

基于 Kalman 滤波和 LQG 控制的起重机控制研究

魏炳胜, 许安定

上海理工大学 机械工程学院, 上海 200093

摘要:针对双载荷轨道起重机在抬升重物时的消摆时间长、定位速度慢的问题,提出采用最优控制理论和卡尔曼滤波算法,设计线性高斯二次型(Linear Quadratic Gaussian, LQG)控制器并对其进行残余振动抑制。首先,运用 Lagrange 方程建立起重机系统的非线性动力学方程,其次,运用雅可比矩阵将非线性方程线性化,得到系统的状态空间方程;通过证明线性系统的可控性和可观性,选择合适的权函数,设计最优二次型线性调节器(Linear Quadratic Regulator, LQR)和最优状态估计器来得到 LQG 控制器,通过建立相关模型的 Simulink 控制系统仿真表明:设计的 LQG 控制器能有效衰减残余振动;通过与 PID 控制器对比分析,所提出的 LQG 控制器能更有效衰减残余振动幅值,振动的超调量更小,所需的稳态时间更短,验证了该控制策略的有效性和可行性。

关键词:起重机;振动抑制;LQR 控制;卡尔曼滤波;LQG 控制

中图分类号:TP273 **文献标识码:**A **doi:**10.16055/j.issn.1672-058X.2023.0003.003

Research on Crane Control Based on Kalman Filter and LQG Control

WEI Bingsheng, XU Anding

School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China

Abstract: Aiming at the problems of long swing elimination time and slow positioning speed when lifting heavy objects, a Linear Quadratic Gaussian (LQG) controller based on optimal control theory and Kalman filter algorithm was proposed to suppress residual vibration. Firstly, the Lagrange equation was used to establish the nonlinear dynamic equation of the crane system. Secondly, the Jacobian matrix was used to linearize the nonlinear equation, and the state space equation of the system was obtained. By proving the controllability and observability of the linear system, selecting the appropriate weight function, and designing the optimal Linear Quadratic Regulator (LQR) and the optimal state estimator, the LQG controller was obtained. The simulation of Simulink control system with relevant models shows that the designed LQG controller can effectively attenuate the residual vibration. Compared with PID controller, the proposed LQG controller can attenuate the residual vibration amplitude more effectively, the overshoot of vibration is smaller, and the required steady-state time is shorter. The effectiveness and feasibility of the control strategy were verified.

Keywords: crane; vibration suppression; LQR control; Kalman filtering; LQG control

1 引言

近年来,起重机广泛应用于综合施工平台上。起重机作业依赖于吊车司机的操作经验,操作不当、加减速运动及外界干扰等都能造成负载扰动。这不仅降低了工作效率,还引起了安全隐患。由于起重机特殊的

使用环境,其在运行过程中的稳定性和定位准确性是起重机作业的重要因素^[1-3]。如何抑制起重机作业过程中的振动问题,是国内外学者的研究热点^[4-5]。

传统起重机大多数使用双载荷搬运货物,这能提高工作效率,但避免不了振动问题。目前,大多数学者

收稿日期:2022-01-17 修回日期:2022-03-15 文章编号:1672-058X(2023)03-0020-07

作者简介:魏炳胜(1998—),男,江苏泰州人,硕士研究生,从事机器人控制研究。

引用格式:魏炳胜,许安定.基于 Kalman 滤波和 LQG 控制的起重机控制研究[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2023,40(3):20—26.

WEI Bingsheng, XU Anding. Research on crane control based on Kalman filter and LQG control [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2023, 40(3): 20—26.

针对起重机振动问题采用了一些行之有效的控制策略。传统的末端定位方法采用 PID 控制、模糊控制和滑模控制。陈鹤等^[6]充分考虑系统的物理约束和控制性能指标,提出了带有状态约束的吊车最优轨迹规划方法。开环控制方法虽然易于实现,但对参数不确定性和外界干扰十分敏感,设计出的控制器鲁棒性较差。针对这一现象, MAR 等^[7]提出了输入整形和 PID 控制相结合的方案,克服了输入整形器抗干扰能力差的局限; SUN 等^[8]设计了一种饱和非线性输出反馈控制器和一种非线性 PID 控制器,有效抑制了起重机振动定位问题,然而此闭环控制方法需要利用所有系统状态的实时反馈信息进行控制,在实际中难以实现;文献^[9]基于模糊 PID 控制进行起重机端部定位控制,达到闭环效果,但结果证明所需的稳态时间较长;吴朝霞等^[10]针对起重机提出了滑模控制,但滑模控制避免不了力矩的抖振效果。

