构成的向量。由 $d_{0,0}^+ \cdot k_{0,0}^+ = 0$ 且 $\alpha = \beta = 0$, 知 $d_z^+ k = 0$, 即 $d_z^+ = 0$ 。所以 $d_{0,0}^+ = 0$ 等价于 $d_{\perp}^+ = 0$ 。由式(5)得:

$$\hat{T}d_{\perp}^+ = \tau d_{\perp}^+$$

若 τ 不是 $\hat{T}$ 的特征值,则必有 $d_{\perp}^+ = 0$ 。当 $n=2$ 时, $\hat{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\hat{T}$ 只有一个特征值 -1 。所以当 $\tau=1$ 时, 有 $d_{\perp}^+ = 0$ 。当 $n=4$ 时, $\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 此时 $\hat{T}$ 的特征值为 $\pm i$ 。所以当 $\tau = \pm 1$ 时有 $d_{\perp}^+ = 0$ 。

由上面的证明过程可知,条件 $d_{0,0}^+ = 0$ 是由 C_n 对称性所保证的。在具有 C_4 旋转对称的结构中,对称保护连续谱束缚态对应的 $\tau=1$ 或 -1 。注意到无论是 $\tau=1$ 还是 -1 , 都有 $\tau^2 = 1$, 即这些连续谱束缚态也同时由 C_2 旋转对称所保护。有以下结论:

具有 C_4 旋转对称结构中的对称保护连续谱束缚态都是由 C_2 旋转对称所保护的,即破坏 C_4 旋转对称,保持 C_2 旋转对称,这些连续谱束缚态依然存在。

4 拓扑电荷

连续谱束缚态对应于动量空间中辐射场的漩涡,因此其存在性与拓扑性质有关。前面提到了布洛赫模是一个连续谱束缚态的充要条件是 $d_{0,0}^+ = 0$, 通过 $d_{0,0}^+$ 的 x 与 y 分量可以计算得到辐射场的极化角。极化椭圆的长轴与 y 轴的夹角称之为极化角度,记为 θ 。 θ 可以看成是 α 与 β 的函数,即 $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ 。在 $\alpha\beta$ 平面上,任意给定一条曲线 Γ , 让 (α, β) 沿着 Γ 绕一圈重新定义 θ , 使其为连续函数。拓扑电荷的定义为

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \nabla \theta \cdot \vec{n} ds$$

拓扑电荷 q 表示 $\alpha\beta$ 上的一点绕 Γ 走一圈后,极化角度旋转了 q 圈, q 是一个整数。若 Γ 所围区域内无圆极化与连续谱束缚态,则 $q=0$; 若 Γ 所围区域内有且仅有一个连续谱束缚态则 $q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; 若 Γ 所围区域内只有一个圆极化,则 $q = \pm \frac{1}{2}$ 。需要注意的是圆极化和连续谱束缚态是 $\alpha\beta$ 平面中的一个极化奇点。

5 数值实验

由于辐射边界条件下的特征值问题定义在无穷区域上,无法用数值方法来计算。所以在实际计算连续谱束缚态的时候,可以用完美匹配层的方法将无穷区域截断为有限区域。用完美匹配层截断后的特征值问题是原特征值问题的一个近似,它们之间的误差关于完美匹配层的参数 σ_* 、 $H_2 - H_1$ (即完美匹配层的厚度)指数衰退到零。所以只需要选择合适的 σ_* 与 $H_2 - H_1$, 便可以得到足够精确的特征解,即可以计算得到连续谱束缚态的频率。

相对于拟周期边界条件,在有限元方法中周期边界条件更容易实现。用有限元方法求解偏微分方程最重要的是弄清楚解空间和变分形式。在用有限元求解时,变分问题被近似为下列代数方程的特征值问题:

$$\mathbf{A}\Phi = k^2 \mathbf{B}\Phi$$

其中, $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为矩阵。

考虑如图 1 所示的具有正方形晶格空气柱的光子晶体平板,其俯视图如图 2 所示。平板是由空气所包围的。平板的厚度为 $2D = 0.5L$, 介电常数为 $\epsilon_1 = 4$, 空气中的介电常数 $\epsilon_0 = 1$ 。空气柱体横截面参数分别为

