

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0006.012

# 具有时间相关系数和双参数扰动的捕食者-食饵模型分析\*

魏 宁

(南京财经大学 应用数学学院, 南京 210023)

**摘 要:**针对一类 Holling II 捕食者-食饵模型,在模型系数与时间相关并具有两个噪声扰动的环境下,讨论了该模型系统的一些动力学行为问题。为了研究模型长时间的长动力学特征,利用反证法证得了模型正解的存在唯一性,确保了模型正解的稳定性;再通过构造 Lyapunov 函数,并利用 Itô 公式和切比雪夫不等式探究了该模型的随机最终有界性,保证了模型系统是合理的;进一步考虑系统的持续性和永久存在性,运用离散 Hölder 不等式和矩不等式等随机微分不等式探究了其一致 Hölder 连续性和随机持久性,此外,还利用指数鞅不等式和 Borel-Cantelli 引理得到了该系统灭绝的充分性条件;最后,引入数值模拟验证了所得理论结果的正确性。

**关键词:**捕食者-食饵模型;时间相关系数;Itô 公式;随机最终有界;灭绝

**中图分类号:**O175.13, O29

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-058X(2021)06-0089-07

## 0 引 言

在种群生态学的研究中,捕食者和食饵之间的动力学关系是生物数学界研究的重要课题之一。近年来,许多学者都致力于研究具有各种功能反应的捕食者-食饵模型,其中具有 Holling II 型功能反应的捕食者-食饵模型受到了广泛关注<sup>[1-3]</sup>。如 2003 年, Aziz-Alaoui 等<sup>[2]</sup>讨论了具有改进的 Leslie-Gower 和 Holling-II 型方案的随机捕食者-食饵模型解的存在性和全局稳定性的动力学行为;2017 年, Nosrati 等<sup>[3]</sup>通过分数演算和经济理论,扩展了一个更现实的捕食者-猎物模型:具有 Holling II 型功能响应的分数阶奇异捕食者-被捕食模型,并从局部稳定性的角度研究了该模型的动力学行为。

上述文献讨论的都是确定性的捕食者-食饵模型,但在实际的生态系统中,环境干扰是种群系统

中不可忽略的重要组成部分。对此,许多学者将随机扰动引入到确定性模型中来探究环境扰动对种群系统的影响。如 2005 年, Jiang 等<sup>[4]</sup>考察了在增长率上具有随机噪声的种群模型,证明了该模型具有唯一的全局解,并给出了解的显示表达;2015 年, Liu 等<sup>[5]</sup>讨论了一类具有随机扰动的三种群捕食系统,分析了系统的稳定性并给出了灭绝的充分条件;Liu<sup>[6]</sup>考虑了环境波动对内禀增长率和死亡率的影响,提到了下列带有随机扰动的 Holling II 捕食者-食饵种群模型:

$$\begin{cases} dx(t) = \left( r_1 x(t) - b_1 x^2(t) - \frac{c_1 x(t)y(t)}{1+x(t)} \right) dt + \sigma_{11} x(t) dB_1(t) \\ dy(t) = \left( -r_2 y(t) - b_2 y^2(t) + \frac{c_2 x(t)y(t)}{1+x(t)} \right) dt + \sigma_{21} y(t) dB_3(t) \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期:2020-11-11;修回日期:2020-12-31.

\* 基金项目:国家自然科学基金(11601225).

作者简介:魏宁(1997—),女,河南安阳人,硕士研究生,从事生物数学研究.

其中,  $x(t)$  和  $y(t)$  分别表示在  $t$  时刻食饵和捕食者种群的数量;  $r_i, b_i, c_i (i=1, 2)$  都是正常数,  $r_1$  表示种群  $x(t)$  的内禀增长率,  $r_2$  表示种群  $y(t)$  的死亡率,  $b_1$  和  $b_2$  分别表示  $x(t)$  和  $y(t)$  的密度制约系数,  $c_1$  和  $c_2$  分别表示捕食者的捕食率和其营养物转化为繁殖率的转化率。

