doi:10. 16055/j. issn. 1672-058X. 2022. 0005. 011

变系数时滞脉冲方程周期解的指数稳定性研究

雷　婷, 朱　双
(西南交通大学 数学学院,成都 610031)

摘　要:神经网络属于复杂网络,因其可以描述各种真实的系统受到了大量学者的研究,而稳定性一直是复杂网络的重要问题,研究了一类脉冲神经网络的指数稳定性;建立一个含有分布时滞和脉冲的变系数广义 Halanay 不等式,它有 3 个特点:含有脉冲,可以用来证明不连续系统的稳定性;系数为变系数,对不等式的系数要求更为宽松,应用更加广泛;时滞为分布时滞;利用新建立的广义 Halanay 不等式,结合 Banach 不动点理论,建立简单的 Lyapunov 函数,得到了使脉冲神经网络周期解的存在性和指数稳定性的充分条件,说明了在满足条件时,脉冲时滞神经网络存在惟一周期解,并且周期解指数稳定。

关键词:分布时滞; 脉冲;Halanay 不等式; 周期解
中图分类号:O175. 21　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2022)05-0078-07

0　前　言

神经网络属于复杂网络,因其能够描述各种真实的系统而受到了大量学者研究,从 Gohe 和 Grossberg 提出 Gohe-Grossberg 神经网络系统以来,稳定性一直是复杂网络的重要问题,神经网络通常用微分方程进行建模,而 Halanay 不等式是研究系统稳定性的重要不等式。

由于神经网络是多样性的,研究其稳定性或者同步性时,采用的不等式存在差异。传统的 Halanay 不等式已不能满足需求,许多学者对 Halanay 不等式及其广义形式[1-5]进行了研究,得到了许多有用的结论[6-9]。

Halanay 在 1966 年首次提出 Halanay 不等式[1]:对于 $\tau>0$,若一个标量函数 $f(t)>0$ 满足

$$f'(t)\leqslant -\alpha f(t)+\beta\sup_{s\in[t-\tau,t]}f(s),t\geqslant t_0,\alpha>\beta>0,$$

则存在 $\gamma>0,K>0$ 使得

$$f(t)\leqslant Ke^{-\gamma(t-t_0)},t\geqslant t_0$$

传统的 Halanay 不等式系数为常数,要求衰减因子必须时刻大于增长因子,Liu Bo 在文献[4]将其系数推广为变量

$$D^+x(t)\leqslant -a(t)x(t)+b(t)\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}x(t-s),t\geqslant t_0$$

D^+表示 Dini 导数,$a(t)$,$b(t)$是一般标量函数,当 τ 较小时,可以从时间平均函数条件导出其解渐进稳定性,不用时刻满足衰减因子大于增长因子。

Lin Yusen 在文献[4]的基础上加入脉冲因素[10]

$$\begin{cases}D^+u(t)\leqslant -\alpha(t)u(t)+\beta(t)u(t-\tau),t\geqslant t_0,t\neq t_k\\ u(t_k)\leqslant p_ku(t_k^-),k\in N\\ u(t_0+s)\leqslant\varphi(s),s\in[-\tau,0]\end{cases}$$

收稿日期:2021-08-24;**修回日期**:2021-10-08.
基金项目:国家自然科学基金项目资助(11971394).
作者简介:雷婷(1996—),女,四川德阳人,硕士研究生,从事微分方程的稳定性分析研究.

得到的不等式可以用于不连续的系统的稳定性证明。上述工作最后的结论均与时滞的取值大小有关系。

由于信息传播时存在多种路径,沿着这些传播路径会产生不同的现象,时滞不能用瞬时或者离散来描述,因此出现了一种更为合适的时滞类型——连续的分布时滞[11]。同时,在物理,电子学,信息科学等领域中,信息的传递会在某一时刻由于环境或者其他因素突然发生变化,导致系统的状态发生变化,产生脉冲效应[12]。文章均没有研究不等式同时含有变系数,脉冲以及分布时滞型的情形,故将 Halanay 不等式的时滞推广为分布时滞,常系数推广为变系数,并加入脉冲因素,研究了脉冲分布时滞神经网络系统周期解的稳定性问题。