$w = 0.2L$, $a = \frac{w}{2}$ 。若 $h_1 = h_2$, 则结构具有 C_4 旋转对称性。

若 $h_1 \neq h_2$, 则结构只有 C_2 旋转对称性。为了验证前面得到的理论,用完美匹配层^[27]的方法将无穷区域上的特征值问题转化为有限区域上的特征值问题,并用有限元^[28]的方法求解。数值计算时,需要用完美匹配层方法将 z 方向截断为 $[-H_2, H_2]$, 如图 3 所示。取完美匹配

层的厚度为 $H_2 - H_1 = L$, $\sigma_* = 18 \times \frac{m+1}{\beta_0(H_2 - H_1)}$ ^[29], $\beta_0 =$

$\sqrt{k_0^2 \epsilon_0 - \alpha^2 - \gamma^2}$, $m=3$ 。其中 $H_1 - D$ 表示完美匹配层的远近。采用基于 FreeFEM 软件的有限元方法来数值求解特征值问题,以计算对称保护连续谱束缚态的频率。计算时在平板的每个边界的离散点个数取 $N=10$, PML 层的离散点个数也取 $N=10$ 。考虑如此复杂结构的原因是为了避免其他对称性(例如镜面反射对称)对结果的影响。

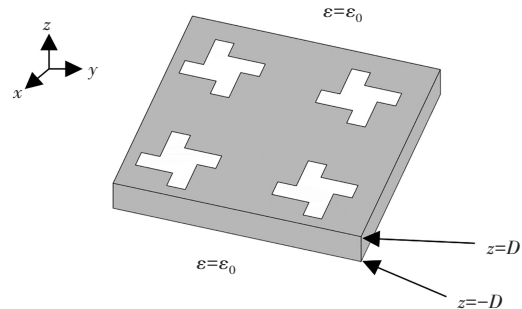


图 1 光子晶体平板结构图

Fig. 1 Structure diagram of photonic crystal plates

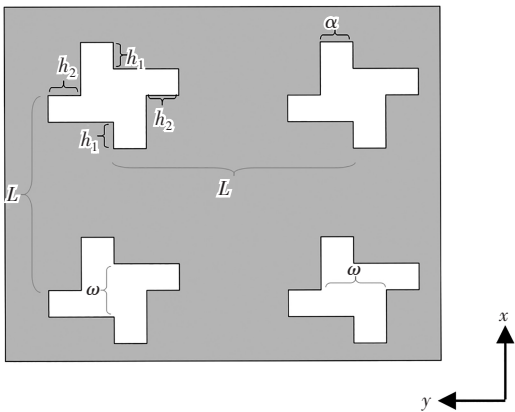


图 2 光子晶体平板结构的俯视图

Fig. 2 Top view of the photonic crystal flat plate structure

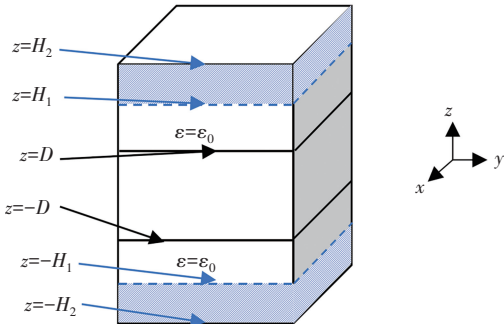


图 3 PML 截断后的计算区域

Fig. 3 Computation region after PML truncation

若取 $h_1 = h_2 = 0.15L$, 这时结构具有 C4 旋转对称性。通过数值计算, 可以找到 5 个 TM-Like 模式下 (即 E_z 是 z 变量的奇函数) 的对称保护连续谱束缚态, 其频率如表 1 的第 2 列所示。图 4(a)—图 8(a) 分别是 SPBIC1—SPBIC5 在具有 C4 旋转对称的结构中 $\log_{10} Q$ 关于 α 与 β 的值。可以通过观察得到当 $(\alpha, \beta) \rightarrow (0, 0)$ 时, Q 的值趋近于无穷大。