doi:10.16055/j. issn. 1672-058X. 2021. 0006. 014

随机利率和死亡率下基于终止风险的 DB 养老金计划保费估值*

何学强,王传玉,余　鑫
(安徽工程大学 数理与金融学院,安徽 芜湖 241000)

摘　要:针对随机利率和死亡率以及终止风险对 DB 养老金计划的养老金支付问题的影响,提出了在随机利率和死亡率条件下养老金福利担保公司(Pension Benefit Guaranty Corporation,PBGC)为基于提前终止和遇险终止风险的 DB 养老金计划提供担保的保费估值问题。假设养老基金投资于无风险金融资产和有风险金融资产,随机利率、死亡率以及养老基金和计划发起人资产均为随机过程;提出提前终止和遇险终止触发的条件,并建立在两种终止情况下的保费估值模型;最后通过数值模拟分析了随机利率和死亡率对保费的影响,并与 Qian 的保费进行比较;结果表明:随机利率和死亡率的引入使得保费相较于 Qian 的保费有所增加,虽然这一结果给计划发起人增加了负担,但是却降低了 PBGC 所承担的风险。

关键词:DB 养老金计划;PBGC;随机利率;死亡率;提前终止;遇险终止
中图分类号:F840.3　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2021)06-0103-11

0　引　言

在养老金计划的设计中,根据缴费和支付方式的不同,可以分为确定给付(Defined Benefit,DB)型和确定缴费(Defined Contribution,DC)型计划。DB 养老金计划中养老基金是养老金支付的主要来源,养老金发起人在 DB 养老金计划中有道德义务向养老金计划提供支持。为了对冲投资风险, PBGC 为 DB 养老金计划提供担保。作为回报,养老金计划发起人向 PBGC 支付基于风险的保费。对养老基金和养老金计划发起人资产分别定义了一个临界值,如果养老基金低于其临界值,DB 养老金计划就会发生提前终止;如果计划发起人资产低于其临界值,DB 养老金计划就会发生遇险终止。一旦 DB 养老金计划出现这两种终止风险,员工退休时的收益就得不到保障。此时,PBGC 的作用就得到体现。

PBGC 是根据 1974 年的“雇员退休收入保障法”成立的美国政府机构,以确保 DB 养老金计划参与者的利益,同时规定 PBGC 随时准备弥补终止的养老基金的任何短缺。因为 PBGC 是政府机构,所以它的资产有保障,不会出现赤字情况。

关于 PBGC 保费计算的一系列工作中,最早的工作可以追溯到 Sharpe[1]。在文献[1]中,假定 PBGC 是解决养老基金赤字的第一条途径;Marcus[2]将 PBGC 的负债建模为远期合约,这使得 PBGC 能够从终止的计划中获得盈余,然而这是不太现实的,因为法律不允许 PBGC 的责任是消极的;Lewis[3]通过为公司的非养老金资产建立独立的随机过程来计算养老金保险的理论保费、非养老金债务、养老基金和养老金负债,并将 PBGC 的负债建模为看跌期权合约;Bodie[4]和 Brown[5]的工作表明,

收稿日期:2020-11-11;**修回日期**:2021-01-15.
* **基金项目**:国家自然科学基金(6150301);安徽省高校自然科学重点研究项目(KJ2018A0120);安徽工程大学校级科研重点项目(XJKY08201901).
作者简介:何学强(1994—),男,安徽安庆人,硕士研究生,从事数理金融研究.

从 PBGC 的角度来看,统一保费是错误的,而定价不当的养老保险对计划发起人是有害的;Stewart[6] 提供了背后的经济理由和相关后果,经济理由是对有风险的公司来说,收取固定的保费会导致股票的市场价值增加,从而为赞助商提供更多风险和资金的激励。

Kalra[7] 首先考虑了养老基金的提前终止,并研究了这类非自愿终止的保费评估问题;Chen[8] 在完备市场下讨论了养老基金的提前终止,假设 PBGC 作为二级保险担保发挥作用,考虑到 PBGC 仅涵盖养老基金的剩余赤字,并建立养老基金和发起人资产模型,该模型解释了养老基金和发起人公司的资产联合动态,有效地确定 PBGC 提供的基于风险的养老金保险的保费,还用积分的方法得到这种基于提前终止风险的保费的封闭定价公式;Chen[8] 扩展了 Chen[8] 的模型,并且在 Chen[8] 的基础上建立了养老金担保公司(PBGC)提供的基于风险的保险费计算模型,考虑到养老基金和计划发起人的投资政策,还考虑到发起人资金不足引发的遇险终止,实证地说明了对 100 家最大的美国 DB 赞助公司的理论定价公式,同时还观察到,在基于风险的保费计算中,资金比率和杠杆是主要的风险因素;Qian[10] 首次同时在提前终止和遇险终止条件下研究 PBGC 为 DB 养老金计划担保所收取的保费估值问题,研究结果表明,同时考虑两类终止情况下的保费比考虑单一终止情况下的保费低,说明 Qian[10] 同时考虑两类终止降低了 DB 养老金计划发生赤字的概率,进而 PBGC 对养老金计划提供援助的概率就会降低,这样 PBGC 收取的保费自然就降低了。

文献[1—10]逐步完善了 PBGC 为养老金计划担保的保费计算问题的研究,从最开始不考虑养老金计划终止的情况,到后来单独考虑提前终止或遇险终止,再到后来同时考虑两种终止情况。虽然这些研究对养老金计划机制的完善提供了理论依据,但是之前的研究都是在理想的条件下进行的,例如固定利率和死亡率以及无通货膨胀,这就会导致研究结果与现实会有较大的差异,即这些研究结果的应用伴随着一定的风险。而在金融市场中,利率和死亡率是随机变化的,因此,本文就在前人的基础上引入随机利率和随机死亡率因素,这样得出的结果会与现实更接近。

本文引用了 Qian[10] 中的随机利率和死亡率模型,建立了养老金计划受益人在退休时应得养老金、养老基金资产和计划发起人资产模型,得到了随机利率和死亡率下基于终止风险的 DB 养老金计划的保费估值。通过数值模拟分析了随机利率和死亡率对 PBGC 保费的影响,并与 Qian[10] 的保费估值进行了比较。

1 构建模型

假设养老金计划在 0 时刻向 x 岁的一名代表受益人发放,该福利在 T 时作为一笔一次性付款支付给 R 岁的该受益人,那么支付的时间为 $T=R-x$。根据文献[10],可以假设雇主有义务支付给受益人的福利为

$$B_R=\Big(\sum_{j=T+1}^{\infty}{}_jp_x\ \mathrm{e}^{-\int_T^j r_t\mathrm{d}t}F\Big)+F$$

在上式中,${}_jp_x$ 是 x 岁的代表受益人至少活了 j 年的概率,$r_t>0$ 是无风险利率,F 是规定的年度福利,具体取决于雇员服务年数、退休年龄、福利乘数和历史收入。主要目标是研究养老金计划发起人和养老基金对 PBGC 保费支付的影响。

假设所有过程和随机变量都定义在带流概率空间$(\Omega,F,\{F_t\}_{0\leqslant t\leqslant T},P)$上,且满足一般条件,其中 P 表示风险中性测度。

首先假设随机利率满足 Vasicek 利率模型:

$$\mathrm{d}r_t=k(\alpha-r_t)\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}W_t^1 \tag{2}$$

其中,k 和 α 是正常数系数,σ_2是随机利率的波动率,W_t^1 是标准布朗运动,通过伊藤公式解得

$$r_t=r_0\mathrm{e}^{-kt}+\alpha(1-\mathrm{e}^{-kt})+\sigma_2\int_0^t\mathrm{e}^{-k(t-u)}\mathrm{d}W_U^1$$