目前, 在研究随机生物数学模型时, 大部分文章只讨论了环境噪声对其中某一类参数的影响<sup>[4-6]</sup>。然而, 在生态系统中, 环境扰动会对种群的捕食率、种内和种间竞争系数等多种参数同时产生影响。因此, 为了使模型更贴合实际并能更准确地掌握种群数量变化规律, 本文在模型式(1)的基础上又考虑了环境波动对种群密度制约系数  $b_1$  和  $b_2$  的影响, 并用以下方式表示:

$$\begin{aligned} -b_1 &\rightarrow -b_1 + \sigma_{12} dB_2(t) \\ -b_2 &\rightarrow -b_2 + \sigma_{22} dB_4(t) \end{aligned}$$

另一方面, 在实际情形中, 受季节变化的影响, 生态系统中的温度和湿度等机制会随之发生改变, 进而导致种群的繁殖率和死亡率等参数会随时间的变化而变化。例如: 某些鸟类动物的卵在孵化时, 在最适的温度下繁殖率最高, 离开了最适温度, 繁殖强度就会下降, 甚至停止繁殖。对此, 可引入与时间  $t$  相关的系数来描述这一现象。针对具有时间相关系数的种群模型已有大量的研究<sup>[7-8]</sup>。但文献[7-8]仅仅是针对具有单个随机扰动的模型系统, 而对于具有双参数扰动的 Holling II 捕食者-食饵模型的研究几乎都假设种群出生率等参数与时间  $t$  无关。对此, 为了使模型更具有现实意义, 得出更精确的结论, 本文还把与时间  $t$  相关的系数引入到模型式(1)中, 进而建立了下列具有可变系数的双参数扰动随机模型:

$$\begin{cases} dx(t) = x(t) \left( r_1(t) - b_1(t)x(t) - \frac{c_1(t)y(t)}{1+x(t)} \right) dt + \\ \quad \sigma_{11}(t)x(t) dB_1(t) + \sigma_{12}(t)x^2(t) dB_2(t) \\ dy(t) = y(t) \left( -r_2(t) - b_2(t)y(t) + \frac{c_2(t)x(t)}{1+x(t)} \right) dt + \\ \quad \sigma_{21}(t)y(t) dB_3(t) + \sigma_{22}(t)y^2(t) dB_4(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $B_i(t) (i=1, 2, 3, 4)$  是定义在完备概率空间  $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$  上相互独立的布朗运动;  $\sigma_{ij}(t)$

$> 0 (i, j=1, 2)$  表示白噪声强度;  $r_i(t), b_i(t), c_i(t), \sigma_{ij}(t) (i, j=1, 2)$  是  $R_+ := [0, +\infty)$  上非负且有界的连续函数。定义:

$$r^l = \inf_{t \geq 0} r(t), r^u = \sup_{t \geq 0} r(t)$$

同样的符号也应用于  $b_i(t), c_i(t), \sigma_{ij}(t) (i, j=1, 2)$ 。

接下来的章节依次研究了式(2)正解的存在唯一性、随机最终有界性、一致连续性、随机持久性和灭绝的充分性条件。

## 1 解的存在唯一性和随机最终有界性

为了研究式(2)的长时间动力学行为, 首先要证明式(2)具有唯一的全局正解。

**定理 1** 对于任意给定的初值  $X(0) = (x(0), y(0)) \in R_+^2$ , 随机模型式(2)存在唯一的全局解  $X(t) = (x(t), y(t))$ , 即对任意  $t \geq 0, (x(t), y(t)) \in R_+^2$  a. s.

**证明** 类似于文献[4]中定理 1 的证明方法, 容易得到定理 1 成立。

对随机种群系统的研究中, 通常不满足于其非爆炸性质, 因此, 本节进一步研究了其随机最终有界性。

**定理 2** 对于任意给定的初值  $X(0) = (x(0), y(0)) \in R_+^2$ , 式(2)的解是随机最终有界的。

**证明** 定义函数  $U(x) = e^t x^p$ , 其中  $p \in (0, 1)$ , 利用 Itô 公式可得:

$$\begin{aligned} d(e^t x^p) &= e^t x^p \{ 1 + p[r_1(t) - b_1(t)x - \\ &\quad \frac{c_1(t)y}{1+x} - \frac{1}{2}(1-p)\sigma_{11}^2(t) - \frac{1}{2}(1-p) \times \\ &\quad \sigma_{12}^2(t)x^2] \} dt + \sigma_{11}(t)pe^t x^p dB_1(t) + \\ &\quad \sigma_{12}(t)pe^t x^{p+1} dB_2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

