

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2022.0002.006

带有启动时间和两类故障的 M/M/1 系统均衡策略分析

汪文杰¹, 刘力维¹, 叶晴晴²

(1. 南京理工大学理学院, 南京 210094; 2. 南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 200044)

摘要:考虑在带有延迟启动以及两类故障特性的 M/M/1 排队系统中, 顾客应遵循的进队策略和该策略下的社会平均收益, 服务台采取延迟启动休假模式, 可能发生完全故障和不完全故障两类故障, 在系统信息完全可见的条件下, 根据线性“获益-损失”函数, 给出顾客的预期收益方程, 并通过稳态时的系统状态转移图, 结合归一化方程求系统的稳态分布, 在结尾通过数值例子展示顾客止步策略和社会平均收益关于系统参数的敏感性。

关键词:完全故障; 不完全故障; 延迟启动; 均衡进队策略; 社会平均收益

中图分类号: O226

文献标志码: A

文章编号: 1672-058X(2022)02-0038-08

0 引言

生活中处处存在排队现象, 看得见的有火车站排队检票、物流中心货物的调配等; 看不见的有信号的接收与传输等。在排队时经常出现这样一种现象: 在某些时段服务台前排队的顾客较多, 在某些时段服务台前又没有顾客。这是因为顾客会根据自身需求选择进入队列时间, 这就要求顾客和服务台从经济学角度去衡量自身的预期收益。排队论与经济学的结合, 考虑了人的主观能动性, 重点放在顾客接受完服务后获得的利益。同时, 服务提供商也会让服务台进行不定时的休息, 从而降低成本获得更高的利润。Naor^[1] 率先使用博弈论研究排队系统, 得出了顾客在知晓系统顾客数时的均衡进队策略, 同时提出了通过收取过路费的方式使顾客改变其进队策略, 让社会平均收益达到最高; Edelson 与

Hildebrand^[2] 针对文献[1]的模型, 讨论了在系统信息完全不可见条件下顾客的进队策略以及社会最优策略; Kerner^[3] 分析了可见情形下的 M/G/1 排队系统, 由于服务时间分布丧失了无记忆性特征, 整个过程变得复杂, 不同的服务时间概率分布会让顾客的聚集偏好(FTC)和聚集厌恶(ATC)都可能发生。

由于系统的不可靠性, 故障随时都可能发生。Economou 等^[4] 首先考虑了系统中的故障问题, 他们给出了在完全可见信息水平下, 带有完全故障特性和立刻维修特性队列中顾客的止步门限值; Li 等^[5] 分析了不同信息水平下带有不完全故障队列中的顾客策略选择问题; Xu 等^[6] 在文献[5]的基础上建立了带有部分故障特性和推迟修理的排队情景, 分析了顾客在完全可见以及完全不可见时的止步策略以及相应的社会预期收益; 张淞钰和徐秀丽^[7] 讨论了信息几乎不可见和完全可见条件下带有两种故障类型的社会平均收益和顾客进队问题; 对于需要延迟

收稿日期: 2021-01-26; 修回日期: 2021-04-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61773014); 江苏省青年基金项目(BK20180783).

作者简介: 汪文杰(1996—), 男, 江苏淮安人, 硕士, 从事排队论研究.

通讯作者: 刘力维(1960—), 男, 江苏南京人, 教授, 博士, 从事应用统计与随机过程研究. Email: lwliu@njjust.edu.cn.

启动的排队系统, Burnetas 与 Ecomomou^[8] 率先从经济学角度进行探讨, 给出了信息完全可见、部分可见、不完全可见和完全不可见情形下的顾客进队门限以及社会预期收益; Sun 等^[9-10] 又在 Burnetas 模型基础上加入了关闭时间, 研究了系统信息可见和不可见时排队系统中顾客进队策略; Chen 等^[11] 将 N 策略和启动时间两种休假方式同时引入排队系统, 给出了在完全可见和完全不可见时的单位时间费用函数、社会收益等系统性能指标; Chen 等^[12] 推导了在完全可见、部分可见以及完全不可见情形下, 带有启动时间和完全故障的排队系统顾客均衡策略和优化策略, 并分析了不同参数以及信息水平的影响。

随着现实需求逐渐细致, 需要从更多的角度提高经济效益, 抽象出的排队模型也变得复杂起来。如在使用大型计算机处理不同任务时, 设备需要先开机, 由于性能的差异和任务种类的不同, 设备可能会出现处理速度变慢或者死机的情况; 冬天汽车发动机的启动需要一段预热时间, 恶劣天气会给汽车动力系统带来很多不安全因素, 造成汽车的抛锚, 这要求建立一个新的模型对此类工作系统进行指导, 因此考虑带有两类故障和启动时间的服务系统具有很强的现实意义和应用价值。

1 模型描述

考虑一个有两类不完全可靠特性和延迟启动的 M/M/1 排队系统, 顾客按照进入顺序等待服务, 服务台总是先服务先进入系统的顾客。当服务台处于休假状态时, 此时抵达系统的顾客不会立刻被服务, 服务台需要经过一段启动时间才会进入正常工作状态, 但启动时间长度是不确定的。系统的服务柜台具有不可靠性, 即服务台有使用寿命, 在服务的过程中随时可能因为“寿命终了”而发生不同程度的损坏, 且顾客具有“故障厌恶性”, 即当顾客发现服务台处于任意一类故障状态时, 就不会选择进入队列。服务台有两种故障类型: 完全故障, 即系统丧失全部服务能力, 立刻进行维修, 修好后接着为顾客服务; 不完全故障, 即系统仍然保有部分服务能力, 但服务速率降低, 直至服务完系统中所有剩余顾客后进行