然后假设随机死亡率满足如下模型:

$$\mathrm{d}\mu_t=a\mu_t\mathrm{d}t+b\mathrm{d}W_t^2 \tag{3}$$

其中,a 是常数系数,b 是死亡率的波动率,W_t^2 是标准布朗运动,解得

$$\mu_t=\mu_0\ \mathrm{e}^{at}+\int_0^t\mathrm{e}^{a(t-s)}b\mathrm{d}W_S^2$$

则 ${}_jp_x=E\Big[\exp\Big(-\int_0^j\mu_{x+s}\mathrm{d}s\Big)\Big]$。

然而完备的金融市场是由无风险金融资产(例如银行存款)和有风险金融资产(例如股票)组成。

两种资产的定价过程如下:

$$\mathrm{d}B_t=r_tB_t\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}S_t=r_tS_t\mathrm{d}t+\sigma_1S_t\mathrm{d}W_t^3$$

其中,σ_1是风险资产的波动率,W_t^3是标准布朗运动。用$\bar{\pi}$和 $1-\bar{\pi}$分别表示养老基金投资风险资产

和无风险资产的比例,因此可以表示出养老基金的总资产如下:

$$\mathrm{d}X_t=\frac{X_t(1-\overline{\pi})}{B_t}\mathrm{d}B_t+\frac{X_t\overline{\pi}}{S_t}\mathrm{d}S_t=$$
$$r_tX_t\mathrm{d}t+\overline{\pi}X_t\sigma_1\mathrm{d}W_t^3 \tag{4}$$

现在假设,如果养老基金表现良好,那么所有福利都将由养老基金自己支付;如果养老基金不足,那么计划发起人资产将是支付福利的潜在资源。计划发起人资产A_t满足下面的微分方程:

$$\mathrm{d}A_t=r_tA_t\mathrm{d}t+\sigma_AA_t\mathrm{d}W_t^4 \tag{5}$$

其中,σ_A是计划发起人资产的波动率,W_t^4是标准布朗运动,并且W_t^1,W_t^2,W_t^3和W_t^4相互独立。

2　养老金计划的资金提供与方案设计

本节将分析计划发起人和 PBGC 对养老金计划提供的资金情况。对于没有提前终止和遇险终止的情况下,无论是计划发起人还是 PBGC,都没有义务对养老金计划提供资金援助。本文研究的重点是 DB 养老金计划的提前终止和遇险终止。

为了描述两种类型的终止,需要介绍一些关键的符号。对于养老基金的提前终止,定义了养老基金在 t 时刻的临界值是 $\eta B_R\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}$,其中$B_R\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}$表示未来退休金支付在 t 时刻的贴现值,η 是终止触发时的资产比例,也就是说,是一种乘数,允许养老基金在一段宽限期内恢复,以防它暂时表现不佳。

因此,可以在养老基金第一次低于或越过临界值时,得到提前终止时间如下:

$$\tau_1=\inf\{t\mid X_t\leqslant\eta B_R\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}\} \tag{6}$$

在式(6)中,如果 $\eta\leqslant0$,终止将永远不会发生,而$\eta\geqslant1$,则意味着 PBGC 将作为完全资助的计划结束。因此,可以合理地假设 $\eta\in(0,1)$,并且要求 $X_0>\eta B_R\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}$,以确保最初的养老基金不会提前终止。

遇险终止与计划发起人资产有关,通常来说,计划发起人会发布公司债务。假定计划发起人公司有责任在 t 时偿还的债务为 $\theta A_0\mathrm{e}^{vt}$,$0<\theta<1$ 是其初始杠杆率,v 是反映公司债务增长率的预定常数,A_0是计划发起人资产的初始价值。θA_0是计划发起人的初始债务水平。现在,使用停止时间τ_2来描述计划发起人第一次未能支付债务和继续经营。这种终止的临界值被定义为$\xi A_0\mathrm{e}^{vt}$,其中,ξ 是一个比计划发起人的杠杆比率 θ 更高的参数,假设计划发起人有道德上的义务来弥补所要求的养老金福利的一些赤字。此外,还规定了 $\xi<1$ 的技术条件,以确保发起人在 0 时刻不违约。因此,得到提前终止时间如下:

$$\tau_2=\inf\{t\mid A_t\leqslant\xi A_0\mathrm{e}^{vt}\}$$

2.1　计划发起人对 DB 养老金计划提供的资金

对于标准终止,PBGC 不提供任何资金,因此,集中研究其他两种情况:$\tau_1>\tau_2$和$\tau_1\leqslant\tau_2$。

如果$\tau_1>\tau_2$,则计划发起人公司破产,并将首先触发遇险终止。此外,还可将情况$\tau_1>\tau_2$分成两个子情况:$\tau_2\leqslant T$ 和$\tau_2>T$。

(1) 计划发起人资产在 T 时刻之前低于临界值,即 $\tau_2\leqslant T$,则$X_{\tau_2}>\eta B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}$和$A_{\tau_2}=\xi A_0\mathrm{e}^{v\tau_2}$成立。

此时养老基金的可能结果是:

① 养老基金表现得很好,即 $X_{\tau_2}>B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}$。

这意味着养老基金资产的价值大于所承诺的养老金福利付款的贴现值。这种情况下,计划发起人和 PBGC 都不要提供资金。

② 养老基金不足以支付所有贴现的养老金福利,即 $X_{\tau_2}<B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}$。

虽然 $X_{\tau_2}>\eta B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}$,但还有可能使得$X_{\tau_2}<B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}$,这时计划发起人提供的资金为

$$\begin{aligned}S^s(\tau_2)=&(B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}-X_{\tau_2})\times\\&I_{(B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}-X_{\tau_2}<(\xi-\theta)A_0\mathrm{e}^{v\tau_2})}\times\\&I_{(\eta B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}<X_{\tau_2}<B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s})}+\\&(\xi-\theta)A_0\mathrm{e}^{v\tau_2}I_{(B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}-X_{\tau_2}\geqslant(\xi-\theta)A_0\mathrm{e}^{v\tau_2})}\times\\&I_{(\eta B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}<X_{\tau_2}<B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s})}\end{aligned}$$

其中,$T_{(A)}$是示性函数,$B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_s\mathrm{d}s}-X_{\tau_2}$指计划发起人的资产足以满足$\tau_2$时刻的养老金福利时,发起人能够承受的部分。

因此,这种情况下发起人将能够填补在此情况下养老基金的不足。另一种情况是,当遇险终止发生时,发起人在清偿到期债务后没有剩余多少资金,此时提供的资金是$(\xi-\theta)A_0\mathrm{e}^{v\tau_2}$。

(2) 发起人资金低于临界值在时刻 T 之后,即$\tau_2>T$。

这意味着$X_T>\eta B_R$且$A_T>\xi A_0\mathrm{e}^{vT}$成立。当$\tau_2\geqslant T$时,养老基金在到期日 T 自然关闭。值得注意的是,如果$X_T\geqslant B_R$,那么无论是计划发起人还是 PBGC 都不需要介入并负责养老金的支付,因此,将专注于$X_T<B_R$继续进行分析。此时发起人公司提供的资金

如下：

$$S^s(T)=(B_R-X_T)I_{(0<B_R-X_T<A_T-\theta A_0 e^{vT})}I_{(X_T>\eta B_R)}\times I_{(A_T>\xi A_0 e^{vT})}+(A_T-\theta A_0 e^{vT})I_{(B_R-X_T\geqslant A_T-\theta A_0 e^{vT})}I_{(X_T>\eta B_R)}\times I_{(A_T>\xi A_0 e^{vT})}$$