图 4(c)—图 8(c) 分别是 SPBIC1 到 SPBIC5 在 C4 旋转对称结构中的磁场 z 分量 H_z 在 $z=0$ 时的场图。从下面的场图可以观察得到, SPBIC1 与 SPBIC5 对应于 $\tau=1$, 其他 3 个对称保护连续谱束缚态对应于 $\tau=-1$ 。表 1 的最后一列表示为对称保护连续谱束缚态的拓扑电荷。

若保持 $h_1 = 0.15L$, 令 $h_2 = 0.1L$, 参数扰动后结构的 C4 旋转对称性被破坏, 但保持了 C2 旋转对称性。通过数值计算表明, SPBIC1—SPBIC5 在扰动后的结构中依然存在, 其频率如表 1 的第三列所示, 可以发现两种结构下连续谱束缚态的频率近乎相等。图 4(b)—图 8(b) 分别是 SPBIC1 到 SPBIC5 在具有 C2 旋转对称的结构中 $\log_{10} Q$ 关于 α 与 β 的值。可以通过观察得到当 $(\alpha, \beta) \rightarrow (0, 0)$ 时, Q 的值趋近于无穷大, 并且可以发现两种结构下, $\log_{10} Q$ 关于 α 与 β 的值很相近。图 4(d)—

图 8(d) 分别代表的是扰动后 SPBIC1—SPBIC5 在 C2 旋转对称结构中的磁场 z 分量 H_z 在 $z=0$ 时的场图。从下面的场图可以观察得到, SPBIC1 与 SPBIC5 仍然对应于 $\tau=1$, 其他 3 个对称保护连续谱束缚态也依旧对应于 $\tau=-1$ 。通过对比, 可以发现两种结构下的场图几乎一模一样, 并且可以发现结构扰动不改变对称保护连续谱束缚态的拓扑电荷。

表 1 C4 与 C2 旋转对称结构中对称保护连续谱束缚

态的频率 $\frac{\omega L}{2\pi c}$ 的值

Table 1 Value of $\frac{\omega L}{2\pi c}$ the frequency of symmetrically protected

bound states in the continuum in the rotationally symmetric structure of C4 and C2

	C4	C2	q
SPBIC1	0.615 9	0.610 1	+1
SPBIC2	0.636 7	0.628 2	-1
SPBIC3	0.856 9	0.848 5	-1
SPBIC4	0.938 3	0.933 8	-1
SPBIC5	0.951 4	0.949 2	+1