维修。设系统提供的服务速率在正常工作时是 μ , 在不完全故障时是 μ_0 , 两类服务时间都呈指数分布而且 $\mu_0 < \mu$ 。对于服务台, 不完全故障发生的过程和完全故障发生的过程都是泊松过程, 参数分别为 ε_1 和 ε_2 。对于发生不完全故障的服务柜台, 维修过程花费的时间是参数为 ξ_1 的指数分布; 对于发生完全故障的服务柜台, 维修过程花费的时间是参数为 ξ_2 的指数分布。假定顾客的等待过程、服务台的服务过程、不完全故障发生及维修过程、完全故障发生及维修过程全都相互独立。

$(N(t), X(t))$ 指系统中队列和服务柜台在时刻 t 的状态, $N(t)$ 指 t 时刻队列中的顾客数量, $X(t)$ 指 t 时刻服务柜台所处的不同状态, 有

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{休假期} \\ 1, & \text{正常工作期} \\ 2, & \text{不完全故障期} \\ 3, & \text{完全故障期} \end{cases}$$

容易看出, $(N(t), X(t), t \geq 0)$ 在状态空间 $\Omega = \{(n, 0), n=0, 1, \dots\} \cup \{(n, 1), n=1, 2, \dots\} \cup \{(n, 2), n=0, 1, \dots\} \cup \{(n, 3), n=1, 2, \dots\}$ 上是一个连续时间马尔可夫过程。其中, $(0, 0)$ 说明服务柜台处在休假期间, $(0, 2)$ 说明服务柜台正在维修中。状态转移如图 1 所示。

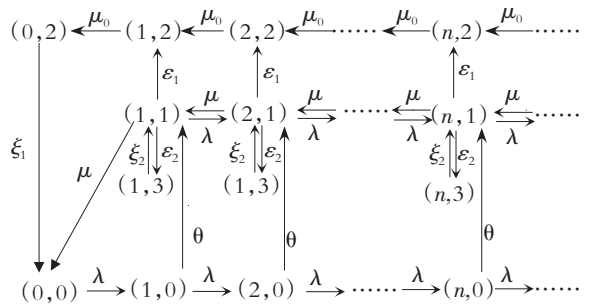


图 1 排队系统状态转移图

Fig. 1 State transition diagram of queue system

2 完全可见情形下的均衡策略分析

寻求服务的顾客在 t 时刻到达队列时, 会被告知 $X(t)$ 和 $N(t)$ 。由于顾客的“故障厌恶性”, 顾客在 $(n, 2)$, $(n, 3)$ 时到达会立刻离开系统, 不会进入排队, 所以只需考虑顾客在 $(n, 0)$, $(n, 1)$ 到达时的

情况。假设此时有进队策略 $(n_e(0), (n_e(1)))$, 顾客到达时若 $N(t) \leq n_e(X(t))$, $X(t) = 0, 1$, 则顾客会偏向于进入队列等待, 否则偏向于离开。相应的系统状态空间为

$$\Omega_f = \{(n, 0), n = 0, 1, \dots, n_e(0) + 1\} \cup \{(n, i), n = 1, 2, \dots, n_e(1) + 1, i = 1, 3\} \cup \{(n, 2, n = 0, 1, \dots, n_e(1) + 1, \}$$

状态转移图如图 2 所示:

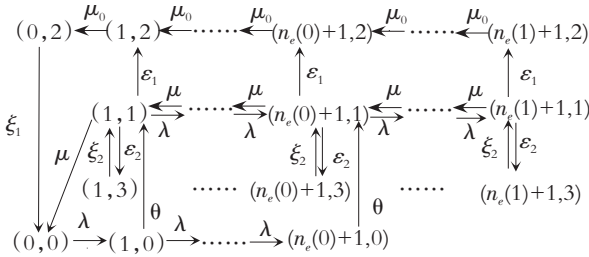


图 2 完全可见时排队系统状态转移图

Fig. 2 State transition diagram in fully observable case of queue system

定理 1 当系统信息完全可见时, 在具有延迟启动和两种故障类型的 M/M/1 队列中, 有以下阈值:

$$(n_e(0), n_e(1)) = (\lfloor x_e(0) \rfloor, \lfloor x_e(1) \rfloor)$$

依据此进队策略, 若顾客在时刻 t 抵达队列, 得知系统处于状态 $(N(t), X(t), X(t) = 0, 1)$, 若 $N(t) \leq n_e(X(t))$, 则选择进队, 否则选择止步。其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示对 x 进行向下取整, $x_e(0)$ 和 $x_e(1)$ 分别是以下两个方程的唯一解:

$$\frac{\mu(\mu_0 \varepsilon_2 + \mu_0 \xi_2 - \mu \xi_2)}{\mu_0 \xi_2 \varepsilon_1 (\mu + \varepsilon_1)} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1} \right)^{x_e(0)} \right) + \frac{x_e(0)}{\mu_0} + \frac{\varepsilon_1}{\mu_0 (\mu + \varepsilon_1)} + \frac{\varepsilon_2 + \xi_2}{\xi_2 (\mu + \varepsilon_1)} + \frac{1}{\theta} = \frac{R}{C}$$

$$\frac{\mu(\mu_0 \varepsilon_2 + \mu_0 \xi_2 - \mu \xi_2)}{\mu_0 \xi_2 \varepsilon_1 (\mu + \varepsilon_1)} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1} \right)^{x_e(1)} \right) + \frac{x_e(1)}{\mu_0} + \frac{\varepsilon_1}{\mu_0 (\mu + \varepsilon_1)} + \frac{\varepsilon_2 + \xi_2}{\xi_2 (\mu + \varepsilon_1)} = \frac{R}{C}$$