利用 Young's 不等式, 有

$$\begin{aligned} e^t x^p \left\{ 1 + p \left[ r_1(t) - b_1(t)x - \frac{c_1(t)y}{1+x} - \frac{1}{2}(1-p)\sigma_{11}^2(t) - \frac{1}{2}(1-p)\sigma_{12}^2(t)x^2 \right] \right\} \leq \\ e^t \left\{ \left[ 1 + pr_1^u - \frac{1}{2}p(1-p)(\sigma_{11}^l)^2 \right] \times \right. \\ \left. (b_1^l)^{\frac{p}{p+1}} (p+1)^{\frac{p}{p+1}} [(b_1^l)^{\frac{p}{p+1}} (p+1)^{\frac{p}{p+1}} \right] \end{aligned}$$

$$x^p] - b_1^l p x^{p+1} \} \leq e^l L_1(p) \tag{4}$$

其中,  $L_1(p) = \frac{\left[ 1 + pr_1^u - \frac{1}{2} p(1-p)(\sigma_{11}^l)^2 \right]^{p+1}}{(b_1^l)^p (p+1)^{p+1}}$ , 把

式(4)代入式(3)并对其两边同时从 0 到  $t$  进行积分, 再取期望得:

$$E(e^l x^p(t)) \leq x^p(0) + E \int_0^t e^s L_1(p) ds \leq x^p(0) + e^l L_1(p)$$

因此,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E(x^p(t)) \leq L_1(p) \tag{5}$$

同理可得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E(y^p(t)) \leq L_2(p) \tag{6}$$

$$L_2(p) = \frac{\left[ 1 - pr_2^l + pc_2^u - \frac{1}{2} p(1-p)(\sigma_{21}^l)^2 \right]^{p+1}}{(b_2^l)^p (p+1)^{p+1}}$$

根据式(5)和式(6), 以及基本不等式  $(x(t)+y(t))^{0.5p} \leq 2^{0.5p}(x(t)+y(t))$ , 有

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} E |X(t)|^p &\leq \\ 2^{0.5p} \limsup_{t \rightarrow \infty} E(x^p(t)+y^p(t)) &\leq \\ 2^{0.5p}(L_1(p)+L_2(p)) &:= L(p) \end{aligned}$$

对任意  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $H = (\varepsilon^{-1} L(p))^{\frac{1}{p}}$ , 利用切比雪夫不等式<sup>[9]</sup>, 得

$$P\{|X| \geq H\} \leq H^{-p} E |X|^p$$

则  $\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|X| \geq H\} \leq \varepsilon$ , 由文献[9]中随机最终有界的定义可知本定理成立。

## 2 一致 Hölder 连续和随机持久性

在种群动力学行为研究中, 一致连续性和随机持久性是研究的重要性质之一, 对物种保护等方面具有重要意义。一致连续性表示种群会以适度方式繁殖, 在任何时刻都不会激增; 随机持久性表示种群会永久持续生存。本节首先讨论了式(2)正解的一致 Hölder 连续性。

**定理 3** 设  $X(t)$  是式(2)对于任意正的初值  $X(0) = (x(0), y(0))$  的正解, 那么  $X(t)$  的几乎所有样本路径都是一致 Hölder 连续的。

**证明** 参照文献[10]中定理 6.3 的证明方法, 式(2)中第一个方程可以转换为下列随机积分方程:

$$\begin{aligned} x(t) = x(0) + \int_0^t x(s) (r_1(s) - b_1(s)x(s) - \\ \frac{c_1(s)y(s)}{1+x(s)}) ds + \int_0^t \sigma_{11}(s)x(s) dB_1(s) + \\ \int_0^t \sigma_{12}(s)x^2(s) dB_2(s) \end{aligned}$$