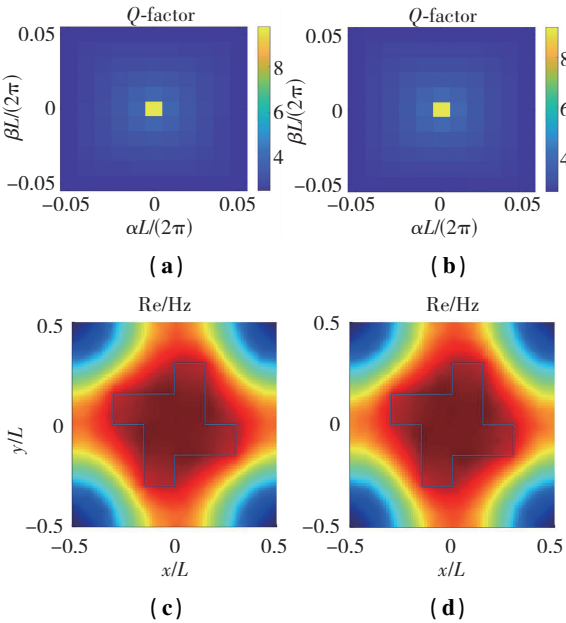
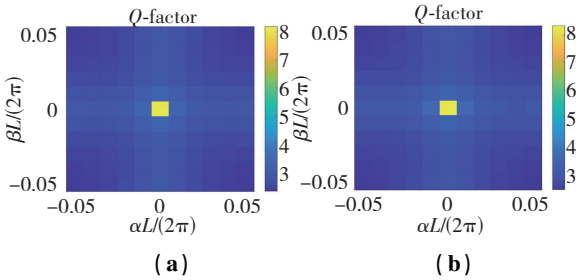
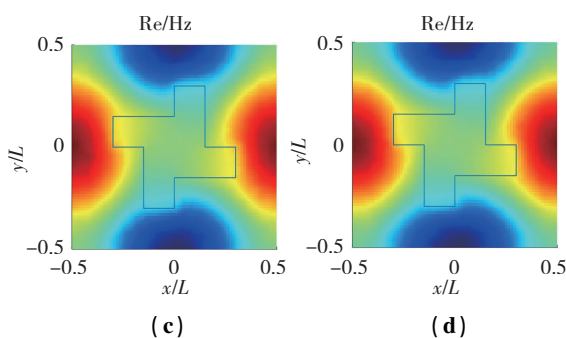
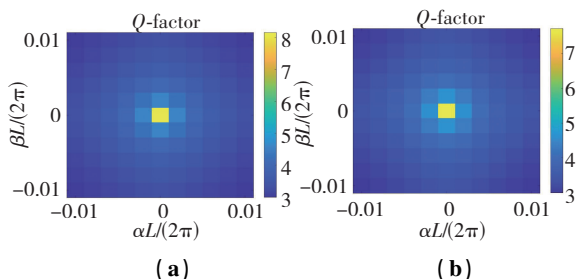
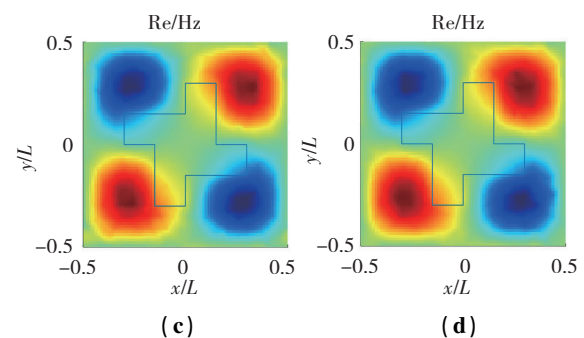
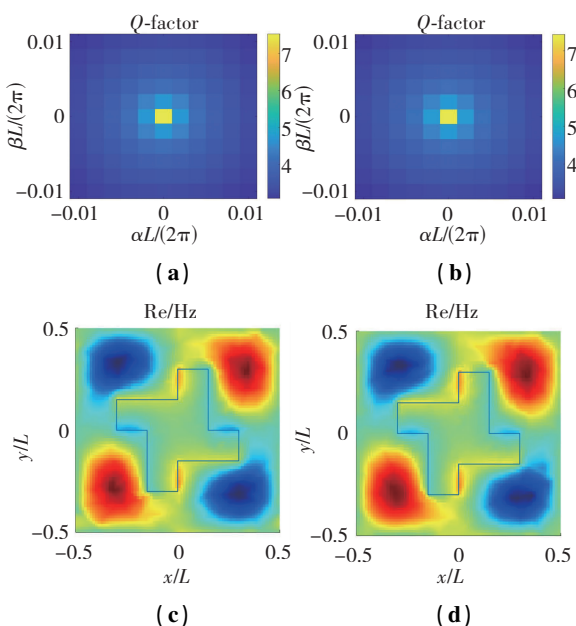
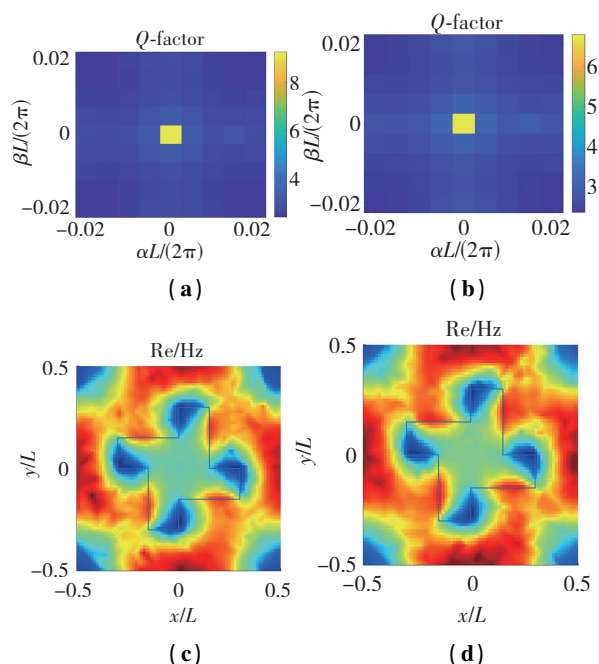