如果$\tau_1\leqslant\tau_2$，提前终止将在遇险终止之前触发。此时，也考虑两种情况：$\tau_1\leqslant T$ 和$\tau_1>T$。

（3）养老基金 T 时刻前资金不足，即$\tau_1\leqslant T$。

这意味着 $X_{\tau_1}=\eta B_R e^{-\int_{\tau_1}^T r_s ds}$ 和$A_{\tau_1}=\xi A_0 e^{v\tau_1}$ 成立。这时养老基金面临提前终止，对于计划发起人资产，有

① 计划发起人资产有部分偿付能力，即 $B_R e^{-\int_{\tau_1}^T r_s ds}-X_{\tau_1}>A_{\tau_1}-\theta A_0 e^{v\tau_1}$。在这种情况下，PBGC 提供了发起人无法承担的养老金。

② 计划发起人资产表现足够好，即$B_R e^{-\int_{\tau_1}^T r_s ds}-X_{\tau_1}\leqslant A_{\tau_1}-\theta A_0 e^{v\tau_1}$。受益人的养老金福利可以由计划发起人自己处理。

基于以上分析，可以从发起人获得资金如下：

$$S^s(\tau_1)=(A_{\tau_1}-\theta A_0 e^{v\tau_1})\times I_{((1-\eta)B_R e^{-\int_{\tau_1}^T r_s ds}>A_{\tau_1}-\theta A_0 e^{v\tau_1})}\times I_{(A_{\tau_1}>\xi A_0 e^{v\tau_1})}+(1-\eta)B_R e^{-\int_{\tau_1}^T r_s ds}\times I_{((1-\eta)B_R e^{-\int_{\tau_1}^T r_s ds}>A_{\tau_1}-\theta A_0 e^{v\tau_1})}\times I_{(A_{\tau_1}>\xi A_0 e^{v\tau_1})}$$

（4）养老基金低于临界值的时间不早于时刻 T，即$\tau_1>T$，此时有$X_T>\eta B_R$和$A_T>\xi A_0 e^{vT}$成立。当$\tau_1>T$时，养老基金在到期日 T 自然关闭。只需要关注$X_T<B_R$的情况，因为$X_T\geqslant B_R$意味着养老基金足以支付所承诺的养老金。

因此，可以得出：

$$S^s(T)=(B_R-X_T)I_{(0<B_R-X_T<A_T-\theta A_0 e^{vT})}I_{(X_T>\eta B_R)}\times I_{(A_T>\xi A_0 e^{vT})}+(A_T-\theta A_0 e^{vT})I_{(B_R-X_T\geqslant A_T-\theta A_0 e^{vT})}I_{(X_T>\eta B_R)}\times I_{(A_T>\xi A_0 e^{vT})}$$

综合上述 4 种情况，计划发起人提供的全部资金为

$$S^S=[S^s(\tau_2)I_{(\tau_2\leqslant T)}+S^s(T)I_{(\tau_2>T)}]I_{(\tau_2<\tau_1)}+[S^s(\tau_1)I_{(\tau_1\leqslant T)}+S^s(T)I_{(\tau_1>T)}]I_{(\tau_2\geqslant\tau_1)}$$

2.2 PBGC 对 DB 养老金计划提供的资金

与 Chen[10] 和 Chen[11] 相一致，PBGC 是养老金支付过程中的第三条途径，它涵盖了养老基金和计划发起人资产无法支付的赤字。因此，PBGC 按 4 种情况分别提供的资金：

（1）如果$\tau_2<\tau_1$且$\tau_2\leqslant T$，即养老金计划发生遇险终止，则

$$S^P(\tau_2)=(B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_s ds}-X_{\tau_2})(-(\xi-\theta)A_0 e^{v\tau_2})\times I_{(B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_s ds}-X_{\tau_2}\geqslant(\xi-\theta)A_0 e^{v\tau_2})}\times I_{(\eta B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_s ds}<X_{\tau_2}<B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_s ds})}\tag{7}$$

（2）如果$\tau_2<\tau_1$且$\tau_2>T$，即养老基金在到期日 T 自然关闭，则

$$S^P(T)=(B_R-X_T-(A_T-\theta A_0 e^{vT}))\times I_{(B_R-X_T\geqslant A_T-\theta A_0 e^{vT})}I_{(X_T>\eta B_R)}I_{(A_T>\xi A_0 e^{vT})}\tag{8}$$

（3）如果$\tau_1\leqslant\tau_2$且$\tau_1\leqslant T$，即养老金计划发生提前终止，则

$$S^P(\tau_1)=((1-\eta)B_R e^{-\int_{\tau_1}^T r_s ds}-(A_{\tau_1}-\theta A_0 e^{v\tau_1}))\times I_{((1-\eta)B_R e^{-\int_{\tau_1}^T r_s ds}>A_{\tau_1}-\theta A_0 e^{v\tau_1})}I_{(A_{\tau_1}>\xi A_0 e^{v\tau_1})}$$

（4）如果$\tau_1\leqslant\tau_2$且$\tau_1>T$，即养老基金在到期日 T 自然关闭，则

$$S^P(T)=(B_R-X_T-(A_T-\theta A_0 e^{vT}))\times I_{(B_R-X_T\geqslant A_T-\theta A_0 e^{vT})}I_{(X_T>\eta B_R)}I_{(A_T>\xi A_0 e^{vT})}$$

结合以上 4 种情况，得出 PBGC 提供的资金为

$$S^P=[S^P(\tau_2)I_{(\tau_2\leqslant T)}+S^P(T)I_{(\tau_2>T)}]I_{(\tau_2<\tau_1)}+[S^P(\tau_1)I_{(\tau_1\leqslant T)}+S^P(T)I_{(\tau_1>T)}]I_{(\tau_2\geqslant\tau_1)}$$

3 PBGC 为 DB 养老金计划担保的保费估值

在本节中，推导随机利率和死亡率下基于终止风险的 DB 养老金计划的保费估值 P。基于风险的保费定义为S^P的贴现值的期望，如式(5)所示：

$$P=E\left\{[e^{-\int_0^{\tau_2}r_s ds}S^P(\tau_2)I_{(\tau_2\leqslant T)}+e^{-\int_0^T r_s ds}S^P(T)I_{(\tau_2>T)}]\times I_{(\tau_2<\tau_1)}+\left[e^{-\int_0^{\tau_1}r_s ds}S^P(\tau_1)I_{(\tau_1\leqslant T)}+e^{-\int_0^T r_s ds}S^P(T)I_{(\tau_1>T)}\right]I_{(\tau_2\geqslant\tau_1)}\right\}\tag{9}$$

为了简化符号，设$Z_{1t}=\ln\dfrac{X_t}{X_0}$，$Z_{2t}=\ln\dfrac{A_t}{A_0}$。

引理 1 (Z_1,Z_2,t)服从二元正态分布，且满足：

$$Z_{1t}=\int_0^t r_s ds-\frac{\bar{\pi}^2\sigma_1^{\ 2}}{2}t+\bar{\pi}\sigma_1 W_t^3$$

$$Z_{2t}=\int_0^t r_s ds-\frac{\sigma_A^{\ 2}}{2}t+\sigma_A W_t^4$$

Z_{1t}，Z_{2t}，(Z_1,Z_2,t)密度函数分别为

$$f_1(Z_1,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\bar{\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{(Z_1-\mu_1)}{2\bar{\pi}^2\sigma_1^{\ 2}t}\right)$$

$$f_2(Z_2,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma_A}\exp\left(-\frac{(Z_2-\mu_2)}{2\,\sigma_A{}^2 t}\right)$$

$$f(Z_1,Z_2,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\bar{\pi}\sigma_1\sigma_A}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(Z_1-\mu_1)}{\bar{\pi}^2\sigma_1{}^2 t}+\frac{(Z_2-\mu_2)}{\sigma_A{}^2 t}\right)\right\}$$