综合以上研究成果,本文基于起重机模型简化图运用 Lagrange 方程进行动力学建模,然后利用雅可比矩阵^[11]将非线性系统线性化,再证明系统的可控性和可观性,选择合适的加权函数,设计最优二次型线性调节器和最优状态估计器来得到 LQG 控制器。在 Matlab 中的 simulink 中建立相关模型,在给定系统阶跃信号后,仿真结果表明:LQG 控制器比 PID 控制器能更有效地抑制残余振动,超调量更小,稳态时间更短,验证了该控制策略的有效性和可行性。

2 系统描述

起重机模型简化图如图 1 所示。该系统由一台仅在一维轨道上移动的起重机组成,起重机的总质量为 M ,且其在轨道上移动时不存在摩擦力; F 为系统的外界输出力;此外,有两个负载悬挂在连接至起重机的电缆上,载荷的质量分别为 m_1 和 m_2 ,电缆的长度分别为 l_1 和 l_2 。

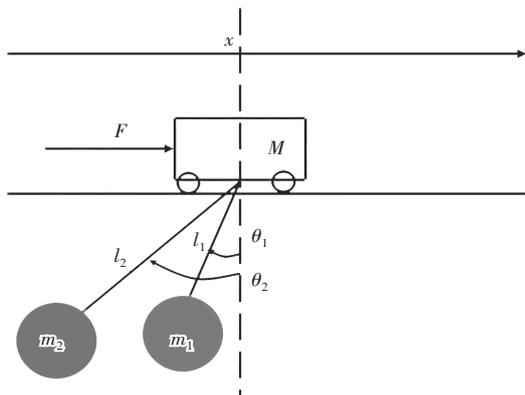


图 1 起重机模型简化图

Fig. 1 Simplified diagram of crane model

为方便研究,本文对双载荷起重机模型做出以下假设:起重机与轨道之间无摩擦;所有质量都具有均匀的密度;起重机移动只有一个自由度;每个物体的质心位于其几何中心;系统在 2D 中建模,不考虑杆的质量和厚度;起重机的重心位于悬挂点处。

3 系统的设计与分析

3.1 模型定义

首先将起重机和两个载荷的动能和势能表述出来,再运用 Lagrange 方程建立起起重机的动力学方程。其中 $r_1, r_2, \dot{r}_1, \dot{r}_2$ 分别表示载荷 m_1, m_2 的位置和速度, i, j 均为虚数单位。

对于载荷质量 m_1 , 有

$$r_1(t) = (x - l_1 \sin \theta_1) i + (l_1 \cos \theta_1) j$$

$$\dot{r}_1(t) = (\dot{x} - l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1) i + (-l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1) j$$

m_1 动能为

$$T_1 = KE = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) =$$

$$\frac{1}{2} m [(\dot{x} - l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2]$$

m_1 势能为

$$V_1 = PE_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1$$

对于载荷质量 m_2 , 有

$$r_2(t) = (x - l_2 \sin \theta_2) i + (l_2 \cos \theta_2) j$$

$$\dot{r}_2(t) = (\dot{x} - l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) i + (-l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) j$$

m_2 动能为

$$T_2 = KE = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) =$$

$$\frac{1}{2} m [(\dot{x} - l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2]$$

m_2 势能为

$$V_2 = PE_2 = -m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

对于起重机 M , M 的动能为

$$T_3 = KE = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

M 的势能为

$$V_3 = PE_3 = 0$$

系统的总能量由下式给出:

$$L = (T_1 + T_2 + T_3) - (V_1 + V_2 + V_3) =$$

$$\frac{1}{2} [M \dot{x}^2 + m_1 (\dot{x} - l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + m_1 (-l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 +$$

$$m_2 (\dot{x} - l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + m_2 (-l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2] -$$

$$[-m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2]$$

由 Lagrange 方程可得:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (3)$$

其中,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m_1(\dot{x} - l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1) + m_2(\dot{x} - l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x} + m_1(\ddot{x} - (l_1\ddot{\theta}_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1) + m_2(\ddot{x} - (l_2\ddot{\theta}_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2))) \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