图 4 SPBIC1 的 Q 因子图和场图

Fig. 4 Q factor diagram and field diagram of SPBIC1



图 5 SPBIC2 的 Q 因子图和场图Fig. 5 Q factor diagram and field diagram of SPBIC2图 6 SPBIC3 的 Q 因子图和场图图 7 SPBIC4 的 Q 因子图和场图Fig. 6 Q factor diagram and field diagram of SPBIC3图 8 SPBIC5 的 Q 因子图和场图Fig. 7 Q factor diagram and field diagram of SPBIC4图 8 SPBIC5 的 Q 因子图和场图Fig. 8 Q factor diagram and field diagram of SPBIC5

经过数值计算,从扰动前后不同结构下对称保护连续谱束缚态的频率以及对比分析它们的 Q 因子图和场图可以观察得到具有 $C4$ 旋转对称结构的光子晶体平板中的对称保护连续谱束缚态都是由 $C2$ 旋转对称性所保护的。即若破坏 $C4$ 旋转对称但保持 $C2$ 旋转对称,原有的对称保护连续谱束缚态依然存在。进一步反映了 $C4$ 旋转对称与 $C2$ 旋转对称之间的依赖关系。

6 结束语

构建了系统分析连续谱束缚态关于旋转对称性的依赖理论,并且重点研究了 $C4$ 旋转对称的情况,分别从理论和数值两个方面证明了具有 $C4$ 旋转对称光子晶体平板中的对称保护连续谱束缚态都是由 $C2$ 旋转对称性所保护的。即破坏 $C4$ 旋转对称但是保持 $C2$ 旋转对称性,原对称保护连续谱束缚态依然存在。

虽然只考虑了 $C4$ 旋转对称光子晶体平板中的对称保护连续谱束缚态,但提出的理论和数值分析方法都可以用于研究具有 $C6$ 旋转对称的光子晶体平板,不过由于此结构同时具有 $C2$ 与 $C3$ 旋转对称性,对称保护连续谱束缚态与对称性的依赖关系可能会更加复杂。提出的理论分析方法也可以适用于所有旋转对称的情况。由于是从麦克斯韦方程组出发,没有引入模型近似,并且分析过程根据严格。研究结果有利于深入理解对称保护连续谱束缚态的性质,为其理论分析和实际应用提供指导。

参考文献(References):