其中 $t\in[0,T]$,

$$\mu_1=E(Z_{1t})=\frac{\alpha\,\mathrm{e}^{-kt}-r_0\mathrm{e}^{-kt}-r_0+\alpha}{k}-\frac{\bar{\pi}^2\sigma_1{}^2}{2}t$$

$$\mu_2=E(Z_{2t})=\frac{\alpha\,\mathrm{e}^{-kt}-r_0\mathrm{e}^{-kt}-r_0+\alpha}{k}-\frac{\sigma_A{}^2}{2}t$$

证明　由伊藤公式可以得到式(4)和式(5)的解如下:

$$X_t=X_0\exp\left(\int_0^t r_s\mathrm{d}s-\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t+\bar{\pi}\,\sigma_1\,W_t^3\right)$$

$$A_t=A_0\exp\left(\int_0^t r_s\mathrm{d}s-\frac{\sigma_A{}^2}{2}t+\sigma_A\,W_t^4\right)$$

通过回顾布朗运动的一些基本性质,可以立即得到所需的结果。因此,在这里省略了其余证明过程。

引理 2　在随机利率和死亡率以及两种终止风险的条件下,设 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 分别表示 τ_1 和 τ_2 的密度函数,则

$$g_1(t)=\frac{-\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)+\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{2t\,\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\times\varphi\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)+\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\right)+$$
$$\frac{X_0}{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}\,\frac{-\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)-\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{2t\,\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\times\varphi\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)-\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\right)$$

$$g_2(t)=\frac{-\ln\xi+vt-\int_0^t r_s\mathrm{d}s+\frac{\sigma_A{}^2}{2}t}{2t\,\sigma_A\,\sqrt{t}}\times\varphi\left(\frac{\ln\xi+vt-\int_0^t r_s\mathrm{d}s+\frac{\sigma_A{}^2}{2}t}{\sigma_A\,\sqrt{t}}\right)+$$
$$\frac{-\ln\xi-vt+\int_0^t r_s\mathrm{d}s-\frac{\sigma_A{}^2}{2}t}{2t\,\sigma_A\,\sqrt{t}}\,\xi^{\frac{2\left(r_t-v-\frac{\sigma_A{}^2}{2}\right)}{\sigma_A{}^2}}\times\varphi\left(\frac{\ln\xi-vt+\int_0^t r_s\mathrm{d}s-\frac{\sigma_A{}^2}{2}t}{\sigma_A\,\sqrt{t}}\right)$$

其中,$\varphi(\cdot)$ 表示标准正态随机变量的概率密度函数,$t\in[0,T]$。

证明

由 Harrison[12] 可知:

$$p(\tau_1<t)=\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)+\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\right)+\frac{X_0}{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)-\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\right)\tag{10}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态随机变量的累积分布函数。

式(10)对 t 求导,有

$$g_1(t)=\frac{-\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)+\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{2t\,\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\times\varphi\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)+\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\right)+$$
$$\frac{X_0}{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}\,\frac{-\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)-\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{2t\,\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\times\varphi\left(\frac{\ln\left(\frac{\eta\,B_R\,\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}}{X_0}\right)-\frac{\bar{\pi}^2\,\sigma_1{}^2}{2}t}{\bar{\pi}\,\sigma_1\,\sqrt{t}}\right)$$

同理可得:

$$p(\tau_2<t)=\Phi\left(\frac{\ln\xi+vt-\int_0^t r_s\mathrm{d}s+\frac{\sigma_A{}^2}{2}t}{\sigma_A\,\sqrt{t}}\right)+\xi^{\frac{2\left(r_t-v-\frac{\sigma_A{}^2}{2}\right)}{\sigma_A{}^2}}\Phi\left(\frac{\ln\xi-vt+\int_0^t r_s\mathrm{d}s-\frac{\sigma_A{}^2}{2}t}{\sigma_A\,\sqrt{t}}\right)$$

$$g_2(t)=\frac{-\ln\xi+vt-\int_0^t r_s\mathrm{d}s+\frac{\sigma_A{}^2}{2}t}{2t\,\sigma_A\,\sqrt{t}}\times\varphi\left(\frac{\ln\xi+vt-\int_0^t r_s\mathrm{d}s+\frac{\sigma_A{}^2}{2}t}{\sigma_A\,\sqrt{t}}\right)+$$

$$\frac{-\ln\xi-vt+\int_0^t r_s\mathrm{d}s-\frac{\sigma_A^{\ 2}}{2}t}{2t\,\sigma_A\sqrt{t}}\xi^{\frac{2\left(r_t-v-\frac{\sigma_A^2}{2}\right)}{\sigma_A^2}}\times$$

$$\varphi\left(\frac{\ln\xi-vt+\int_0^t r_s\mathrm{d}s-\frac{\sigma_A^{\ 2}}{2}t}{\sigma_A\sqrt{t}}\right)$$

其中,

$$\int_0^T r_t\mathrm{d}t=\int_0^T(r_0\,\mathrm{e}^{-kt}+\alpha(1-\mathrm{e}^{-kt}))\,\mathrm{d}t+\int_0^T\sigma_2\frac{1-\mathrm{e}^{-k(T-t)}}{k}\mathrm{d}W_t^1$$

$$\int_0^t r_t\mathrm{d}t=\int_0^t(r_0\,\mathrm{e}^{-kt}+\alpha(1-\mathrm{e}^{-kt}))\,\mathrm{d}t+\int_0^t\sigma_2\frac{1-\mathrm{e}^{-k(t-u)}}{k}\mathrm{d}W_u^1$$

为了得出两种终止情况下的保费,将式(9)分解成4个部分,即

① 养老金计划遇险终止时,DB 养老金计划的保费估值:

$$P_1=E(\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_2}r_s\mathrm{d}s}S^P(\tau_2)\,I_{(\tau_2\leqslant T)}\,I_{(\tau_2<\tau_1)})$$

② 养老金计划在计划到期日 T 自然终止时,DB 养老金计划的保费估值:

$$P_2=E(\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}S^P(T)\,I_{(\tau_2>T)}\,I_{(\tau_2<\tau_1)})$$

③ 养老金计划提前终止时,DB 养老金计划的保费估值:

$$P_3=E(\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_1}r_s\mathrm{d}s}S^P(\tau_1)\,I_{(\tau_1\leqslant T)}\,I_{(\tau_2\geqslant\tau_1)})$$

④ 养老金计划在计划到期日 T 自然终止时,DB 养老金计划的保费估值:

$$P_4=E(\mathrm{e}^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}S^P(T)\,I_{(\tau_1>T)}\,I_{(\tau_2\geqslant\tau_1)})$$