考虑如下脉冲分布时滞微分不等式形式

$$\begin{cases} D^+x(t)\leqslant -\alpha(t)x(t)+\beta(t)\int_{t-\tau}^{t}x(s)ds, t\geqslant t_0, t\neq t_k \\ x(t_k)\leqslant p_k x(t_k^-), k\in N \\ x(t_0+s)\leqslant \varphi(s), s\in[-\tau,0] \end{cases}$$

利用常数变异法对不等式进行证明,证明不等式的关键在于确定适当的指数。由于影响因素包含分布时滞,脉冲,变系数,不便使用传统的反证法,故文章将指数的取值和系数周期性结合起来。分布时滞,脉冲,变系数满足下文假设 A(1),得到的指数和时滞脉冲,变系数均有关系。不分别考虑每一个因素的影响,而是考虑整体的影响。

神经网络是多样性的,研究其稳定性或同步性时,采用的方式存在差异。文献[14]利用微分积分型不等式证明了时滞神经网络系统的全局稳定性,文献[15]利用含有离散时滞和脉冲类型的不等式证明了转换系统的稳定性,均利用不等式证明系统的稳定性。使用新建立的含有分布时滞和脉冲的变系数广义 Halanay 不等式证明脉冲时滞方程的指数稳定性,利用广义 Halanay 不等式和 Banach 不动点理论,建立简单的 Lyapunov 函数,得到了使脉冲神经网络系统周期解的存在性和指数稳定性的充分条件,具有较强的实用性。

1　预备知识

在这一节中,为了证明广义的 Halanay 不等式,给出表示方法。

$C(X,Y)$ 表示从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射。$PC(J,H)=\{\psi(t):J\to H\}$,$\psi(t)$ 在可数个点($s\in J$)外是连续的,$s\in J$ 时左右极限存在且相等。$J\subset R$ 是间隔的集合,H 是一个完备的度量空间。特别的,$PC\triangleq PC([-\tau,0],R^n])$。

考虑下列含有脉冲和分布时滞的微分不等式

$$\begin{cases} D^+x(t)\leqslant -\alpha(t)x(t)+\beta(t)\int_{t-\tau}^{t}x(s)\mathrm{d}s, t\geqslant t_0, t\neq t_k \\ x(t_k)\leqslant p_k x(t_k^-), k\in N \\ x(t_0+s)\leqslant \varphi(s), s\in[-\tau,0] \end{cases}$$

$x(t)\geqslant 0$ 在 $t\geqslant t_0$ 是连续函数,$\varphi\in PC$,$\alpha(t)$,$\beta(t)\geqslant 0$ 是周期为 T 的周期函数,对于任意的 $k\in N$,存在 q 使得 $t_{k+q}=t_k+T$,$p_{k+q}=p_k$,p_k 是正常数。

2　主要结果

给出下列假设

$$\mathrm{A}(1)\quad \Big(\prod_{t_0\leqslant t_k\leqslant t_0+t}p_k\Big)\mathrm{e}^{-\int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+T}\zeta(r)\mathrm{d}r}=\eta<1$$

$$\zeta(r)=\alpha(r)-\beta(r)\mathrm{e}^{\int_{r-\tau}^{r}\alpha(h)\mathrm{d}h}\Big(\prod_{r-\tau\leqslant t_k\leqslant r}p_k\Big)^{-1}, r\geqslant t_0+\tau$$

接下来,提出引理 1 并对引理 1 进行证明。

引理 1　对于任意 $0<\varepsilon<1$,$x(t)$ 是下列微分方程的一个解

$$\begin{cases} D^+x(t)=-\alpha(t)x(t)+\beta(t)\int_{t-\tau}^{t}x(s)\mathrm{d}s+\varepsilon, t\geqslant t_0, t\neq t_k \\ x(t_k)=p_k x(t_k^-), k\in N \\ x(t_0+s)=\varphi(s), s\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{1}$$