将式(4)、式(5)代入式(1),得出关于 x 的表达式:

$$F = \ddot{x}(M + m_1 + m_2) - m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \quad (6)$$

对于 θ_1 , 有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 - m_1 \dot{x} l_1 \cos \theta_1 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 \ddot{x} l_1 \cos \theta_1 + m_1 \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = m_1 \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 \quad (8)$$

将式(7)、式(8)代入式(2),得出关于 θ_1 的表达式:

$$0 = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_1 \ddot{x} l_1 \cos \theta_1 + m_1 \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - m_1 \dot{x} l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + m_1 g l_1 \sin \theta_1$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\ddot{x} \cos \theta_1}{l_1} - \frac{g \sin \theta_1}{l_1} \quad (9)$$

由式(3)可得出关于 θ_2 的表达式:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\ddot{x} \cos \theta_2}{l_2} - \frac{g \sin \theta_2}{l_2} \quad (10)$$

将式(9)、式(10)代入式(6)得:

$$\ddot{x} =$$

$$\frac{F - m_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1 - m_2 g \sin \theta_2 \cos \theta_2 - m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2}{M + m_1 \sin^2 \theta_1 + m_2 \sin^2 \theta_2}$$

3.2 线性化

为方便控制律的设计,本文需要在设计控制器之前,对非线性系统进行线性化设计。对于起重机模型,系统的非线性状态空间表达式为

$$\dot{X}(t) = F(X, U)$$

$$Y(t) = H(X, U)$$

其中, Y 是状态 X 和输入 U 的函数。对于给定的起重机系统,由上述所得的非线性动力学方程可得其状态空间如下所示:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{F - m_1 g \sin \theta_1 \cos \theta_1 - m_2 g \sin \theta_2 \cos \theta_2 - m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2}{M + m_1 \sin^2 \theta_1 + m_2 \sin^2 \theta_2} \\ \dot{\theta}_1 \\ \frac{\ddot{x} \cos \theta_1}{l_1} - \frac{g \sin \theta_1}{l_1} \\ \dot{\theta}_2 \\ \frac{\ddot{x} \cos \theta_2}{l_2} - \frac{g \sin \theta_2}{l_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

对于非线性系统,一般可以采用小角度线性化和雅可比线性化。本文将采用雅可比进行线性化:

$$A_F = \nabla_x F(X(t), U(t))$$

$$B_F = \nabla_u F(X(t), U(t))$$

$$C_H = \nabla_x H(X(t), U(t))$$

$$D_H = \nabla_u H(X(t), U(t))$$

平衡点处的雅可比矩阵为

$$(X_0, \theta_{10}, \theta_{20}) = (0, 0, 0)$$

相应的一阶导数为

$$(\dot{X}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = (0, 0, 0)$$

由此可得:

$$A_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix}$$

其中, $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ 为等式(11)右侧向量的各个元素。令输入 $U = F$, 则 B_F 为

$$B_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U} & \frac{\partial f_2}{\partial U} & \frac{\partial f_3}{\partial U} & \frac{\partial f_4}{\partial U} & \frac{\partial f_5}{\partial U} & \frac{\partial f_6}{\partial U} \end{bmatrix}^T$$

通过计算各个元素,得到以下矩阵:

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(m_1g)}{M} & 0 & \frac{-(m_2g)}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-((m_1+M)g)}{Ml_1} & 0 & \frac{-(m_2g)}{Ml_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-(m_1g)}{Ml_2} & 0 & \frac{-((m_2+M)g)}{Ml_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{1}{Ml_1} & 0 & \frac{1}{Ml_2} \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

线性状态空间方程可表示为

$$\dot{X} = A_F X + B_F U$$

$$Y = CX + DU$$

其中, $X = [\dot{x} \ \ddot{x} \ \dot{\theta}_1 \ \ddot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \ddot{\theta}_2]^T$, 输入为 $U = F$ 。因此, 给定系统状态空间为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(m_1g)}{M} & 0 & \frac{-(m_2g)}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-((m_1+M)g)}{Ml_1} & 0 & \frac{-(m_2g)}{Ml_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-(m_1g)}{Ml_2} & 0 & \frac{-((m_2+M)g)}{Ml_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml_1} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml_2} \end{bmatrix} F$$