定理 1 在随机利率式(1)和死亡率式(2)的条件下,考虑提前终止和遇险终止两种风险,则 DB 养老金计划的保费估值为

$$P=P_1+P_2+P_3+P_4$$

其中,

$$P_1=\int_{\max(\min(\tau_2),0)}^{T}\int_{t_2}^{\infty}\int_{n_1}^{m_1}\mathrm{e}^{-\int_0^{t_2}r_t\mathrm{d}t}\times(B_R\,\mathrm{e}^{-\int_{t_2}^T r_t\mathrm{d}t}+(\theta-\xi)A_0\,\mathrm{e}^{vt_2}-X_0\,\mathrm{e}^{z_1})\times f_1(Z_1,t_2)\,g(t_1,t_2)\,\mathrm{d}Z_1\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

$$P_2=\int_T^{\infty}\int_{t_2}^{\infty}\int_{n_2}^{m_2}\int_{n_3}^{m_3}\mathrm{e}^{-\int_0^T r_t\mathrm{d}t}\times(B_R+\theta A_0\,\mathrm{e}^{vT}-X_0\,\mathrm{e}^{Z_1}-A_0\,\mathrm{e}^{Z_2})\times f(Z_1,Z_2,T)\,g(t_1,t_2)\,\mathrm{d}Z_2\mathrm{d}Z_1\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

$$P_3=\int_{\max(\min(\tau_1),0)}^{T}\int_{t_1}^{\infty}\int_{n_4}^{m_4}\mathrm{e}^{-\int_0^{t_1}r_t\mathrm{d}t}\times((1-\eta)B_R\,\mathrm{e}^{-\int_{\tau_1}^T r_t\mathrm{d}t}+\theta A_0\,\mathrm{e}^{vt_1}-A_0\,\mathrm{e}^{z_2})\times f_2(Z_2,t_1)\,g(t_1,t_2)\,\mathrm{d}Z_2\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

$$P_4=\int_T^{\infty}\int_{t_1}^{\infty}\int_{n_2}^{m_2}\int_{n_3}^{m_3}\mathrm{e}^{-\int_0^T r_t\mathrm{d}t}\times(B_R+\theta A_0\,\mathrm{e}^{vT}-X_0\,\mathrm{e}^{Z_1}-A_0\,\mathrm{e}^{Z_2})\times f(Z_1,Z_2,T)\,g(t_1,t_2)\,\mathrm{d}Z_2\mathrm{d}Z_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

其中,

$$n_1=\ln\frac{\eta B_R\,\mathrm{e}^{-\int_{t_2}^T r_t\mathrm{d}t}}{X_0}$$

$$m_1=\ln\frac{B_R\,\mathrm{e}^{-\int_{t_2}^T r_t\mathrm{d}t}-(\xi-\theta)A_0\,\mathrm{e}^{vt_2}}{X_0}$$

$$n_2=\ln\frac{\eta B_R}{X_0}$$

$$m_2=\ln\frac{B_R-(\xi-\theta)A_0\,\mathrm{e}^{vT}}{X_0}$$

$$n_3=\ln\xi\,\mathrm{e}^{vT}$$

$$m_3=\ln\frac{B_R-X_0\,\mathrm{e}^{Z_{1T}}+\theta A_0\,\mathrm{e}^{vT}}{A_0}$$

$$n_4=\ln\xi\,\mathrm{e}^{vt_1}$$

$$m_4=\ln\frac{(1-\eta)B_R\,\mathrm{e}^{-\int_{t_1}^T r_t\mathrm{d}t}+\theta A_0\,\mathrm{e}^{vt_1}}{A_0}$$

其中,τ_1的取值范围满足以下不等式:

$$\ln(A_0(\xi-\theta))+v\,\tau_1<\ln(B_R(1-\eta))+\frac{r_0-\alpha}{k}\mathrm{e}^{-kT}+\alpha(\tau_1-T)+\frac{\alpha-r_0}{k}\mathrm{e}^{-k\tau_1}$$

τ_2的取值范围满足以下不等式:

$$\ln(A_0(\xi-\theta))+v\,\tau_2<\ln(B_R(1-\eta))+\frac{r_0-\alpha}{k}\mathrm{e}^{-kT}+\alpha(\tau_2-T)+\frac{\alpha-r_0}{k}\mathrm{e}^{-k\tau_2}$$

证明

由式(9)可知:

$$P=P_1+P_2+P_3+P_4$$

由式(7),得

$$P_1=E[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_2}r_t\mathrm{d}t}S^P(\tau_2)\,I_{(\tau_2\leqslant T)}\,I_{(\tau_2<\tau_1)}]=$$

$$E[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_2}r_t\mathrm{d}t}(B_R\,\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_t\mathrm{d}t}-X_{\tau_2}-(\xi-\theta)A_0\,\mathrm{e}^{v\tau_2})\times I_{(B_R\mathrm{e}^{-\int_{\tau_2}^T r_t\mathrm{d}t}-X_{\tau_2}\geqslant(\xi-\theta)A_0\mathrm{e}^{v\tau_2})}\times$$

$$I_{(\eta B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt} < X_{\tau_2} < B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt})}\ I_{(\tau_2 \leqslant T)}\ I_{(\tau_2 < \tau_1)}\ ] \quad (11)$$

为了让式(11)为正值，上述示性函数中的所有事件都必须发生。当事件$\{\eta B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt} < X_{\tau_2}\}$和$\{X_{\tau_2} < B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt} - (\xi-\theta) A_0 e^{v\tau_2}\}$同时发生，则有

$$\eta B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt} < B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt} - (\xi - \theta) A_0 e^{v\tau_2} \quad (12)$$

先对式(12)两边取自然对数，得

$$\ln(A_0(\xi - \theta)) + v\tau_2 < \ln(B_R(1 - \eta)) - \int_{\tau_2}^T r_t dt$$

再将式中积分展开，得

$$\ln(A_0(\xi - \theta)) + v\tau_2 < \ln(B_R(1 - \eta)) - \int_{\tau_2}^T (r_0 e^{-kt} + \alpha(1 - e^{-kt}))dt - \int_O^T \sigma_3 \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} dW_t^1 + \int_O^{\tau_2} \sigma_3 \frac{1 - e^{-k(\tau_2 - u)}}{k} dW_u^1$$

然后对两边取期望，得

$$\ln(A_0(\xi-\theta)) + v\tau_2 < \ln(B_R(1-\eta)) - \int_{\tau_2}^T (r_0 e^{-kt} + \alpha(1 - e^{-kt}))dt$$

最后化简，得

$$\ln(A_0(\xi - \theta)) + v\tau_2 < \ln(B_R(1 - \eta)) + \frac{r_0 - \alpha}{k}(e^{-kT} - e^{-k\tau_2}) + \alpha(\tau_2 - T)$$

然而，事件$\{\eta B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt} < X_{\tau_2}\}$和$\{X_{\tau_2} < B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt} - (\xi - \theta) A_0 e^{v\tau_2}\}$同时发生等价于

$$\eta B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt} < X_{\tau_2} = X_0 e^{Z_{1\tau_2}} < B_R e^{-\int_{\tau_2}^T r_t dt} - (\xi - \theta) A_0 e^{v\tau_2} \quad (13)$$

先把式(13)先除以X_0，然后两边取自然对数得到$Z_{1\tau_2}$的定义域如下：

$$\ln \frac{\eta B_R e^{-\int_{t_2}^T r_t dt}}{X_0} < Z_{1\tau_2} < \ln \frac{B_R e^{-\int_{t_2}^T r_t dt} - (\xi - \theta) A_0 e^{vt_2}}{X_0}$$

下面令

$$n_1 = \ln \frac{\eta B_R e^{-\int_{t_2}^T r_t dt}}{X_0}$$

$$m_1 = \ln \frac{B_R e^{-\int_{t_2}^T r_t dt} - (\xi - \theta) A_0 e^{vt_2}}{X_0}$$