证明 从系统中选取一个新抵达顾客, 他抵达时得知系统处于状态 $(n, 0)$, $(n, 1)$, 且愿意进入队列, 则由“获益-损失”函数可知, 该顾客的预期收益为

$$S(n, i) = R - CT(n, i), i = 0, 1 \quad (1)$$

其中, $T(n, i)$ 意为新抵达顾客获悉服务台所处状态

为 $i, i = 0, 1$ 时, 从选择进入队列到离开系统所花费的平均逗留时间, R 指顾客接受服务后获得的收益, C 指顾客的单位时间等待成本。结合状态转移图 2, 可得:

$$T^*(0, 1) = \frac{\varepsilon_1}{(\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mu_0} + \frac{1}{\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \times \left(\frac{1}{\xi_2} + T^*(0, 1) \right) \quad (2)$$

$$T(0, 0) = \frac{1}{\theta} + T^*(0, 1) \quad (3)$$

$$T(n, 0) = \frac{1}{\theta} + T(n, 1), n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$T(1, 1) = \frac{\varepsilon_1}{(\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mu_0} + \frac{2}{\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{1}{\mu} + T^*(0, 1) \right) + \frac{\varepsilon_2}{\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{1}{\xi_2} + T(1, 1) \right) \quad (5)$$

$$T(n, 1) = \frac{\varepsilon_1}{(\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\mu_0} + \frac{(n+1)}{\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{1}{\mu} + T(n-1, 1) \right) + \frac{\varepsilon_2}{\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{1}{\xi_2} + T(n, 1) \right), n = 2, 3, \dots \quad (6)$$

注: $T^*(0, 1)$ 表示处于正常工作状态时, 系统在服务完最后一个顾客的一瞬间有新顾客到达, 此时系统还未关闭。

由式(2)可得 $T^*(0, 1) = \frac{\varepsilon_1}{\mu_0(\mu + \varepsilon_1)} + \frac{\varepsilon_2 + \xi_2}{\xi_2(\mu + \varepsilon_1)}$, 结合式(3)可得出 $T(0, 0)$, 再结合式(5)可得

$$T(1, 1) = \frac{2\varepsilon_1 \xi_2 + \mu_0 \xi_2 + \mu_0 \varepsilon_2}{\mu_0 \xi_2 (\mu + \varepsilon_1)} + \frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1} T^*(0, 1)。$$

整理式(6)如下:

$$T(n, 1) - T(n-1, 1) - \frac{1}{\mu_0} = \frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1} \left(T(n-1, 1) - T(n-2, 1) - \frac{1}{\mu_0} \right), n = 3, 4, \dots \quad (7)$$

通过迭代式(7), 并结合 $T^*(0, 1)$ 和 $T(1, 1)$, 可知:

$$T(n, 1) = \frac{\mu(\mu_0 \varepsilon_2 + \mu_0 \xi_2 - \mu \xi_2)}{\mu_0 \xi_2 \varepsilon_1 (\mu + \varepsilon_1)} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1} \right)^n \right) + \frac{n}{\mu_0} + T^*(0, 1), n = 1, 2, \dots$$

结合式(3)(4)和 $T(n, 1)$, 得到:

$$T(n, 0) = \frac{\mu(\mu_0 \varepsilon_2 + \mu_0 \xi_2 - \mu \xi_2)}{\mu_0 \xi_2 \varepsilon_1 (\mu + \varepsilon_1)} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1} \right)^n \right) +$$

$$\frac{n}{\mu_0} + T^*(0,1) + \frac{1}{\theta}, n=0,1,\dots$$

整理可得:

$$T(n+1,1) - T(n,1) =$$

$$\frac{1}{\mu_0} \left(1 - \frac{\mu\xi_2 - \mu_0(\varepsilon_2 + \xi_2)}{\mu\xi_2 + \varepsilon_1\xi_2} \left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1} \right)^{n+1} \right), n=1,2,\dots$$

因为 $\mu_0(\varepsilon_2 + \xi_2) > 0, \varepsilon_1\xi_2 > 0, \mu\xi_2 > 0$, 所以 $\mu\xi_2 -$

$\mu_0(\varepsilon_2 + \xi_2) < \mu\xi_2 + \varepsilon_1\xi_2$, 由此可得 $\frac{\mu\xi_2 - \mu_0(\varepsilon_2 + \xi_2)}{\mu\xi_2 + \varepsilon_1\xi_2} < 1$,