4 可控性和可观性判断

线性系统的可控性可由下列矩阵求出:

$$C = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B]$$

其中, A, B 是根据线性化系统 A_F, B_F 计算的矩阵, 其中 C 中的各个矩阵由下式给出:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 1/(Ml_1) \\ 0 \\ 1/(Ml_2) \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1/M \\ 0 \\ 1/(Ml_1) \\ 0 \\ 1/(Ml_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ -(gm_1)/(M^2l_1) - (gm_2)/(M^2l_2) \\ 0 \\ -(g(M+m_1))/(M^2l_1^2) - (gm_2)/(M^2l_1l_2) \\ 0 \\ -(g(M+m_2))/(M^2l_2^2) - (gm_1)/(M^2l_1l_2) \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} -(gm_1)/(M^2l_1) - (gm_2)/(M^2l_2) \\ 0 \\ -(g(M+m_1))/(M^2l_1^2) - (gm_2)/(M^2l_1l_2) \\ 0 \\ -(g(M+m_2))/(M^2l_2^2) - (gm_1)/(M^2l_1l_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

起重机各个参数大小如表 1 所示。

表 1 起重机参数

Table 1 Crane parameters

参 数	大 小
起重机质量 (M/kg)	1 000
载荷质量 (m_1/kg)	100
载荷质量 (m_2/kg)	100
电缆长度 (l_1/m)	20
电缆长度 (l_2/m)	10

由表内参数, 可算出矩阵 C 为

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.000 & 0 & 0 & -0.147 & 0 & 0 & 0.141 & 7 \\ 1.000 & 0 & 0 & -0.147 & 0 & 0 & 0.141 & 7 & 0 \\ 0 & 0.050 & 0 & 0 & -0.031 & 9 & 0 & 0.022 & 7 \\ 0.050 & 0 & 0 & -0.031 & 9 & 0 & 0.022 & 7 & 0 \\ 0 & 0.100 & 0 & 0 & -0.112 & 7 & 0 & 0.124 & 6 \\ 0.100 & 0 & 0 & -0.112 & 7 & 0 & 0.124 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

根据可控性判据: $\langle A | \text{Im}B \rangle := \sum_{i=1}^n \text{Im}(A^{i-1}B) = R^n$ 。

上述的可控性矩阵 C 的秩为 6, 是行满秩的, 符合可控性判据^[12]。由此可得线性化系统是可控的。

线性系统的可观性可由下列矩阵求出:

$$O = [C \ CA \ CA^2 \ CA^3 \ CA^4 \ CA^5]^T$$

其中, A 是根据线性化系统 A_F 计算的矩阵。对于 $x(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$ 的输出向量集, C 可表示为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

根据可观性判据:

$$\text{rank}[C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T = n$$

上述的可观性矩阵 O 的秩为 6, 是列满秩的, 符合可观性判据。由此可知线性化系统是可观的。

4 LQG 控制器设计

4.1 LQR 控制器

起重机线性状态方程形为

$$\dot{X} = AX + BU$$

其最优二次线性调节器(LQR)的设计属于无限时间状态调节器问题, 性能指标可表示为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [X^T Q X + U^T R U] dt$$

其中, Q 和 R 分别为正定的相关状态变量权矩阵和正定的控制输入量权矩阵。要求确定最优控制 $U^*(t)$, 使性能指标 J 极小。由性能指标求得的最优闭环系统:

$$\dot{X} = (A - BR^{-1}B^T\bar{P})X$$

\bar{P} 满足 Riccati 代数方程 $\bar{P}A + A^T\bar{P} - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} + Q = 0$, 起重机的控制输入为 $U = -kX$, 其中, $k = R^{-1}B^T\bar{P}$ 。

4.2 卡尔曼滤波器

根据系统的可观性可设计一个最优状态观测器, 对于起重机系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gw \\ y &= Cx + Du + Hw + v \end{aligned}$$

其中, w 是过程噪声, v 是观测噪声, G, H 是常系数矩阵, 用来描述 x 中的各部分受到的噪声强度不一致的情况。

假设噪声 w 和 v 符合高斯分布, 且由协方差矩阵可知:

$$E(w w^T) = Q_k, E(v v^T) = R_k, E(w v^T) = N_k$$

对于给定的观测器动态和代价函数:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Du) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

$$\bar{J} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\{x - \hat{x}\} \{x - \hat{x}\}^T)$$