则有

$$P_1 = \int_{\max(\min(\tau_2),0)}^T \int_{t_2}^\infty \int_{n_1}^{m_1} e^{-\int_0^{t_2} r_t dt} \times (B_R e^{-\int_{t_2}^T r_t dt} + (\theta - \xi) A_0 e^{vt_2} - X_0 e^{z_1}) \times f_1(Z_1, t_2) g(t_1, t_2) dZ_1 dt_1 dt_2$$

现在继续计算P_2，由式(8)，得

$$P_2 = E[e^{-\int_0^T r_t dt} S^P(T) I_{(\tau_2 > T)} I_{(\tau_2 < \tau_1)}] = E[e^{-\int_0^T r_t dt}(B_R - X_T - (A_T - \theta A_0 e^{vT})) \times I_{(B_R - X_T \geqslant A_T - \theta A_0 e^{vT})} I_{(X_T > \eta B_R)} \times I_{(A_T > \xi A_0 e^{vT})} I_{(\tau_2 > T)} I_{(\tau_2 < \tau_1)}] \quad (14)$$

为了让式(14)为正值，必须满足下不等式：

$$B_R - \eta B_R > B_R - X_T > A_T - \theta A_0 e^{vT} \geqslant \xi A_0 e^{vT} - \theta A_0 e^{vT}$$

从$\eta B_R < X_T = X_0 e^{Z_{1T}} < B_R + \theta A_0 e^{vT} - A_T \leqslant B_R - (\xi - \theta) A_0 e^{vT}$和$\xi A_0 e^{vT} < A_T = A_0 e^{Z_{2T}} < B_R - X_T + \theta A_0 e^{vT}$，可以得出$Z_{1T}$和$Z_{2T}$的定义域如下：

$$\ln \frac{\eta B_R}{X_0} < Z_{1T} < \ln \frac{B_R - (\xi - \theta) A_0 e^{vT}}{X_0}$$

$$\ln \xi e^{vT} < Z_{2T} < \ln \frac{B_R - X_0 e^{Z_{1T}} + \theta A_0 e^{vT}}{A_0}$$

令$n_2 = \ln \frac{\eta B_R}{X_0}$，$m_2 = \ln \frac{B_R - (\xi - \theta) A_0 e^{vT}}{X_0}$，$n_3 = \ln \xi e^{vT}$，$m_3 = \ln \frac{B_R - X_0 e^{Z_{1T}} + \theta A_0 e^{vT}}{A_0}$，则有

$$P_2 = \int_T^\infty \int_{t_2}^\infty \int_{n_2}^{m_2} \int_{n_3}^{m_3} e^{-\int_0^T r_t dt} \times (B_R + \theta A_0 e^{vT} - X_0 e^{Z_1} - A_0 e^{Z_2}) \times f(Z_1, Z_2, T) g(t_1, t_2) dZ_2 dZ_1 dt_1 dt_2$$

遵循同样的想法，可以推导出P_4的表达式如下：

$$P_4 = \int_T^\infty \int_{t_1}^\infty \int_{n_2}^{m_2} \int_{n_3}^{m_3} e^{-\int_0^T r_t dt} \times (B_R + \theta A_0 e^{vT} - X_0 e^{Z_1} - A_0 e^{Z_2}) \times f(Z_1, Z_2, T) g(t_1, t_2)\, d Z_2 d Z_1 d t_2 d t_1$$

关于P_3，知道

$$P_3 = E[e^{-\int_0^{\tau_1} r_t dt} S^P(\tau_1) I_{(\tau_1 \leqslant T)} I_{(\tau_1 \leqslant \tau_2)}] = E[e^{-\int_0^{\tau_1} r_t dt}((1 - \eta) B_R e^{-\int_{\tau_1}^T r_t dt} - A_{\tau_1} - \theta A_0 e^{v\tau_1}) \times$$

$$I_{((1-\eta)B_R e^{-\int_{\tau_1}^{T} r_t \mathrm{d}t}-(A_{\tau_1}-\theta A_0 e^{v\tau_1}))}\ I_{(A_{\tau_1}>\xi e^{v\tau_1})}\ I_{(\tau_1\leqslant T)} I_{(\tau_1\leqslant \tau_2)}\ ]$$

P_3的计算和P_1相似,为了让 P_3 为正值,下列不等式必须是成立的:

$$(1-\eta)B_R\, e^{-\int_{\tau_1}^{T} r_t \mathrm{d}t} >$$
$$A_{\tau_1}-\theta A_0\, e^{v\tau_1} > (\xi-\theta)A_0\, e^{v\tau_1}$$

从上式可以得出

$$(\xi-\theta)A_0\, e^{v\tau_1} <$$
$$(1-\eta)B_R\, e^{-\int_{\tau_1}^{T} r_t \mathrm{d}t}$$

先将式(13)两边取自然对数得:

$$\ln(A_0(\xi-\theta))+v\,\tau_1<$$
$$\ln(B_R(1-\eta))-\int_{\tau_1}^{T} r_t\,\mathrm{d}t$$

再积分展开得:

$$\ln(A_0(\xi-\theta))+v1<$$
$$\ln(B_R(1-\eta))-$$
$$\int_{\tau_1}^{T}(r_0 e^{-kt}+\alpha(1-e^{-kt}))\,\mathrm{d}t-$$
$$\int_{O}^{T}\sigma_3\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k}\mathrm{d}\,W_t^1+$$
$$\int_{O}^{\tau_1}\sigma_3\frac{1-e^{-k(\tau_2-u)}}{k}\mathrm{d}\,W_u^1$$

然后对两边取期望得:

$$\ln(A_0(\xi-\theta))+v\,\tau_1<$$
$$\ln(B_R(1-\eta))-\int_{1}^{T}(r_0 e^{-kt}+\alpha(1-e^{-kt}))\,\mathrm{d}t$$

最后对上不等式化简得:

$$\ln(A_0(\xi-\theta))+v\,\tau_1<$$
$$\ln(B_R(1-\eta))+\frac{r_0-\alpha}{k}(e^{-kT}-e^{-k\tau_1})+\alpha(\tau_1-T)$$

然而,不等式 $(1-\eta)B_R\, e^{-\int_{\tau_1}^{T} r_t \mathrm{d}t} > A_{\tau_1}-\theta A_0\, e^{v\tau_1} > (\xi-\theta)A_0\, e^{v\tau_1}$ 成立,等价于不等式$\xi A_0\, e^{v\tau_1} < A_{\tau_1} = A_0\, e^{Z_{2\tau_1}} < (1-\eta)B_R\, e^{-\int_{\tau_1}^{T} r_t \mathrm{d}t}+\theta A_0\, e^{v\tau_1}$ 成立。

先把上式除以A_0,然后两边取自然对数,得到$Z_{2\tau_1}$的定义域如下:

$$\ln \xi\, e^{v\tau_1} < Z_{2\tau_1} <$$
$$\ln\frac{(1-\eta)B_R\, e^{-\int_{\tau_1}^{T} r_t \mathrm{d}t}+\theta A_0\, e^{v\tau_1}}{A_0}$$

令$n_4=\ln \xi\, e^{vt_1}$, $m_4=\ln\dfrac{(1-\eta)B_R e^{-\int_{t_1}^{T} r_t \mathrm{d}t}+\theta A_0 e^{vt_1}}{A_0}$,

则有

$$P_3=\int_{\max(\min(\tau_1),0)}^{T}\int_{t_1}^{\infty}\int_{n_4}^{m_4} e^{-\int_0^{t_1} r_t \mathrm{d}t}\times$$
$$((1-\eta)B_R\, e^{-\int_{\tau_1}^{T} r_t \mathrm{d}t}+\theta A_0\, e^{vt_1}-A_0\, e^{z_2})\times$$
$$f_2(Z_2,t_1)\,g(t_1,t_2)\,\mathrm{d}Z_2\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