- [1] HSU C W, ZHEN B, STONE A D, et al. Bound states in the continuum[J]. *Nature Reviews Materials*, 2016, 1(9): 1—13.
- [2] HSU C W, ZHEN B, LEE J, et al. Observation of trapped light within the radiation continuum[J]. *Nature*, 2013, 499(7457): 188—191.
- [3] MARINICA D C, BORISOV A G, SHABANOV S V. Bound states in the continuum in photonics[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(18): 1—4.
- [4] NEUMANN J, WIGNER E P. Über merkwürdige diskrete Eigenwerte[M]. Berlin: Heidelberg: Springer, 1993.
- [5] FRIEDRICH H, WINTGEN D. Interfering resonances and bound states in the continuum[J]. *Physical Review A*, 1985, 32(6): 3231—3239.
- [6] YUAN L, LU Y Y. Bound states in the continuum on periodic structures surrounded by strong resonances[J]. *Physical Review A*, 2018, 97(4): 1—8.
- [7] AZZAM S I, KILDISHEV A V. Photonic bound states in the continuum: from basics to applications[J]. *Advanced Optical Materials*, 2020, 9(1): 1469—1477.
- [8] KODIGALA A, LEPETIT T, GU Q, et al. Lasing action from photonic bound states in continuum[J]. *Nature*, 2017, 541(7636): 196—199.
- [9] JIN J, YIN X, NI L, et al. Topologically enabled ultrahigh-Q guided resonances robust to out-of-plane scattering[J]. *Nature*, 2019, 574(7779): 501—504.
- [10] HAN S, CONG L, SRIVASTAVA Y K, et al. All-dielectric active terahertz photonics driven by bound states in the continuum[J]. *Advanced Materials*, 2019, 31(37): 1—28.
- [11] BONNET-BENDHIA A S, STARLING F. Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problem[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1994, 17(5): 305—338.
- [12] VENAKIDES S, SHIPMAN S P. Resonance and bound states in photonic crystal slabs[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2003, 64(1): 322—342.
- [13] SHIPMAN S, VOLKOV D. Guided modes in periodic slabs: existence and nonexistence[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2007, 67(3): 687—713.
- [14] LEE J, ZHEN B, CHUA S L, et al. Observation and differentiation of unique high-Q optical resonances near zero wave vector in macroscopic photonic crystal slabs[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(6): 1—5.
- [15] HU Z, LU Y Y. Standing waves on two-dimensional periodic dielectric waveguides[J]. *Journal of Optics*, 2015, 17(6): 065601—065608.
- [16] YANG Y, PENG C, LIANG Y, et al. Analytical perspective for bound states in the continuum in photonic crystal slabs[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(3): 1—5.
- [17] YUAN L, LU Y Y. Propagating bloch modes above the lightline on a periodic array of cylinders[J]. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2017, 50(5): 1—5.
- [18] KANG M, ZHANG S, XIAO M, et al. Merging bound states in the continuum at off-high symmetry points[J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126(11): 1—7.
- [19] YUAN L, LU Y Y. Conditional robustness of propagating bound states in the continuum in structures with two-dimensional periodicity[J]. *Physical Review A*, 2021, 103(4): 1—10.
- [20] OVERVIG A C, MALEK S C, CARTER M J, et al. Selection rules for quasibound states in the continuum[J]. *Physical Review B*, 2020, 102(3): 1—30.
- [21] YODA T, NOTOMI M. Generation and annihilation of topologically protected bound states in the continuum and circularly polarized states by symmetry breaking[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(5): 1—12.
- [22] LI S, ZHOU C, LIU T, et al. Symmetry-protected bound states in the continuum supported by all-dielectric metasurfaces[J]. *Physical Review A*, 2019, 100(6): 1—6.
- [23] LI L, LI Y, ZHU Y, et al. Rotational symmetry of photonic bound states in the continuum[J]. *Scientific Reports*, 2020, 10(1): 1—8.
- [24] SAKODA K. Optical properties of photonic crystals[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2004.
- [25] YUAN L, LU Y Y. Parametric dependence of bound states in the continuum on periodic structures[J]. *Physical Review A*, 2020, 102(3): 1—9.
- [26] YUAN L, LUO X, LU Y Y. Parametric dependence of bound states in the continuum in periodic structures: vectorial cases[J]. *Physical Review A*, 2021, 104(2): 1—11.
- [27] LU Y Y. Minimizing the discrete reflectivity of perfectly matched layers[J]. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2006, 18(3): 487—489.
- [28] LI Y J, JIN J M. Fast full-wave analysis of large-scale three-dimensional photonic crystal devices[J]. *JOSA B*, 2007, 24(9): 2406—2415.
- [29] ZHEN B, HSU C W, LU L, et al. Topological nature of optical bound states in the continuum[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 113(25): 1—20.

责任编辑:田 静