要求确定一个常系数矩阵 L , 使得 \bar{J} 最小。

$$L = (PC^T + \bar{N})\bar{R}^{-1}$$

$$\bar{R} = R_k + HN_k + N_k^T H^T + HQ_k H^T$$

$$\bar{N} = G(Q_k H^T + N_k)$$

同时 P 满足以下 Riccati 代数方程

$$A^T P + PA - (PB + N_k)R_k^{-1}(B^T P + N_k^T) + Q_k = 0$$

以上设计的最优状态观测器 L , 就是 LQG 框架的卡尔曼滤波器。

4.3 LQG 控制器

LQG 控制器通过组合一个最优二次型线性调节器 LQR 和一个最优状态估计器(卡尔曼滤波器)得到的控制器。LQG 控制器框图如图 2 所示。图 2 中 w 是过程噪声, v 是观测噪声。

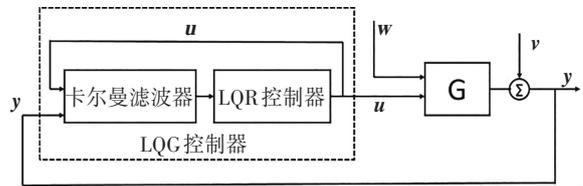


图 2 LQG 控制框图

Fig. 2 Block diagram of LQG control

5 仿真与对比研究

在 Matlab/Simulink 中建立相关模型的控制系統, 经过计算得出 LQR 控制器的参数矩阵为

$$k = [31 \quad 132 \quad 125 \quad 788 \quad 1 \quad 256 \quad 626]$$

根据系统稳定性判据^[13], 求出 $A - Bk$ 的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.7 + 0.7i, \lambda_2 = -0.7 - 0.7i \\ \lambda_3 &= -0.3 + 0.4i, \lambda_4 = -0.3 - 0.4i \\ \lambda_5 &= -0.07 + 0.7i, \lambda_6 = -0.07 - 0.7i \end{aligned}$$

由求得特征值可以看出: 以上特征值均在负半平面, 所以设计的控制器是稳定的。

在 LQR 控制器中, 给定权值 Q 为 $Q = \text{diag}(100, 100, 500, 500, 200, 200)$, 权值 R 取不同值, 初始条件均为 $[3 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0]$, 系统的阶跃响应如图 3 和图 4 所示。

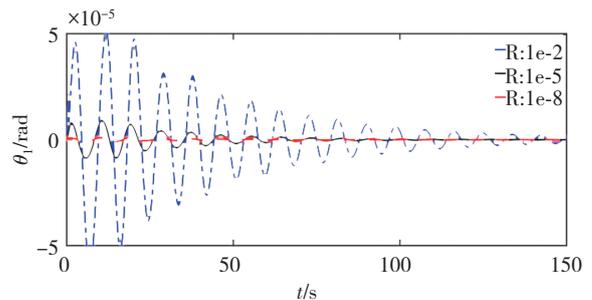


图 3 不同权值下 θ_1 的阶跃响应

Fig. 3 θ_1 step response under different weights

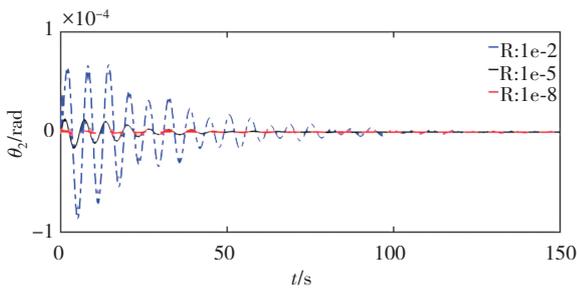


图 4 不同权值下 θ_2 的阶跃响应

Fig. 4 θ_2 step response under different weights

从图 4 中可以看出:权值 Q 不变, R 越小, 系统到达的稳态时间越短, θ_1 、 θ_2 的振动频率有明显减弱, 且振动幅度明显减小, 能达到更好的控制效果。