而随机利率和死亡率下基于终止风险的 DB 养老金计划的保费估值 $P=P_1+P_2+P_3+P_4$。

所以定理得证。

4 数值模拟与实例分析

这一部分将进行数值分析,以便更直观地表示出随机利率和死亡率对 DB 养老金计划保费估值的影响。数值分析使用的参数值来自 Qian[10] 和 Qian[11],如下所示:

$r_0=0.05$, $v=0.05$, $\sigma_1=0.4$, $X_0=400$, $A_0=800$, $\sigma_A=0.2$, $\xi=0.63$, $\eta=0.8$, $\theta=0.6$, $T=15$, $\overline{\pi}=0.2$, $\sigma_2=0.08$, $k=0.85837$, $\alpha=0.89102$, $b=0.2$, $\mu_0=0.2$, $F=100$。

分别作出:

(1) 随机利率的波动率对保费的影响图(图 1);

(2) 死亡率的波动率对保费的影响图(图 2);

(3) 养老基金的波动率和计划发起人资产的波动率共同对保费的影响图(图 3);

(4) 利率和死亡率共同对保费的影响图(图 4);

(5) 模型利率与 Qian[10]模型利率相同、死亡率随机时,本文模型与 Qian[10]模型的保费比较图(图 5);

(6) 模型死亡率不变、利率随机时,本文模型与 Qian[10]模型的保费比较图(图 6);

(7) 模型死亡率和利率都随机时,本文模型与 Qian[10]模型的保费比较图(图 7)。

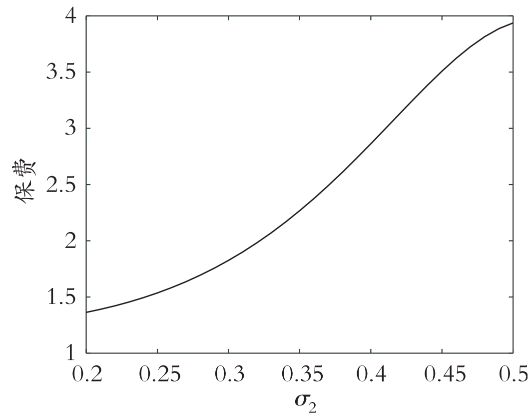

图 1 随机利率的波动率对保费的影响

Fig. 1 The impact of volatility of stochastic interest rate on premium

图 1 是说明保费如何随着随机利率的波动率的变化而变化的。从图中可以看出，随着波动率的增加，DB 养老金计划的保费开始逐渐增加。保费增加可能是因为波动率越大，导致 DB 养老金计划面临的风险越大，进而导致 DB 养老金计划出现资金不足的概率就越大。

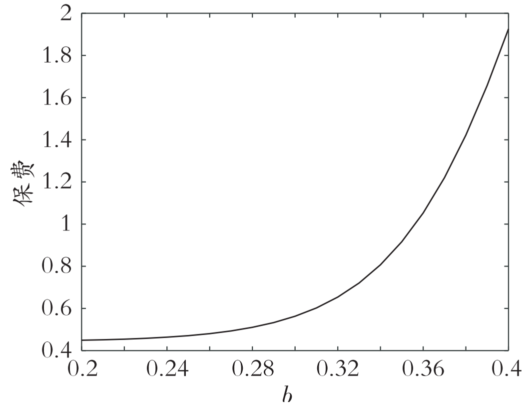

图 2　死亡率的波动率对保费的影响

Fig. 2　The impact of volatility of mortality rate on premium

图 2 说明保费如何随着死亡率波动率的变化而变化的。从图中可以看出，随着波动率的增加，DB 养老金计划的保费开始逐渐增加。保费增加可能是因为随机死亡率波动率越大，导致在养老金计划的受益人数的不确定性就越大，进而需要支付给受益人的养老金就越多，DB 养老金计划出现资金赤字的概率就越大。

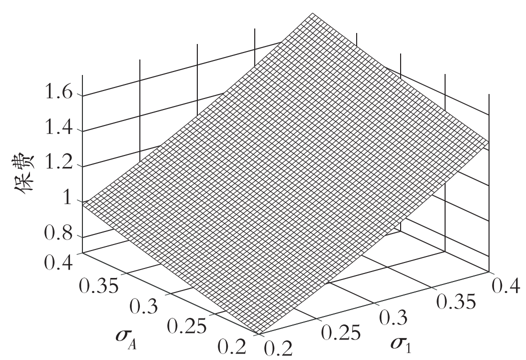

图 3　养老基金和计划发起人资产的波动率共同对保费的影响

Fig. 3　The impact of volatility of pension and plan sponsor assets on premium

图 3 说明养老基金的波动率和计划发起人资产的波动率共同对保费的影响。从图中可以看出，随着养老基金资产的波动率和计划发起人资产的波动率的增加，保费在逐渐增加。导致这样结果的原因可能是因为养老基金的波动率和计划发起人资产的波动率越大，给养老基金和计划发起人资产带来的不确定性就会增加，进而 DB 养老金计划承担的风险就会变大，资产赤字的缺口可能就会越大，PBGC 提供的资金就会越大，所以 DB 养老金计划的保费增加。

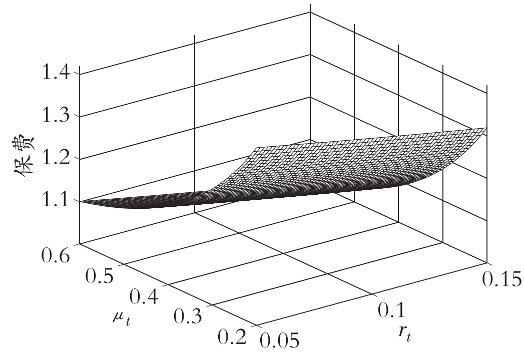

图 4　利率和死亡率共同对保费的影响

Fig. 4　The impact of interest rate and mortality rate on premium

图 4 是说明利率和死亡率共同对保费的影响。从图中可以看出，随着死亡率和利率的增加，保费在逐渐减少。利率增加导致养老基金投资无风险资产的收益增加，进而养老基金总资产就会增加；而死亡率增加导致需要付给受益人的总福利就会减少，因此 DB 养老金计划出现资金不足的概率减小，所以 DB 养老金计划的保费就会减少。

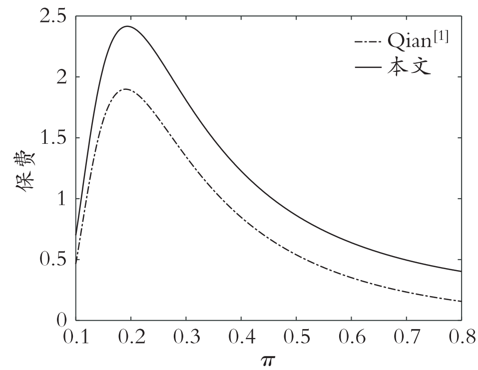

图 5　本文模型与 Qian[10] 模型的保费比较（本文模型利率不变、死亡率随机）

Fig. 5　The premium of the model in this paper is compared with that of the Qian[10] model (The interest rate of this model is constant and the mortality rate is stochastic)