$x(t)\geqslant 0$ 在 $t\geqslant t_0$ 是连续函数,$\varphi\in PC$,$\alpha(t)$,$\beta(t)\geqslant 0$,p_k,τ 满足 A(1)的条件,则存在于独立于的常数 ε,$\lambda=\dfrac{\ln\eta}{T}$,$K_1$,$G_1$,使得当 $t\geqslant t_0$ 时

$$x(t)\leqslant K_1([\varphi]_\tau+\varepsilon)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}+\varepsilon G_1$$

其中，$[\varphi]_\tau=\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}|\varphi(s)|$。

证明 采用常数变异法，当 $t>t^*\geqslant t_0$ 时

$$
\begin{aligned}
x(t)={}&W_1(t,t^*)x(t^*)+\\
&\int_{t^*}^{t}W_1(s,t)\beta(s)\int_{s-\tau}^{s}x(r)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s+\\
&\varepsilon\int_{t^*}^{t}W_1(s,t)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

其中，$W_1(s,t)=(\prod\limits_{s\leqslant t_k\leqslant t}p_k)\mathrm{e}^{-\int_s^t\alpha(r)dr}, t_0\leqslant s\leqslant t$。

因为 $x(t)\geqslant 0,\beta(t)\geqslant 0,t\geqslant t_0$

当 $t>t^*\geqslant t_0$ 时，$x(t)\geqslant W_1(t^*,t)x(t^*)$

当 $t\geqslant t_0+\tau$ 时，$x(t)\geqslant W_1(t-\tau,t)x(t-\tau)$

则 $x(t)\leqslant W_1^{-1}(t-\tau,t)x(t-\tau)$

从式(1)可知

$$
\begin{cases}
D^+x(t)\leqslant-[\alpha(t)x(t)-\\
\beta(t)\int_{t-\tau}^{t}W^{-1}(r,t)\,\mathrm{d}r]x(t)+\varepsilon,t\geqslant t_0,t\neq t\\
x(t_k)=p_kx(t_k^-),k\in N
\end{cases}
$$

利用 Grownwall 不等式，当 $t\geqslant t_0+\tau$

$$
x(t)\leqslant W_2(t_0+\tau,t)x(t_0+\tau)+\varepsilon\int_{t_0+\tau}^{t}W_2(s,t)\,\mathrm{d}s \tag{2}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
W_2(s,t)={}&(\prod_{s\leqslant t_k\leqslant t}p_k)\mathrm{e}^{-\int_s^t[\alpha(r)-\beta(r)\int_{r-\tau}^{r}W_1^{-1}(\xi,r)\mathrm{d}\xi]\mathrm{d}r}=\\
&(\prod_{s\leqslant t_k\leqslant t}p_k)\mathrm{e}^{-\int_s^t\zeta(r)\mathrm{d}r},t_0+\tau\leqslant s\leqslant t
\end{aligned}
$$

由式(2)可知

$$
\begin{aligned}
x(t+\tau)={}&\int_{t_0}^{t_0+\tau}W_1(s,t_0+\tau)\beta(s)\int_{s-\tau}^{s}x(r)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s+\\
&W_1(t_0,t_0+\tau)x(t_0)+\varepsilon\int_{t_0}^{t_0+\tau}W_1(s,t_0+\tau)\,\mathrm{d}s\leqslant\\
&[W_1(t_0,t_0+\tau)+\tau\int_{t_0}^{t_0+\tau}W_1(s,t_0+\tau)\beta(s)\mathrm{d}s][\varphi]_\tau+\\
&\varepsilon\int_{t_0}^{t_0+\tau}W_1(s,t_0+\tau)\,\mathrm{d}s\leqslant[W_2(t_0,t_0+\tau)+\\
&\tau\int_{t_0}^{t_0+\tau}W_1(s,t_0+\tau)\beta(s)\mathrm{d}s][\varphi]_\tau+\\
&\varepsilon\int_{t_0}^{t_0+\tau}W_1(s,t_0+\tau)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