设计的卡尔曼滤波器的观测误差如图 5 和图 6 所示。

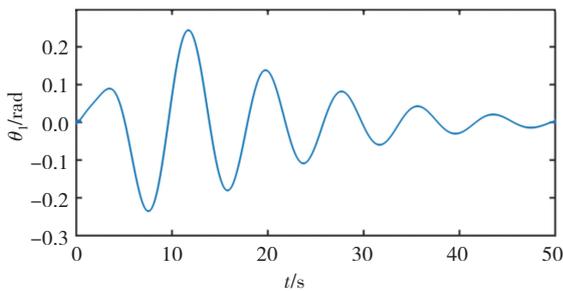


图 5 θ_1 的观测误差

Fig. 5 Observation errors of θ_1

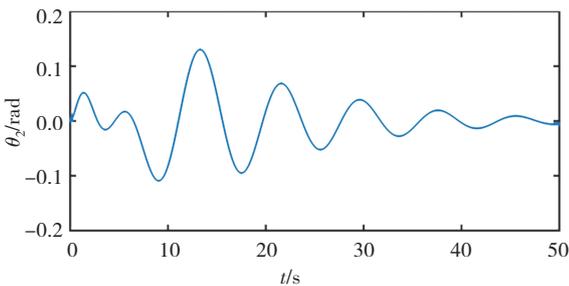


图 6 θ_2 的观测误差

Fig. 6 Observation errors of θ_2

从图 5、图 6 可以看出:在卡尔曼滤波器下, θ_1 和 θ_2 的观测误差均呈现波动状态, 且 θ_1 的观测误差幅值大约为 0.2 rad, θ_2 的观测误差幅值大约为 0.1 rad, 均在 40 s 左右误差为 0。

为了比较对系统状态量的抑振效果, 本文选用 LQG 控制器和常见的 PID^[14] 控制器进行对比分析。3 个状态量的阶跃响应如图 7、图 8 及图 9 所示。

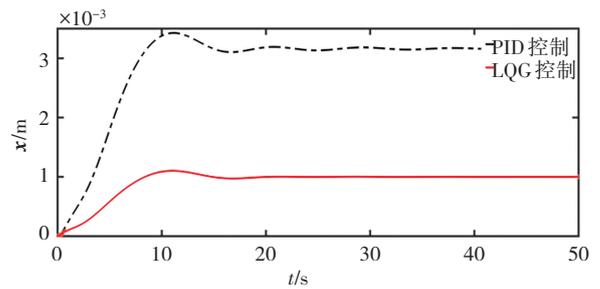


图 7 系统状态量 x 的阶跃响应

Fig. 7 Step response of system state quantity x

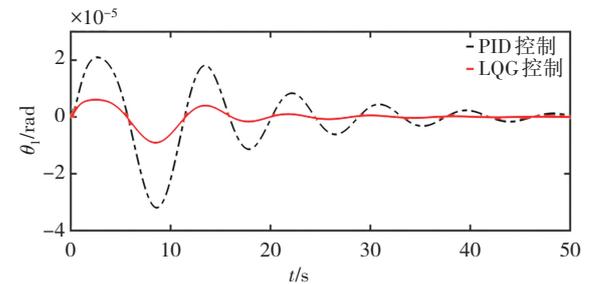


图 8 系统状态量 θ_1 的阶跃响应

Fig. 8 Step response of system state quantity θ_1

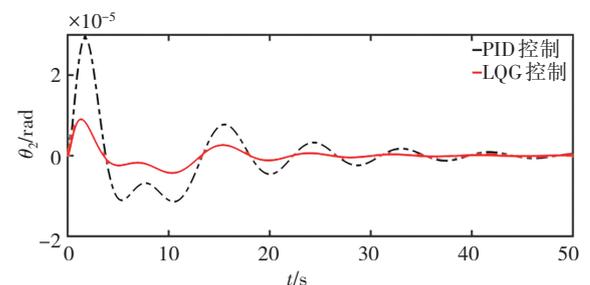


图 9 系统状态量 θ_2 的阶跃响应

Fig. 9 Step response of system state quantity θ_2

由图 7 可得:在给定相同阶跃信号时,在 LQG 控制器下系统状态 x 幅值在 0.001 左右,且几乎不存在超调现象,稳态时间大约在 20 s;而 PID 控制下的系统状态 x 幅值波动较大,稳态时间长,存在明显超调。由图 8 和图 9 可得:本文控制器下的 θ_1 和 θ_2 幅值均小于 1×10^{-5} ,而 PID 控制下的 θ_1 和 θ_2 存在明显的振荡现象,稳态时间大约在 50 s,其控制效果较差。