由式(5)和定理 2, 以及离散 Hölder 不等式<sup>[9]</sup>, 可得:

$$\begin{aligned} E \left| x \left( r_1(s) - b_1(s)x - \frac{c_1(s)y}{1+x} \right) \right|^p &\leq \\ 0.5Ex^{2p} + 0.5E(r_1^u + x)^{2p} &\leq \\ 0.5Ex^{2p} + 2^{2p-2}(r_1^u)^{2p} + 2^{2p-2}Ex^{2p} &\leq \\ 0.5L_1(2p) + 2^{2p-2}(r_1^u)^{2p} + \\ 2^{2p-2}L_1(2p) &:= L_{11}(p) \end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned} E |\sigma_{11}(s)x(s)|^p &\leq (\sigma_{11}^u)^p L_1(p) \\ E |\sigma_{12}(s)x^2(s)|^p &\leq (\sigma_{12}^u)^p L_1(2p) \end{aligned}$$

利用矩不等式<sup>[9]</sup>, 有

$$\begin{aligned} E \left| \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{11}(s)x(s) dB_1(s) \right|^p &\leq \\ (\sigma_{11}^u)^p [0.5p(p-1)]^{0.5p} \times \\ (t_2 - t_1)^{0.5(p-2)} \int_{t_1}^{t_2} Ex^p(s) ds &\leq \\ (\sigma_{11}^u)^p [0.5p(p-1)]^{0.5p} (t_2 - t_1)^{0.5p} L_1(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \left| \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{12}(s)x^2(s) dB_2(s) \right|^p &\leq \\ (\sigma_{12}^u)^p [0.5p(p-1)]^{0.5p} (t_2 - t_1)^{0.5p} L_1(2p) \end{aligned}$$

其中,  $0 \leq t_1 \leq t_2$ , 且  $p > 2$ 。因此, 利用离散 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} E |x(t_2) - x(t_1)|^p &\leq \\ 3^{p-1} E \left| \int_{t_1}^{t_2} x(s) \left( r_1^u - b_1^l x(s) - \frac{c_1^l y(s)}{1+x(s)} \right) ds \right|^p &+ \\ 3^{p-1} E \left| \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{11}(s)x(s) dB_1(s) \right|^p &+ \\ 3^{p-1} E \left| \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{12}(s)x^2(s) dB_2(s) \right|^p &\leq \\ 3^{p-1} E \left| \left( \int_{t_1}^{t_2} 1^{\frac{p-1}{p}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [x(s)(r_1^u - b_1^l x(s) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{c_1^l y(s)}{1+x(s)}) \right] ds \right\}^{\frac{1}{p}} \right|^p &+ \\ 3^{p-1} E \left| \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{11}(s)x(s) dB_1(s) \right|^p &+ \end{aligned}$$

$$3^{p-1} E \left| \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{12}(s) x^2(s) dB_2(s) \right|^p \leq 3^{p-1} (t_2 - t_1)^{\frac{p}{2}} \{ (t_2 - t_1)^{\frac{p}{2}} + 2 [0.5p(p-1)1]^{\frac{p}{2}} \} L(p)$$

其中,  $L(p) = \max \{ L_{11}(p), (\sigma_{11}^u)^p L_1(p), (\sigma_{12}^u)^p L_1(2p) \}$ , 且  $0 < t_1 < t_2 < \infty, t_2 - t_1 \leq 1$ 。由文献 [11] 定理 2.8 可知  $x(t)$  的几乎每个样本路径都是局部的, 但在  $\gamma \in (0, p-2/2p)$  下是一致 Hölder 连续的。进一步表明, 当  $t \geq 0$  时,  $x(t)$  的几乎每个样本路径都是一致连续的。同理, 当  $t \geq 0$  时, 对于  $y(t)$  的几乎每个样本路径都是一致连续的。因此, 式 (2) 的解  $X(t) = (x(t), y(t))$  的每个样本路径在  $t \geq 0$  时都是一致连续的, 定理得证。

接下来证明式 (2) 的随机持久性。

**定理 4** 式 (2) 是随机持久的。

**证明** 受文献 [12] 中证明方法的启发, 取某一正常数  $\eta < 1$ , 定义函数:

$$Z(X) = \eta^{-1} (1+x^{-1})^\eta + \eta^{-1} (1+y^{-1})^\eta$$

利用 Itô 公式, 由定理 2 可知模型式 (2) 的解  $X(t)$  是随机最终有界的, 则  $\frac{1}{x} \cdot \frac{c_1(t)y}{1+x} \in (0, \infty)$ ,