且 $\left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1} \right)^{n+1} < 1$, 所以 $\frac{\mu\xi_2 - \mu_0(\varepsilon_2 + \xi_2)}{\mu\xi_2 + \varepsilon_1\xi_2} \left(\frac{\mu}{\mu + \varepsilon_1} \right)^{n+1} < 1$ 恒

成立, 则 $T(n,1)$ 随着 n 的增大而单调增, 再结合式 (1) 可知 $S(n,1)$ 随着 n 的增大而单调减。解出 $S(n,1) \geq 0$, 顾客进队阈值策略 $n_e(1)$ 就能得到, 且根据单调性, 其是唯一的。同理, $T(n,0)$ 也随着 n 的增大而单调增, $S(n,0)$ 随着 n 的增大而单调减, $n_e(0)$ 也是唯一的。

另外, 始终假设在该系统中, $S(0,0) \geq 0$ 恒成立, 即

$$\frac{1}{\theta} + \frac{\varepsilon_1}{\mu_0(\mu + \varepsilon_1)} + \frac{\varepsilon_2 + \xi_2}{\xi_2(\mu + \varepsilon_1)} \leq \frac{R}{C}$$

以确保顾客在观察到系统状态为 $(0,0)$ 时所得期望收益为非负, 选择进入系统, 否则系统不会被激活。定理 1 得证。

接着求系统的稳态分布。令 $p(n,i) \in \Omega_f$ 表示系统各个状态的稳态概率, 由图 2 得, 系统稳态分布的平衡方程为

$$\lambda p(0,0) = \xi_1 p(0,2) + \mu p(1,1) \quad (8)$$

$$(\lambda + \theta)p(n,0) = \lambda p(n-1,0) \quad (9)$$

$$n=1,2,\dots,n_e(0)$$

$$\theta p(n_e(0)+1,0) = \lambda p(n_e(0),0) \quad (10)$$

$$(\mu + \lambda + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)p(1,1) = \mu p(2,1) + \xi_2 p(1,3) + \theta p(1,0) \quad (11)$$

$$(\mu + \lambda + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)p(n,1) = \lambda p(n-1,1) + \mu p(n+1,1) + \xi_2 p(n,3) + \theta p(n,0) \quad (12)$$

$$n=2,3,\dots,n_e(0)+1$$

$$(\mu + \lambda + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)p(n,1) = \lambda p(n-1,1) + \mu p(n+1,1) + \xi_2 p(n,3) \quad (13)$$

$$n=n_e(0)+2,\dots,n_e(1)$$

$$(\mu + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)p(n_e(1)+1,1) =$$

$$\lambda p(n_e(1),1) + \xi_2 p(n_e(1)+1,3) \quad (14)$$

$$\xi_2 p(n,3) = \varepsilon_2 p(n,1), n=1,2,\dots,n_e(1)+1 \quad (15)$$

$$\xi_1 p(0,2) = \mu_0 p(1,2) \quad (16)$$

$$\mu_0 p(n,2) = \mu_0 p(n+1,2) + \varepsilon_1 p(n,1), n=1,2,\dots,n_e(1) \quad (17)$$

$$\mu_0 p(n_e(1)+1,2) = \varepsilon_1 p(n_e(1)+1,1) \quad (18)$$

定理 2 在排队系统信息完全可见条件下, 对于带有启动时间和两类故障类型的服务系统, 若所有顾客皆采取阈值策略 $(n_e(0), n_e(1))$, 则系统各状态平稳分布为

$$p(n,0) = \sigma^n M, n=0,1,\dots,n_e(0)$$

$$p(n_e(0)+1,0) = \frac{\lambda}{\theta} \sigma^{n_e(0)} M$$

$$p(n,1) = -(w_1 + a)r_1^n M + w_1 M r_2^n + a \sigma^n M \quad (19)$$

$$n=1,2,\dots,n_e(0)+1$$

$$p(n,1) = b w_2 M r_1^n + w_2 M r_2^n \quad (20)$$

$$n=n_e(0)+2,\dots,n_e(1)+1$$

$$p(0,2) = w_3 M; p(n,3) = \frac{\varepsilon_2}{\xi_2} p(n,1)$$

$$n=1,2,\dots,n_e(1)+1$$

$$p(n,2) = \left[w_4 \frac{\varepsilon_1}{\mu_0} \left(w_1 \frac{r_2(1-r_2^{n-1})}{1-r_2} + a \frac{\sigma(1-\sigma^{n-1})}{1-\sigma} + (a+w_1) \frac{r_1(1-r_1^{n-1})}{1-r_1} \right) \right] M, n=1,2,\dots,n_e(0)+1$$

$$p(n,2) = \left[w_5 \frac{\varepsilon_1 w_2}{\mu_0} \left(\frac{r_2^{n_e(0)+1} - r_2^n}{1-r_2} + b \frac{r_1^{n_e(0)+1} - r_1^n}{1-r_1} \right) \right] M \quad (21)$$

$$n=n_e(0)+2, n_e(0)+3, \dots, n_e(1)+1$$

其中,

$$M = \left[v_1 + \left(\frac{\xi_2 + \varepsilon_2}{\xi_2} \right) (v_2 + v_3) + v_6 \right]^{-1}, \sigma = \frac{\lambda}{\lambda + \theta}$$

$$r_{1,2} = \frac{\mu + \lambda + \varepsilon_1 \pm \sqrt{(\mu + \lambda + \varepsilon_1)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}$$