结合式(2)当 $t\geqslant t_0+\tau$

$$
\begin{aligned}
x(t)\leqslant{}&MW_2(t_0,t)([\varphi]_\tau+\varepsilon)+\\
&\varepsilon\int_{t_0+\tau}^{t}W_2(s,t)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{3}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
M={}&1+W_2^{-1}(t_0,t_0+\tau)\int_{t_0}^{t_0+\tau}W_1(s,t_0+\\
&\tau)(\beta(s)+1)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

对于 $t\in[t_0+nT,t_0+(n+1)T],n=0,1,2,\cdots$

由式(3)结合式 A(1)可得：

$$
\begin{aligned}
x(t)\leqslant{}&M([\varphi]_\tau+\varepsilon)[W_2(t_0,t_0+T)]^nW_2(t_0+nT,t)+\\
&\varepsilon\int_{t_0+\tau}^{t}W_2(s,t)\,\mathrm{d}s=M([\varphi]_\tau+\\
&\varepsilon)\eta^nW_2(t_0,t-nT)+\varepsilon\int_{t_0+\tau}^{t}W_2(s,t)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

令 $\lambda=\dfrac{\ln\eta}{T}<0$，则

$$
\begin{aligned}
x(t)\leqslant{}&M([\varphi]_\tau+\varepsilon)\mathrm{e}^{n\lambda T}W_2(t_0,t-nT)+\\
&\varepsilon\int_{t_0+\tau}^{t}W_2(s,t)\,\mathrm{d}s\leqslant\\
&M([\varphi]_\tau+\varepsilon)\mathrm{e}^{n\lambda T}\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0-nT)}\mathrm{e}^{-\lambda T}W_2(t_0,t-nT)+\\
&\varepsilon\int_{t_0+\tau}^{t}W_2(s,t)\,\mathrm{d}s\leqslant\\
&K([\varphi]_\tau+\varepsilon)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}+\varepsilon\int_{t_0+\tau}^{t}W_2(s,t)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{4}
$$

其中，$K=M\mathrm{e}^{-\lambda T}\max\limits_{t\in[t_0,t_0+T)}W_2(t_0,t)$。

当 $t\in[t_0+\tau+nT,t_0+\tau+(n+1)T],n=0,1,2,\cdots$ 时

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0+\tau}^{t}W_2(s,t)\,\mathrm{d}s=\int_{t_0+\tau}^{t}(\prod_{s\leqslant t_k\leqslant t}p_k)\mathrm{e}^{-\int_s^t\zeta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s=\\
&(\prod_{t_0\leqslant t_k\leqslant t_0+T}p_k\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+T}\zeta(r)\mathrm{d}r})^{n-1}\int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+T}\prod_{s\leqslant t_k\leqslant t+\tau+T}p_k\times\\
&\prod_{t+\tau+nT\leqslant t_k\leqslant t}p_k\,\mathrm{e}^{-\int_{s+(n-1)T}^{t}\zeta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s+\\
&(\prod_{t_0\leqslant t_k\leqslant t_0+T}p_k\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+T}\zeta(r)\mathrm{d}r})^{n-2}\int_{t_0+\tau+T}^{t_0+\tau+2T}\prod_{s\leqslant t_k\leqslant t+\tau+2T}p_k\times\\
&\prod_{t+\tau+nT\leqslant t_k\leqslant t}p_k\,\mathrm{e}^{-\int_{s+(n-2)T}^{t}\zeta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s+\cdots+
\end{aligned}
$$

$$\left(\prod_{t_0\leqslant t_k\leqslant t_0+T} p_k \mathrm{e}^{-\int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+T}\zeta(r)\mathrm{d}r}\right)\int_{t_0+\tau+(n-2)T}^{t_0+\tau+(n-1)T}\prod_{s\leqslant t_k\leqslant t_0+\tau+(n-1)T} p_k \times$$

$$\prod_{t+\tau+nT\leqslant t_k\leqslant t} p_k \mathrm{e}^{-\int_{s+T}^{t}\zeta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s+\int_{t_0+\tau+(n-1)T}^{t_0+\tau+nT}\prod_{s\leqslant t_k\leqslant t} p_k e^{-\int_s^t\zeta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s+$$

$$\int_{t_0+\tau+nT}^{t}\prod_{s\leqslant t_k\leqslant t} p_k \mathrm{e}^{-\int_s^t\zeta(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$(\eta^{n-1}+\eta^{n-2}+\cdots+\eta+2)(B+1)^2\theta T:=G_1<\infty \tag{5}$$