6 结论与讨论

针对起重机在抬升重物时的振动及端部定位速度慢、稳态时间长等问题,本文提出采用基于最优控制理论和卡尔曼滤波算法,设计了线性高斯二次型控制器对其进行残余振动抑制。

通过 Matlab/Simulink 仿真验证了权值 R 较小时,

所设计的控制器能保证在较短时间内到达稳态,波动幅值小,且具有稳定性。本文设计的卡尔曼滤波器能较好地观测系统状态量,观测误差分别为 0.2 和 0.1 左右。通过与 PID 控制器对比分析可验证:所设计的 LQG 控制器能更有效地衰减残余振动幅值,超调量更小,所需的稳态时间更短。

仿真与试验结果验证了所提控制方法的有效性和可行性。但值得注意的是,LQG 控制器在实际中容易因为建模误差和扰动的存在,导致控制器不稳定,如何提高其稳定裕度仍需要今后继续研究。

参考文献(References):

- [1] 吕宇飞. 基于动力学分析的核环吊运行定位研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2018.
YU Yu-fei. Study on the operation and positioning of nuclear ring crane based on dynamic analysis [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018.
- [2] 李威涛, 郭建胜. 基于变绳长双摆模型的抓斗门座起重机吊重摆动控制研究[J]. 起重运输机械, 2021(18): 24—28.
LI Wei-tao, GUO Jian-sheng. Research on the swing control of the lifting weight of the grab bucket gantry crane based on the variable rope length double pendulum model [J]. Lifting the Transport Machinery, 2021(18): 24—28.
- [3] 孙丽娟. 基于输入整形技术的起重机吊具防摇控制策略研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2020.
SUN Li-juan. Research on anti-sway control strategy of crane spreader based on input shaping technology [D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2020.
- [4] ZHANG Z C, LI L, WU Y Q. Disturbance-observer-based antiswing control of underactuated crane systems via terminal sliding mode[J]. IET Control Theory & Applications, 2018, 12(18): 2588—2594.
- [5] WU Y M, SUN N, CHEN H, et al. Nonlinear time-optimal trajectory planning for varying-rope-length overhead cranes [J]. Assembly Automation, 2018, 38(5): 587—594.
- [6] 陈鹤, 方勇纯, 孙宁, 等. 基于伪谱法的双摆吊车时间最优消摆轨迹规划策略[J]. 自动化学报, 2016, 42(1): 153—160.
CHEN He, FANG Yong-chun, SUN Ning, et al. Pseudospectral method based time optimal anti-swing trajectory planning for double pendulum crane systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(1): 153—160.
- [7] MAR R, GOYAL A, NGUYEN V, et al. Combined input shaping and feedback control for double-pendulum systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 85: 267—277.
- [8] SUN N, WU Y M, FANG Y C, et al. Nonlinear antiswing control for crane systems with double-pendulum swing effects and uncertain parameters: design and experiments [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2018, 15(3): 1413—1422.
- [9] 李帆, 曹旭阳. 桥式起重机模糊 PID 防摇控制方法研究[J]. 起重运输机械, 2021(18): 29—35.
LI Fan, CAO Xu-yang. Research on fuzzy PID anti-shake control method of bridge crane [J]. Lifting the Transport Machinery, 2021(18): 29—35.
- [10] 吴朝霞, 孙林. 基于比例微分-滑模控制的桥式起重机负载防摇控制[J]. 起重运输机械, 2021(19): 77—84.
WU Chao-xia, SUN Lin. Load anti-sway control of bridge crane based on proportional differential-sliding mode control [J]. Lifting the Transport Machinery, 2021(19): 77—84.
- [11] 常晏宁, 王皓. 大尺寸测量场转站的参数勘定方法[J]. 机械设计与研究, 2018, 34(3): 1—6.
CHANG Yan-ning, WANG Hao. Parameter determination method of large-scale measurement field transfer station [J]. Mechanical Design and Research, 2018, 34(3): 1—6.
- [12] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2005.
ZHENG Da-zhong. Linear theory [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Publishing House, 2005.
- [13] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 7 版. 北京: 科学出版社, 2012.
HU Shou-song. Automatic control principle [M]. 7th ed. Beijing: Science Press, 2012.
- [14] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB 仿真: 基本理论与设计方法[M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2019.
LIU Jin-kun. MATLAB simulation of sliding mode variable structure control: basic theory and design method [M]. 3rd Ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2019.

责任编辑:李翠薇