$$a = -\frac{\theta\sigma}{\mu\sigma^2 - (\lambda + \mu + \varepsilon_1)\sigma + \lambda}$$

$$b = \frac{\lambda r_2^{n_e(1)} - (\mu + \varepsilon_1)r_2^{n_e(1)+1}}{-\lambda r_1^{n_e(1)} + (\mu + \varepsilon_1)r_1^{n_e(1)+1}}$$

$$c = \frac{(\mu + \lambda + \varepsilon_1)(r_2^{n_e(0)+1} - r_1^{n_e(0)+1}) - \lambda(r_2^{n_e(0)} - r_1^{n_e(0)})}{\mu}$$

$$d = \frac{a(\mu + \lambda + \varepsilon_1)(\sigma^{n_e(0)+1} - r_1^{n_e(0)+1}) - a\lambda(\sigma^{n_e(0)} - r_1^{n_e(0)}) - \lambda\sigma^{n_e(0)}}{\mu}$$

$$e = r_2^{n_e(0)+1} - r_1^{n_e(0)+1}$$

$$f = a(\sigma^{n_e(0)+1} - r_1^{n_e(0)+1})$$

$$g = \frac{c}{e}(br_1^{n_e(0)+2} + r_2^{n_e(0)+2}) - (br_1^{n_e(0)+1} + r_2^{n_e(0)+1})$$

$$w_1 = \frac{1}{c}((br_1^{n_e(0)+2} + r_2^{n_e(0)+2})w_2 - d)$$

$$w_2 = \frac{cf - de}{eg}$$

$$w_3 = \frac{\lambda + \mu w_1 r_1 + \mu a r_1 - \mu w_1 r_2 - \mu a \sigma}{\xi_1}$$

$$w_4 = \frac{\xi_1}{\mu_0} w_3$$

$$w_5 = w_4 - \frac{\varepsilon_1}{\mu_0} \left(w_1 \frac{r_2(1 - r_2^{n_e(0)})}{1 - r_2} + a \frac{\sigma(1 - \sigma^{n_e(0)})}{1 - \sigma} - (a + w_1) \frac{r_1(1 - r_1^{n_e(0)})}{1 - r_1} \right)$$

$$v_1 = \frac{1 - \sigma^{n_e(0)+1}}{1 - \sigma} + \frac{\lambda}{\theta} \sigma^{n_e(0)}$$

$$v_2 = \frac{w_1 r_2 (1 - r_2^{n_e(0)+1})}{1 - r_2} + \frac{a \sigma (1 - \sigma^{n_e(0)+1})}{1 - \sigma} -$$

$$\frac{w_1 r_1 (1 - r_1^{n_e(0)+1})}{1 - r_1} - \frac{a r_1 (1 - r_1^{n_e(0)+1})}{1 - r_1}$$

$$v_3 = \frac{b w_2 r_1^{n_e(0)+2} (1 - r_1^{n_e(1) - n_e(0)})}{1 - r_1} +$$

$$\frac{w_2 r_2^{n_e(0)+2} (1 - r_2^{n_e(1) - n_e(0)})}{1 - r_2}$$

$$v_4 = \frac{\varepsilon_1}{\mu_0} \left[(n_e(0) + 1) \left(\frac{w_1 r_2}{1 - r_2} + \frac{a \sigma}{1 - \sigma} - \frac{(w_1 + a) r_1}{1 - r_1} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{w_1 r_2 (1 - r_2^{n_e(0)+1})}{(1 - r_2)^2} - \frac{a \sigma (1 - \sigma^{n_e(0)+1})}{(1 - \sigma)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{(w_1 + a) r_1 (1 - r_1^{n_e(0)+1})}{(1 - r_1)^2} \right]$$

$$v_5 = \frac{\varepsilon_1}{\mu_0} \left[(n_e(1) - n_e(0)) \left(\frac{b r_1^{n_e(0)+1}}{1 - r_1} + \frac{r_2^{n_e(0)+1}}{1 - r_2} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{b r_1^{n_e(0)+2} (1 - r_1^{n_e(1) - n_e(0)})}{(1 - r_1)^2} - \frac{r_2^{n_e(0)+2} (1 - r_2^{n_e(1) - n_e(0)})}{(1 - r_2)^2} \right]$$

$$v_6 = w_3 + (n_e(0) + 1) w_4 + (n_e(1) - n_e(0)) w_5 + v_4 + v_5$$

证明 由式(9)可知, $p(n, 0) = \frac{\lambda}{\lambda + \theta} p(n-1, 0)$,

$n = 1, 2, \dots, n_e(0)$ 。令 $p(0, 0) = M, \sigma = \frac{\lambda}{\lambda + \theta}$, 所以得

到 $p(n, 0) = \sigma^n M, n = 0, 1, \dots, n_e(0)$, 并结合式(10)

可知 $p(n_e(0) + 1, 0) = \frac{\lambda}{\theta} \sigma^{n_e(0)} M$ 。

结合式(12)(15), 可得 $(\mu + \lambda + \varepsilon_1) p(n, 1) = \lambda p(n-1, 1) + \mu p(n+1, 1) + \theta \sigma^n M, n = 2, 3, \dots, n_e(0)$, 即 $p(n, 1), n = 1, 2, \dots, n_e(0) + 1$ 是常系数差分方程:

$$\mu x_{n+1} - (\mu + \lambda + \varepsilon_1) x_n + \lambda x_{n-1} = -\theta \sigma^n M \quad (19)$$