其中,$\theta=\mathrm{e}^{-\omega T}$,$B=\max\limits_{s,t\in[t_0,t_0+T]}\prod\limits_{s\leqslant t_k\leqslant t} p_k$,

并且 $\omega=\min\limits_{r\in[t_0+\tau,t_0+\tau+T]}\zeta(r)$,通过式(4)和式(5)知,

当 $t\geqslant t_0+\tau$ 时

$$x(t)\leqslant K([\varphi]_\tau+\varepsilon)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}+\varepsilon G_1$$

表明存在正数 K_1,G_1,独立于 ε,当 $t\geqslant t_0$

$$x(t)\leqslant K_1([\varphi]_\tau+\varepsilon)e^{\lambda(t-t_0)}+\varepsilon G_1$$

证毕。

引理 2 令 $0\leqslant r_i(t)\leqslant\tau$,$F(t,u,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m):\mathbb{R}^+\times\overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{m+1}\to\mathbb{R}$ 在对于每个点$(t,u,\bar{u},\cdots,\bar{u}_{i-1},\bar{u}_{i+1},\cdots,\bar{u}_m)$,$i=1,2,\cdots,m$ 在 $\bar{u}_i$ 处不增,且 $I_{k(u)}=\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 u 上是不增,假设 $u(t),v(t)\in PC[[-\tau,\infty],\mathbb{R}]$满足

$$\begin{cases}D^+u(t)\leqslant F(t,u(t),u(t-r_i(t)),\cdots \\ u(t-r_m(t))),t\geqslant t_0,t\neq t_k \\ u(t_k)\leqslant I_k(u(t_k^-)),k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

且

$$\begin{cases}D^+v(t)>F(t,u(t),u(t-r_1(t)),\cdots \\ u(t-r_m(t))),t\geqslant t_0,t\neq t_k \\ v(t_k)\leqslant I_k(u(t_k^-)),k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

则

$$u(t)\leqslant v(t),t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$$

即

$$u(t)\leqslant v(t),t\geqslant t_0。$$

定理 1 假设 A(1)成立,则存在常数 $\lambda=\dfrac{\ln\eta}{T}<0$ 和 $K>0$,使得式(1)的解 $x(t)$满足对 $t\geqslant t_0$ 时

$$x(t)\leqslant K([\varphi]_\tau+\varepsilon)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}$$

证明 根据引理 1 和引理 2,则存在独立于 ε 的 $K_1,G_1>0$,$\lambda=\dfrac{\ln\eta}{T}<0$,对 $t\geqslant t_0$

$$x(t)\leqslant K_1([\varphi]_\tau+\varepsilon)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}+\varepsilon G_1$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$x(t)\leqslant K([\varphi]_\tau+\varepsilon)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}$$

则结论成立。

3 神经网络周期解的指数稳定性

神经网络属于复杂网络范畴,复杂网络可以描述各种真实的系统,如生态系统,互联网,生物神经网络,社会网络,生物分子网络等[16-18],而神经网络的稳定性是研究神经网络的重要问题,因此大量学者研究了神经网络系统的稳定性[19-20],常用的方法分为两大类:构造 Lyapunov 泛函法(Lyapunov 直接法,Lyapunov-krasovskii 方法, Lyapunov-Razumikhin 方法)、矩阵及不等式法(Laselle 不变集、线性矩阵不等式、微分不等式、积分不等式)。文章采用的是不等式法,避免了构造复杂的 Lyapunov 函数,只需构造简单 Lyapunov 函数即可。研究以下神经网络的周期解的指数稳定性问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}=-b_i(t)y_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(t)f_j(y_j(t))+ \\ \quad\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}(t)\int_{t-\tau}^{t}g_j(y_j(s))\mathrm{d}s+I_i(t),t\geqslant t_0,t\neq t_k \\ y_i(t_k)=\sum\limits_{j=1}^{n}w_{ij}^k y_j(t_k^-),t=t_k \\ y_i(t_0+s)=\varphi_i(s),-\tau\leqslant s\leqslant 0\end{cases} \tag{6}$$