即存在常数  $K := \sup_{x,y \in R^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{c_1(t)y}{1+x} < \infty$ , 使得

$$\begin{aligned} dZ(X) \leq & \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\eta-2} \left\{ -\frac{1}{x^2} \left[ r_1' - \frac{1}{2} (\eta-1) (\sigma_{11}^l)^2 \right] + \right. \\ & \frac{1}{x} (-r_1' + b_1^u + K) + \frac{1}{2} (\eta-1) (\sigma_{12}^l)^2 + b_1^u + K \} dt + \\ & \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\eta-2} \left\{ -\frac{1}{y^2} \left[ -r_2^u - \frac{1}{2} (\eta-1) (\sigma_{21}^l)^2 \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{y} (r_2^u + b_2^u) + b_2^u + \frac{1}{2} (\eta-1) (\sigma_{22}^l)^2 \right\} dt - \\ & \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\eta-1} \sigma_{11}^l dB_1(t) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\eta-1} \sigma_{12}^l dB_2(t) - \\ & \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\eta-1} \sigma_{21}^l dB_3(t) - \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\eta-1} \sigma_{22}^l dB_4(t) \end{aligned}$$

选取一个充分小的常数  $\mu$ , 使其满足  $0 < \mu\eta^{-1} < r_1'$ , 令  $F(X) = e^{\mu t} Z(X)$ , 并对其运用 Itô 公式可得:

$$\begin{aligned} dF(X) \leq & e^{\mu t} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\eta-2} \left\{ -\frac{1}{x^2} \left[ r_1' - \frac{(\eta-1)}{2} (\sigma_{11}^l)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\mu}{\eta} \right] + \frac{1}{x} \left(-r_1' + \frac{2\mu}{\eta}\right) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) (b_1^u + K) + \right. \\ & \left. \left[ \frac{(\eta-1)}{2} (\sigma_{12}^l)^2 + \frac{\mu}{\eta} \right] \right\} dt + e^{\mu t} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\eta-2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{y^2} \left[ r_2^u + \frac{(\eta-1)}{2} (\sigma_{21}^l)^2 + \frac{\mu}{\eta} \right] + \frac{1}{y} \left( r_2^u + \frac{2\mu}{\eta} \right) + \right. \\ & \left. \left(1 + \frac{1}{y}\right) b_2^u + \left[ \frac{(\eta-1)}{2} (\sigma_{22}^l)^2 + \frac{\mu}{\eta} \right] \right\} dt - e^{\mu t} \times \\ & \left[ \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\eta-1} \sigma_{11}^l dB_1(t) + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\eta-1} \sigma_{12}^l dB_2(t) + \right. \\ & \left. \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\eta-1} \sigma_{21}^l dB_3(t) + \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\eta-1} \sigma_{22}^l dB_4(t) \right] \leq \\ & H_1 e^{\mu t} dt - e^{\mu t} \left[ \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\eta-1} \sigma_{11}^l dB_1(t) + \right. \\ & \left. \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\eta-1} \sigma_{12}^l dB_2(t) + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\eta-1} \times \right. \\ & \left. \sigma_{21}^l dB_3(t) + \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\eta-1} \sigma_{22}^l dB_4(t) \right] \quad (7) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} H_1 = & \sup_{x,y \in R^+} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\eta-2} \left[ \frac{1}{x} \cdot \frac{\mu}{\eta} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) (b_1^u + K) + \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \frac{1}{2} (\eta-1) (\sigma_{12}^l)^2 + \frac{\mu}{\eta} \right) \right] + \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\eta-2} \times \right. \\ & \left. \left[ \frac{1}{y^2} \left[ \left( r_2^u + \frac{1}{2} (\eta-1) (\sigma_{21}^l)^2 + \frac{\mu}{\eta} \right) \right] + \frac{1}{y} (r_2^u + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2\mu}{\eta}) + \left(1 + \frac{1}{y}\right) b_2^u + \left( \frac{1}{2} (\eta-1) (\sigma_{22}^l)^2 + \frac{\mu}{\eta} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