的解, 对应的特征方程为 $\mu x^2 - (\mu + \lambda + \varepsilon_1) x + \lambda = 0$, 方程有两个实根:

$$r_{1,2} = \frac{\mu + \lambda + \varepsilon_1 \pm \sqrt{(\mu + \lambda + \varepsilon_1)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}$$

则式(19)对应的齐次差分方程的解为 $x_n^{\text{hom}} = A_1 r_1^n + B_1 r_2^n, n = 1, 2, \dots, n_e(0) + 1$, 其中 A_1 和 B_1 为常系数。由于方程的非线性部分是 σ 的几何形式, 设其特解为 $x_n^{\text{spec}} = C_1 \sigma^n$, 其中 C_1 为常数。代入方程, 可得

$$C_1 = -\frac{\theta \sigma}{\mu \sigma^2 - (\lambda + \mu + \varepsilon_1) \sigma + \lambda} M$$

令 $a = -\frac{\theta \sigma}{\mu \sigma^2 - (\lambda + \mu + \varepsilon_1) \sigma + \lambda}$, 所以得到 $p(n, 1) = A_1 r_1^n +$

$B_1 r_2^n + a \sigma^n M, n = 1, 2, \dots, n_e(0) + 1$ 。将结果代入式(11), 化简得到 $A_1 = -(B_1 + C_1)$, 所以 $p(n, 1) = -(B_1 + C_1) r_1^n + B_1 r_2^n + a \sigma^n M, n = 1, 2, \dots, n_e(0) + 1$, 结合式(13)和式(15), 得到 $(\mu + \lambda + \varepsilon_1) p(n, 1) = \lambda p(n-1, 1) + \mu p(n+1, 1), n = n_e(0) + 2, \dots, n_e(1)$, 可知 $p(n, 1), n = n_e(0) + 1, \dots, n_e(1) + 1$ 是常系数差分方程:

$$\mu x_{n+1} - (\mu + \lambda + \varepsilon_1) x_n + \lambda x_{n-1} = 0, \quad n = n_e(0) + 2, \dots, n_e(1) \quad (20)$$

的解。对应的特征方程为 $\mu x^2 - (\mu + \lambda + \varepsilon_1) x + \lambda = 0$, 方程有两个实根:

$$r_{1,2} = \frac{\mu + \lambda + \varepsilon_1 \pm \sqrt{(\mu + \lambda + \varepsilon_1)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}$$

则式(20)对应的其次差分方程的解为 $p(n, 1) = A_2 r_1^n + B_2 r_2^n, n = n_e(0) + 1, \dots, n_e(1) + 1$, A_2 和 B_2 为常系数。再结合式(14)解得 $A_2 = b B_2$, 即有 $p(n, 1) = b B_2 r_1^n + B_2 r_2^n, n = n_e(0) + 1, \dots, n_e(1) + 1$ 。

为求出 B_1 和 B_2 , 需要先解出 $p(n_e(0)+2, 1)$ 。所以将已经解出的 $p(n_e(0)+1, 1)$ 和 $p(n_e(0), 1)$ 代入式 (12), 解出 $p(n_e(0)+2, 1) = cB_1 + dM$ 。所以可以通过联立 $p(n_e(0)+2, 1)$ 和 $p(n_e(0)+1, 1)$, 解出 $B_1 = w_1M, B_2 = w_2M$, 即可解出 $p(n, 1), n = 1, 2, \dots, n_e(1)+1$ 。

将 $p(1, 1)$ 代入式 (8), 得到 $p(0, 2) = w_3M$ 。由式 (16), 得出 $p(1, 2) = w_4M$ 。化简式 (17), 可得

$$p(n+1, 2) - p(n, 2) = -\frac{\varepsilon_1}{\mu_0} p(n, 1), n = 1, 2, \dots, n_e(1) \quad (21)$$

对于 $n = 1, 2, \dots, n_e(0)+1$, 通过累加式 (21), 得到

$$p(n, 2) - p(1, 2) = -\frac{\varepsilon_1}{\mu_0} \left(w_1 \frac{r_2(1-r_2^{n-1})}{1-r_2} + a \frac{\sigma(1-\sigma^{n-1})}{1-\sigma} - (a+w_1) \frac{r_1(1-r_1^{n-1})}{1-r_1} \right) M$$

结合已知的 $p(1, 2)$ 可得 $p(n, 2), n = 1, 2, \dots, n_e(0)+1$ 。对于 $n = n_e(0)+2, n_e(0)+3, \dots, n_e(1)+1$, 通过累加式 (21), 得到 $p(n, 2) - p(n_e(0)+1, 2) = -\frac{\varepsilon_1 w_2}{\mu_0} \left(\frac{r_2^{n_e(0)+1} - r_2^n}{1-r_2} + b \frac{r_1^{n_e(0)+1} - r_1^n}{1-r_1} \right) M$ 。又易知 $p(n_e(0)+1, 2) = w_5M$, 所以得出 $p(n, 2), n = n_e(0)+2, n_e(0)+3, \dots, n_e(1)+1$ 。