$f_j(y_j)$,$g_j(y_j)$满足了 Lipschitz 连续条件。$b_i(t)$,$a_{ij}(t)$,$c_{ij}(t)$,$I_i(t)$均是周期为 T 的周期函数,w_{ij}^k 是一个常数。易得式(6)是一个周期系统。并且

$$\varphi(t)=[\varphi_1(s),\cdots,\varphi_n(s)]^T\in PC。$$

通过(t_0,φ)的解为 $y(t,t_0,\varphi)$或 $y_t(t_0,\varphi)$,其中 $y_t(t_0,\varphi)=y(t+s,t_0,\varphi)$,$-\tau\leqslant s\leqslant 0$,$t\geqslant t_0$。易知,系统式(6)有唯一解 $y(t,t_0,\varphi)$。则系统式(6)可以被称

为神经网络系统。下面考虑这个神经网络的周期解的存在惟一性,在此之前给出下列引理。

引理 3 式(1)有周期解当且仅当存在 $\varphi\in PC$ 满足

$$y_{t+T}(t_0,\varphi)=\varphi$$

定理 2 假设存在非负常数 $F_j,G_j,j=1,\cdots,n$ 使得

$$|f_j(x)-f_j(y)|\leqslant F_j|x-y|$$

$$|g_j(x)-g_j(y)|\leqslant G_j|x-y|,\ \forall x,y\in R$$

$\eta(t),\xi(t)$满足

$$\Big(\prod_{t_0\leqslant t_k\leqslant t_0+T}p_k\Big)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t_0+\tau+T}\mu(r)-\nu(r)e^{\int_{r-\tau}^{r}\mu(h)\mathrm{d}h\left(\prod_{r-\tau\leqslant t_k\leqslant r}p_k\right)^{-1}\mathrm{d}r}}=\eta<1$$

其中,$\mu(t)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(b_i(t)-\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|F_i)$ $\nu(t)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|c_{ij}(t)|G_i$,$W_1(s,t)=\mathrm{e}^{-\int_s^t\mu(r)\mathrm{d}r}$,$t_0\leqslant s\leqslant t$,$p_k=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}|w_{ij}^{k'}|\Big)$。

则式(6)有惟一全局稳定周期解。

证明 令 $\varphi,\varphi\in PC$,$x(t),y(t)$是上述系统通过初值(t_0,φ)和(t_0,φ)的解,则有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}=-b_i(t)y_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(t)f_j(y_j(t))+\\ \quad\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}(t)\int_{t-\tau}^{t}g_j(y_j(s))\mathrm{d}s+I_i(t),t\geqslant t_0,t\neq t_k\\ \dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-b_i(t)x_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(t)f_j(x_j(t))+\\ \quad\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}(t)\int_{t-\tau}^{t}g_j(x_j(s))\mathrm{d}s+I_i(t),t\geqslant t_0,t\neq t_k\end{cases}$$

定义 $u(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i(t)-y_i(t)|$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u(t)=&\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}x_i(t)-y_i(t)(x_i(t)-y_i(t))'=\\&\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(x_i(t)-y_i(t))(-b_i(t)(x_i(t)-\\&y_i(t))+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)(f_j(x_j(t))-(f_j(y_j(t)))+\\&\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(t)\int_{t-\tau}^{t}(g_j(x_j(s))-g_j(y_j(s)))\mathrm{d}s\leqslant-\\&\sum_{i=1}^{n}b_i(t)|x_i(t)-y_i(t)|+\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|F_j|x_i(t)-y_i(y)|+\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}(t)|G_j\int_{t-\tau}^{t}|x_i(s)-y_i(s)|\mathrm{d}s\leqslant\\&-\min_{1\leqslant i\leqslant n}(b_i(t)-\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|F_i)u(t)+\\&\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}(t)|G_i\int_{t-\tau}^{t}u(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