显然  $H_1 < +\infty$ , 对式 (7) 两边从 0 到  $t$  积分并取期望, 有

$$\begin{aligned} E[F(X)] = & e^{\mu t} E[Z(X)] \leq \\ & \eta^{-1} (1+x^{-1}(0))^\eta + \eta^{-1} (1+y^{-1}(0))^\eta + \\ & \mu^{-1} H_1 (e^{\mu t} - 1) \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} E[x^{-\eta}(t)] & \leq \\ \limsup_{t \rightarrow +\infty} E[(1+x^{-1}(t))^\eta + (1+y^{-1}(t))^\eta] & \leq \\ \mu^{-1} \eta H_1 = & H \end{aligned}$$

对任意  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 可取  $\beta_1(\varepsilon) = (\varepsilon H^{-1})^{\frac{1}{\eta}}$ , 运用切比雪夫不等式, 有

$$\begin{aligned} P\{x(t) < \beta_1\} = & P\{x^{-\eta}(t) > \beta_1^{-\eta}\} \leq \\ & \beta_1^\eta E[x^{-\eta}(t)] \end{aligned}$$

同理可得:

$$P\{y(t) < \beta_1\} \leq \beta_1^\eta E[y^{-\eta}(t)]$$

则有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} P\{|X(t)| < \beta_1\} \leq \beta_1^\eta H = \varepsilon$$

进一步得到:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} P\{|X(t)| \geq \beta_1\} \geq 1 - \varepsilon$$

再利用切比雪夫不等式和式(5)与(6),可证得对于任意  $\varepsilon \in (0,1)$ , 存在一个正常数  $\beta_2$ , 有  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} P\{|X(t)| \leq \beta_2\} \geq 1 - \varepsilon$ . 根据文献[9]中随机持久性的定义,可证得本定理成立。

### 3 灭绝性

本节讨论式(2)灭绝的充分性条件。

**定理 5** 设对任意初值  $X(0) = (x(0), y(0))$ ,  $X(t) = (x(t), y(t))$  为模型式(2)的正解, 若  $r_1^u < 0.5(\sigma_{11}^l)^2$ ,  $r_2^l > c_2^u - 0.5(\sigma_{21}^l)^2$ , 则种群  $x(t)$  和  $y(t)$  均趋于灭绝。

**证明** 受文献[13]中证明的启发, 令  $u(x(t)) = \ln x(t)$ , 利用 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned} du(x(t)) = & \left( r_1(t) - b_1 x(t) - \frac{c_1(t)y(t)}{1+x(t)} - \frac{1}{2} \sigma_{11}^2(t) - \frac{1}{2} \sigma_{12}^2(t) x^2(t) \right) dt + \\ & \sigma_{11}(t) dB_1(t) + \sigma_{12}(t) x(t) dB_2(t) \end{aligned}$$

对上式两边从 0 到  $t$  积分, 得

$$\begin{aligned} \ln x(t) - \ln x(0) = & \int_0^t \left( r_1(s) - b_1(s)x(s) - \frac{c_1(s)y(s)}{1+x(s)} - \frac{1}{2} \sigma_{11}^2(s) - \frac{1}{2} \sigma_{12}^2(s) x^2(s) \right) ds + \\ & \int_0^t \sigma_{11}(s) dB_1(s) + \int_0^t \sigma_{12}(s) x(s) dB_2(s) \leq \\ & \left( r_1^u - \frac{1}{2} (\sigma_{11}^l)^2 \right) t - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_{12}^2(s) x^2(s) ds + \\ & \sigma_{11}^u B_1(t) + M_1(t) \end{aligned} \tag{8}$$

其中,  $M_1(t) = \int_0^t \sigma_{12}(s) x(s) dB_2(s)$ , 应用指数鞅不等式<sup>[9]</sup>可知, 对任意  $T > 0$ , 有

$$P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left[ M_1(t) - \frac{1}{2} \langle M_1(t), M_1(t) \rangle \right] > 2 \ln T \right\} \leq T^{-2}$$