通过式 (15), 结合 $p(n, 1), n = 1, 2, \dots, n_e(1)+1$, 得到 $p(n, 3) = \frac{\varepsilon_2}{\xi_2} p(n, 1), n = 1, 2, \dots, n_e(1)+1$ 。

最后, 利用归一化条件:

$$\sum_{n=0}^{n_e(0)+1} p(n, 0) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} p(n, 1) + \sum_{n=0}^{n_e(1)+1} p(n, 2) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} p(n, 3) = 1$$

得到所有状态的稳态分布概率, 从而定理 2 得证。

当所有顾客都遵循阈值策略 $(n_e(0), n_e(1))$ 时, 系统的平均队长为

$$E(N) = \sum_{n=1}^{n_e(0)+1} np(n, 0) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} np(n, 1) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} np(n, 2) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} np(n, 3)$$

顾客的有效进队率为

$$\lambda_e = \lambda \left(\sum_{n=0}^{n_e(0)} p(n, 0) + \sum_{n=1}^{n_e(1)} p(n, 1) \right)$$

从而得到系统的平均社会收益为 $S = \lambda_e R - CE(N)$ 。

3 数值模拟

考虑部分主要系统及服务参数对于阈值策略和社会预期收益的影响, 通过具体的数值模拟分析它们关于参数的敏感性。首先, 给出进队阈值 $n_e(0)$ 关于启动时间 θ 和服务速率 μ 的变化趋势。先给定系统中的几个基础参数, 由定理 1 可得 $n_e(0)$ 与 ξ_1 和 λ 无关。给定以下参数的值: $R = 14, C = 1, \mu_0 = 1, \xi_2 = 0.2, \varepsilon_1 = 0.2, \varepsilon_2 = 0.2$ 。由图 3 可知进队阈值随着 μ 的变大, 整体走势是上升的, 且随着 θ 的逐渐变大, 进队阈值整体上移, 但上升的幅度逐渐变小, 说明 θ 的影响在变小。由此得出, 减少启动时间和增大服务速率可以让更多数量的顾客愿意进入队列。接下来研究故障发生率 ε_1 和 ε_2 对进队阈值 $n_e(1)$ 的影响。令 $R = 14, C = 1, \mu = 2, \mu_0 = 1, \xi_1 = 0.2, \xi_2 = 0.2$ 。从图 4 可以看出, 当 $0.1 \leq \varepsilon_2 \leq 0.4$ 时, 曲线整体下移, 但不会低于 13; 当 $0.7 \leq \varepsilon_2 \leq 1.4$ 时, 曲线整体上移, 但不会高于 12。这说明随着 ε_1 的增大, 其对于进队阈值的影响逐渐减小; 随着 ε_2 的增大, 曲线呈现两种完全不同的变化趋势, 分水岭出现在 ε_2 在 0.4~0.7 之间。可以预见曲线在 0.4~0.7 之间应该是水平的线, 这也说明了 ε_1 和 ε_2 之间会互相影响。

考虑社会平均收益关于 ε_1 和 ε_2 的敏感性。令 $R = 14, C = 1, \mu = 2, \mu_0 = 1, \xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.3, \theta = 0.8$ 。从图 5 可得社会平均收益随着 ε_1 的增加而减小, 且曲线之间的差距慢慢变小; 随着 ε_2 的增大而减小, 且曲线逐渐变得平缓。这说明不管任何一种故障出现速率变大, 社会平均收益均会降低。最后讨论社会平均收益关于 ξ_1 和 ξ_2 的敏感性。令 $R = 14, C = 1, \mu = 2, \mu_0 = 1, \varepsilon_1 = 0.3, \varepsilon_2 = 0.3, \theta = 0.8$ 。从图 6 可得, 社会平均收益随着 ξ_2 的增大而上升, 且曲线慢慢变得平缓; 随着 ξ_1 的增大而上升, 且曲线之间的差距在慢慢变小。这说明系统中提升故障维修率获得的收益逐渐减小, 所以当维修率到达一定程度时, 从提高维修率的角度去提升社会平均收益不经济。