当 $t=t_k$ 时

$$\begin{aligned}u(t_k)=&\sum_{i=1}^{n}|x_i(t_k)-y_i(t_k)|=\\&\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}w_{ij}^{k}(x_j(t_k^-)-y_j(t_k^-))|\leqslant\\&\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\sum_{i=1}^{n}|w_{ij}^{k}|u(t_k^-)|)\end{aligned}$$

由引理 1、引理 2 和定理 1 可得

$$u(t)\leqslant K\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)},t\geqslant t_0,\lambda<0$$

定义算子 $F:PC_{t_0}\to PC_{t_0+T}$ 有 $F\varphi=y_{t_0+T},\varphi\in PC_{t_0}$

由周期性可知 $PC_{t_0}=PC_{t_0+T}$,即 F 将 PC_{t_0} 映射到自身。进一步可知,式(6)的存在惟一解

$$F^*\varphi=x_{t_0+kT}(t,\varphi),k\in\mathbb{N}$$

由于 $u(t)\leqslant K\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}$,$t\geqslant t_0$ 则

$$||F^m\varphi-F^m\varphi||=||y_{t_0+mT}(t_0,\varphi)-x_{t_0+mT}(t_0,\varphi)||$$

其中,$m\in N,0<l<n$,则 F^m 是 Banach 空间的一个压缩映射 PC_{t_0},因此根据 Banach 空间中的不动点定理,F^m 正好有一个不动点,因此根据不动点的惟一性知 $F\varphi^*=\varphi^*$,$u(t)\leqslant K\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}$,$t\geqslant t_0$。

结合引理 3 可得式(6)的一个全局指数稳定周期解 $x(t,t_0,\varphi^*)$,证毕。

4 结束语

建立了一个新的具有脉冲和分布时滞的变系数广义 Halanay 不等式,分析了神经网络系统式(1)的稳定性,由分析结果可知式(1)的周期解指数稳定。分布时滞在应用中十分广泛,例如生态系统中捕食者和被捕食者的关系不仅跟过去某一时刻有关系,而且跟过去某一段时间有关系,分布时滞可以很好

描述这一现象。此外,将常系数改为变系数克服了系数为常量时衰减因子必须时刻大于增长因子的弊端。

神经网络系统可以描述各种真实的系统。例如:生态神经网络,互联网,社会网络等等。而系统的稳定性关系到一个系统性能的好坏,建立广义 Halanay 不等式可以用于各种系统的稳定性分析。各类广义 Halanay 不等式最后的结论都依赖于时滞,若能证明 Halanay 不等式最后的结论不依赖于时滞,则将是一个更优的结论。

参考文献(References):

[1] HALANAY A. Differential equations: stability, oscillations, time lags[M]. New York:Academic Press, 1966.

[2] WEN L P, YU Y X, WANG W S. Generalized Halanay inequalities for dissipativity of volterra functional differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008,347(1):169—178.

[3] LIU B, LU W L, CHEN T P. Stability analysis of some delay differential inequalities with small time delays and its applications[J]. Neural Networks, 2012, 33(10): 1—6

[4] BALLINGER G, LIU G. Existence, uniqueness and boundedness results for impulsive delay differential equations[J]. Applicable Analysis, 2000,74(1):71—93

[5] LI X D. Existence and global exponential stability of periodic solution for impulsive Cohen-Grossberg-type BAM neural networks with continuously distributed delays [J]. Applied Mathematics Computation, 2009,215(1): 292—307

[6] LIU Z, ZHANG X F, LU X D, et al. Exponential stability of impulsive positive switched systems with discrete and distributed time-varying delays[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(10):3125—3138

[7] YANG Z C, XU D Y. Stability analysis and design of impulsive control systems with time delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(8): 1448—1454

[8] CARABALLO T, HAMMAMI M A, MCHIRI L. Practical exponential stability of impulsive stochastic functional differential equations-science direct[J]. Systems Control Letters, 2017, 109:43—48

[9] WANG T C, LI W Y. State-feedback stabilization of stochastic nonlinear systems with time-varying delay and different orders[J]. Asia Journal of Control, 2016, 18(3):1159—1164.