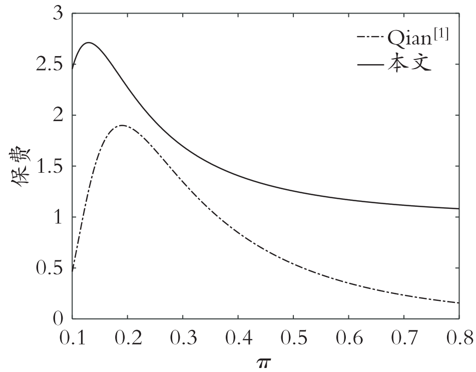

图 6 本文模型与 Qian[10] 模型的保费比较
(本文模型死亡率不变、利率随机)
Fig. 6 The premium of the model in this paper is compared with that of the Qian[10] model (The mortality rate of this model is constant and the interest rate is stochastic)

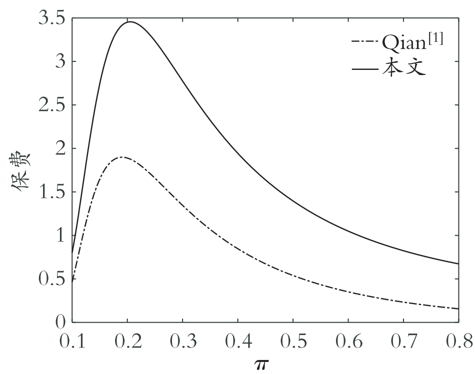

图 7 本文模型与 Qian[10] 模型的保费比较(本文模型死亡率和利率都随机)
Fig. 7 The premium of the model in this paper is compared with that of the Qian[10] model (The mortality and interest rates in this model are stochastic)

图 5,图 6 和图 7 都是说明保费如何随着养老基金投资风险资产比例的变化而变化的。通过两条曲线将本文模型和 Qian[10] 的模型进行比较。图 5 中本文模型利率不变、死亡率改变,其保费要高于 Qian[10] 模型的保费,出现这样的结果是因为本文模型中死亡率因素的改变给养老金计划需要支付给受益人的总养老金增加了不确定性,即 DB 养老金计划增加了风险,导致 DB 养老金计划的保费增加。图 6 中本文模型死亡率不变、利率改变,其保费要高于 Qian[10] 模型的保费,出现这样的结果是因为本文模型中随机利率因素给养老基金和发起人公司资产增加了不确定性,即 DB 养老金计划增加了风险,导致 DB 养老金计划的保费增加。图 7 中本文模型死亡率和利率都改变,其保费要高于 Qian[10] 模型的保费,并且图 7 中本文模型的保费要高于图 5 和图 6,出现这样的结果是因为本文模型中随机利率和死亡率因素的共同影响给 DB 养老金计划增加了更大的风险,导致 DB 养老金计划的保费增加。而在图 5,图 6 和图 7 中,随着养老基金投资风险资产比例的增加,DB 养老金计划的保费逐渐减少,其原因可能是养老基金投资的风险资产越多,收益也越多,导致养老基金资产越多,DB 养老金计划出现资金不足的概率就越小,这样 DB 养老金计划的保费自然就减少了。

5 结 论

研究了在随机利率和死亡率条件下,PBGC 为基于提前终止和遇险终止风险的 DB 养老金计划提供担保的保费估值问题。建立了养老金计划受益人在退休时应得养老金、养老基金资产和计划发起人资产模型,并且使用期望的方法得到了随机利率和死亡率下基于终止风险的 DB 养老金计划的保费估值。通过数值模拟分析了随机利率和死亡率对 PBGC 保费的影响,并与 Qian[10] 的保费估值进行比较。结果表明:随机利率和死亡率的引入使得保费相较于 Qian[10] 的保费有所增加,虽然这一结果给计划发起人增加了负担,但是却降低了 PBGC 所承担的风险。

本文主要的贡献在于同时考虑了养老基金的提前终止和发起人资产遇险终止的情况下增加随机利率和死亡率因素来得到保费估值。此外,本文模型还可以进行深一步拓展,比如考虑文中假设的各布朗运动之间的相关性以及通胀问题。

参考文献(References):

[1] SHARPE W F. Corporate Pension Funding Policy[J]. Financ Economics, 1976, 3(3): 183—193

[2] MARCUS A. Corporate Pension Policy and the Value of PBGC Insurance[C]//Issues in Pension Economics. University of Chicago Press, Chicago, 1987:21—45

[3] LEWIS C M, PENNACCHI C G. The Value of Pension Benefit Guaranty Corporation Insurance[J]. Money Credit Bank, 1994, 26(3): 735—753

[4] BODIE Z. On Asset and Liability Matching and Federal

Deposit and Pension Insurance[J]. Fed Reserve Bank Saint Louis, 2006, 88(4):323—329

[5] BROWN J R. Guaranteed Trouble: The Economic Effects of the Pension Benefit Guaranty Corporation[J]. Economic Perspectives, 2008, 22(1): 177—198

[6] STEWART F. Benefit Security Pension Fund Guarantee Schemes [C]//OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions, Volume 5. OECD Publishing, 2007, 7(1): 1—37

[7] KALRA R, JAIN G. A Continuous Time Model to Determine the Intervention Policy for PBGC [J]. Bank Financ, 1997, 40(2):1159—1177

[8] CHEN A. A Risk-Based Model for the Valuation of Pension[J]. Insurance Math. Economics, 2011, 49(3): 401—409

[9] CHEN A, UZELAC F. A Risk-Based Premium: What Does It Mean for DB Plan Sponsors[J]. Insurance Math Economics, 2014, 54(3):1—11

[10] QIAN L Y, SHEN Y, SHEN W, et al. Valuation of Risk-Based Premium of DB Pension Plan with Terminations[J]. Insurance Math Economics, 2019, 86(2): 51—63

[11] QIAN L Y, WANG W, WANG R M, et al. Valuation of Equity-Indexed Annuity under Stochastic Mortality and Interest Rate[J]. Insurance Math Economics, 2010, 47(6): 123—129

[12] HARRISON J M. Brownian Motion and Stochastic Flow System [M]. Malabar, Florida: Krieger Publisher Company, 1990

Valuation of Premiums for DB Pension Plans Based on Termination Risk under Stochastic Interest Rate and Mortality Rate

HE Xue-qiang, WANG Chuan-yu, YU Xin

(School of Mathematics, Physics and Finance, Anhui Polytechnic University, Anhui Wuhu 241000, China)

Abstract: In view of the impact of stochastic interest rate and mortality rate and termination risk on DB Pension plan and Pension payment issues, the valuation of premium guaranteed by the Pension Benefit Guaranty Corporation (PBGC) for DB Pension plan based on the risk of premature termination and distress termination under stochastic interest rate and mortality rate is proposed. Assuming that pension funds invest in risk-free and risk financial assets, stochastic interest rate, mortality rate, and the assets of pension funds and plan sponsors are stochastic processes. The conditions of premature termination and distress termination trigger are proposed, and the premium valuation model is established under the two termination conditions. Finally, the impact of stochastic interest rate and mortality rate on premium is analyzed through numerical simulation, and the premium is compared with that of Qian. The result shows that the introduction of stochastic interest rate and mortality rate make the premium increase compared with Qian. Although this result increases the burden on the plan sponsor, it reduces the PBGC's risk.

Key words: DB pension plan; PBGC; stochastic interest rate; mortality rate; premature termination; distress termination

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

何学强,王传玉,余鑫. 随机利率和死亡率下基于终止风险的 DB 养老金计划的保费估值[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(6):103—113

HE X Q, WANG C Y, YU X. Valuation of Premiums for DB Pension Plans Based on Termination Risk under Stochastic Interest Rate and Mortality Rate[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2021,38(6):103—113