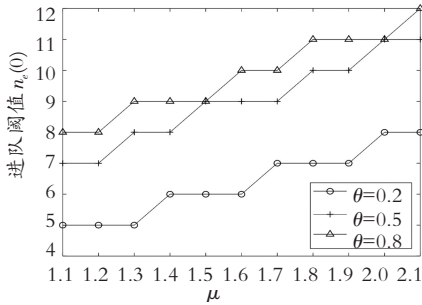


图 3 进队阈值 $n_e(0)$ 随 θ 和 μ 的变化趋势

Fig. 3 The change trend of threshold value $n_e(0)$ with θ and μ

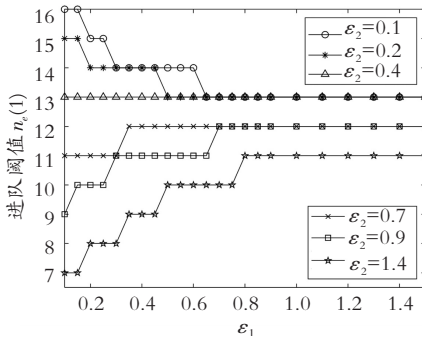


图 4 进队阈值 $n_e(1)$ 随 ϵ_1 和 ϵ_2 的变化趋势

Fig. 4 The change trend of threshold value $n_e(1)$ with ϵ_1 and ϵ_2

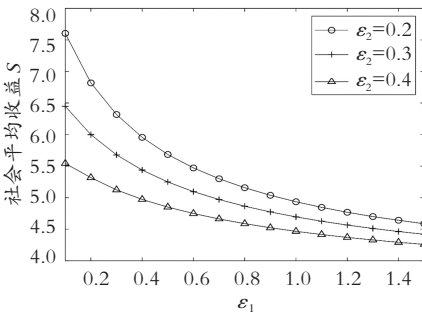


图 5 社会平均收益随 ϵ_1 和 ϵ_2 的变化趋势

Fig. 5 The change trend of social average return with ϵ_1 and ϵ_2

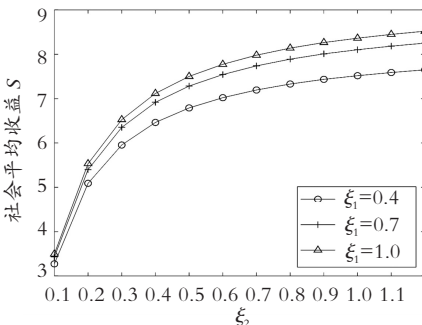


图 6 社会平均收益随 ξ_1 和 ξ_2 的变化趋势

Fig. 6 The change trend of social average return with ξ_1 and ξ_2

4 总 结

当队列人数和服务柜台工作状态都可知时,在具有两种不同故障类型的 M/M/1 排队系统中,对于采取延迟启动休假策略的服务台,得到了顾客的进队阈值以及社会预期收益表达式;对于感兴趣或实际可调节的参数,结合具体的数值模拟,分析了其对顾客的进队决策和预期社会收益的影响,为社会生产和日常生活中相应的服务系统控制提供理论依据。

参考文献 (References):

- [1] NAOR P. The regulation of queue size by levying tolls [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1969, 37(1): 15—24.
- [2] EDELSON N M, HILDERBRAND D K. Congestion tolls for poisson queuing processes [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1975, 43(1): 81—92.
- [3] KERNER Y. Equilibrium joining probabilities for an M/G/1 queue [J]. *Games & Economic Behavior*, 2011, 71(2): 521—526.
- [4] ECONOMOU A, KANTA S. Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs [J]. *Operations Research Letters*, 2008, 36(6): 696—699.
- [5] LI L, WANG J, ZHANG F. Equilibrium customer strategies in markovian queues with partial breakdowns [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, 66(4): 751—757.
- [6] XU B, XU X. Equilibrium strategic behavior of customers in the M/M/1 queue with partial failures and repairs [J]. *Operational Research*, 2018, 18(2): 273—292.
- [7] 张淞钰,徐秀丽.具有两类故障特性的 M/M/1 排队系统均衡分析 [J]. *运筹学学报*, 2019, 23(4): 131—142.
- [8] ZHANG Song-tai, XU Xiu-li. Equilibrium strategies of M/M/1 queue system with two types of breakdown [J]. *Journal of Operations Research*, 2019, 23(4): 131—142.
- [8] BURNETAS A, ECONOMOU A. Equilibrium customer

- strategies in a single server markovian queue with setup times[J]. *Queueing Systems*, 2007, 56(3-4):213—228.
- [9] SUN W, GUO P F, TIAN N S. Equilibrium threshold strategies in observable queuing systems with setup/closedown times[J]. *Central European Journal of Operations Research*, 2010, 18(3):241—268.
- [10] SUN W, WANG Y L, TIAN N S. Pricing and setup/closedown policies in unobservable queues with strategic customers[J]. *A Quarterly Journal of Operations Research*, 2012, 10(3):287—311.
- [11] CHEN P S, ZHOU W H, ZHOU Y W. Equilibrium customer strategies in the queue with threshold policy and setup times[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015(1):1—11.
- [12] CHEN P S, ZHOU Y W. Equilibrium balking strategies in the single server queue with setup times and breakdowns[J]. *Operational Research*, 2015, 15(2):213—231.

Equilibrium Strategies for M/M/1 Queuing System with Setup Time and Two Types of Failures

WANG Wen-jie, LIU Li-wei, YE Qing-qing

(1. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information and Technology, Nanjing 200044, China)

Abstract: In the M/M/1 queuing system with delay setup time and two types of failures, the strategy that customers should follow to enter the queue and the average social benefits by using this strategy are considered. The service desk uses the delay setup vocation mode, which may cause two kinds of failures: complete failure and incomplete failure. Under the condition that the system information is fully observable, according to linear “benefit-loss” function, the expected reward equation of customers is given. Moreover, the steady-state distribution of the queuing system is obtained by system state transition in the stable state diagram and by combining with the normalization equation. At the end of this article, numerical examples show the sensitivity of customers balking strategies and social average benefit to system parameters.

Key words: complete failure; incomplete failure; delay setup; equilibrium entry strategy; social average benefit

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

汪文杰,刘力维,叶晴晴. 带有启动时间和两类故障的 M/M/1 系统均衡策略分析[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2022,39(2):38—45.

WANG Wen-jie, LIU Li-wei, YE Qing-qing. Equilibrium strategies for M/M/1 queuing system with setup time and two types of failures[J]. *Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)*, 2022,39(2):38—45.