[10] LIN Y S, PU X Q, LI D S. The existence and exponential stability of periodic solution for impulsive delay differential equations[J]. Asian Journal of Control, 2019, 22(5):2129—2135.

[11] 马超, 黎定仕. 一类非自治微分积分方程的全局指数稳定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2014, 37(5),639—642.
MA Chao, LI Ding-shi. Global exponential stability of a class of non-autonomous differential-integral equations [J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science Edition), 2014, 37(5),639—642.

[12] YANG C, LIU Y C, LI F M, et al. Finite-time synchronization of a class of coupled memristor based recurrent neural networks:static state control and dynamic control approach[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2020, 19(5):1—13.

[13] XU L G, HE D H. Mean exponential stability analysis of impulsive stochastic switched systems with mixed delays [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 62(1):109—117.

[14] CHEN J, CHEN B, ZENG Z. Basic theorem and global exponential stability of differential-algebraic neural networks with delay[J]. Neural Networks, 2021, 140: 336—343.

[15] WU Y B, YAN S H, FAN M, et al. Stabilization of stochastic coupled systems with Markovian switching via feedback control based on discrete-time state observations [J]. International Journal of Robust Nonlinear Control, 2017. 28:247—265.

[16] 傅金波, 陈兰荪. 具有收获率和功能性反应的捕食系

统的周期解存在性[J]. 应用数学,2021,34(2):289—297.
FU Jin-bo, CHEN Lan-su. Existence of periodic solution of predator-prey system with harvest rate and functional response[J]. Applied Mathematics, 2021, 34(2): 289—297.

[17] YANG X S. Existence and global exponential stability of periodic solution for Cohen-Grossberg shunting inhibitory cellular neural networks with delays and impulses[J]. Neurocomputing, 2009, 72(10-12): 2219—2226.

[18] XIE Y K, WANG Z. Periodic solution and dynamical analysis for a delayed food chain model with general functional response and discontinuous harvesting[J]. Journal of Applied Mathematics & Computing, 2021, 65(1-2): 223—243.

[19] TATAR N E. Fractional Halanay inequality and application in neural network theory[J]. Acta Mathematica Scientia, 2019. 39(6): 1605—1618.

[20] YANG G J, HAO F, ZHANG L, et al. Exponential stability of discrete-time positive switched T-S fuzzy systems with all unstable subsystems[J]. Science China Information Sciences, 2021, 64(5): 1—3.

Exponential Stability of Periodic Solutions of Time-delay Impulsive Equations with Variable Coefficients

LEI Ting, ZHU Shuang

(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: Neural network belongs to complex network, which is studied by many scholars because it can describe all kinds of real systems. Stability is always an important problem of complex network. This paper studies exponential stability of a class of impulsive neural network. In this paper, we establish a generalized Halanay inequality with variable coefficient with distributed delay and impulse. The inequality has three characteristics: it can prove the stability of discontinuous systems with impulse; the coefficient is variable coefficient, and the requirement for the coefficient of inequality is more relaxed, which is more widely used; time delay is distributed time delay. By using the new generalized Halanay inequality and Banach fixed point theory, a simple Lyapunov function is established, and a sufficient condition is obtained for the existence and exponential stability of periodic solutions of impulsive neural networks. It is shown that when the condition is satisfied, the impulsive delay neural networks have unique periodic solutions and the periodic solutions are exponentially stable.

Key words: distributed delays; impulsive; Halanay inequality; periodic solution

责任编辑:田　静

引用本文/Cite this paper:
雷婷,朱双. 变系数时滞脉冲方程周期解的指数稳定性研究[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2022,39(5):78—84.
LEI Ting, ZHU Shuang. Exponential stability of periodic solutions of time-delay impulsive equations with variable coefficients[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2022, 39(5): 78—84.