由 Borel-Cantelli 引理<sup>[9]</sup>可知, 存在  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  满足  $P(\Omega_0) = 1$ , 使得对任意  $\omega \in \Omega_0$ , 都存在整数  $T_0 = T_0(\omega) > 0$ , 当  $T \geq T_0$  且  $0 \leq t \leq T$  时, 有

$$\begin{aligned} M_1(t) \leq & 2 \ln T + 0.5 \langle M_1(t), M_1(t) \rangle = \\ & 2 \ln T + 0.5 \int_0^t \sigma_{12}^2(s) x^2(s) ds \end{aligned} \tag{9}$$

把式(9)代入式(8)并取上极限, 得

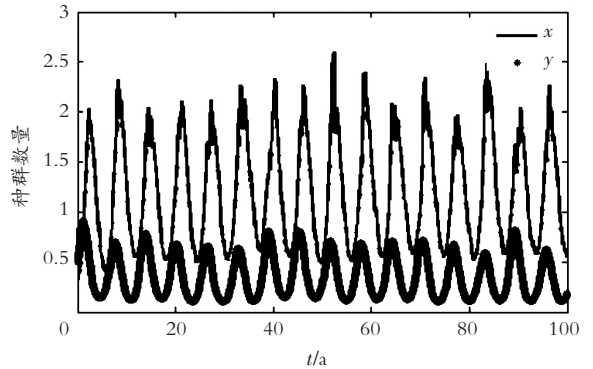
$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq r_1^u - \frac{1}{2} (\sigma_{11}^l)^2 < 0$$

进而得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  a. s., 同理可得, 当  $r_2^l > c_2^u - 0.5(\sigma_{21}^l)^2$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  a. s., 即可得证本定理成立。

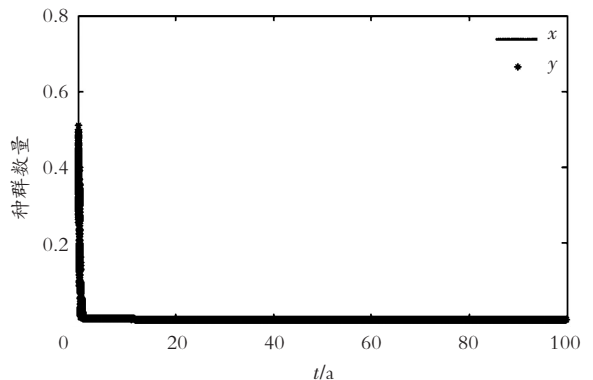
由定理 5 得到的种群灭绝的充分性条件可知, 模型式(2)中的种群灭绝与参数  $\sigma_{12}(t)$  和  $\sigma_{22}(t)$  无关, 这表明环境噪声对种群密度约束系数的影响不会导致模型式(2)中的种群灭绝。

### 4 数值模拟

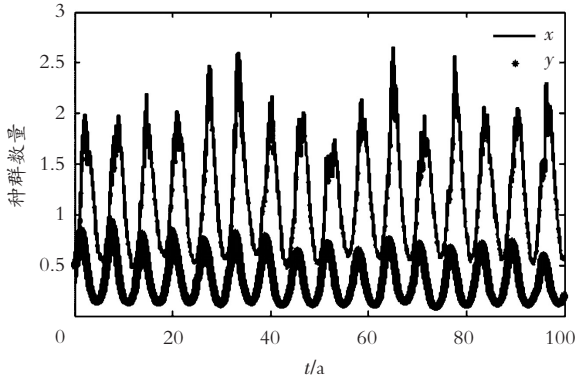
本节利用 Milstein 方法<sup>[14]</sup>对式(2)进行数值模拟, 来验证理论分析结果。选取步长为  $\Delta t = 0.001$ , 初值为  $(x(0), y(0)) = (0.3, 0.5)$ ,  $r_1 = 1.2 + \sin(t)$ ,  $r_2 = 0.1 + \cos(t)$ ,  $b_1 = 0.9$ ,  $b_2 = 0.7$ ,  $c_1 = 0.8$ ,  $c_2 = 0.7$ , 通过只改变随机扰动系数  $\sigma_{11}(t)$ ,  $\sigma_{12}(t)$ ,  $\sigma_{21}(t)$  和  $\sigma_{22}(t)$  的取值来观察种群数量的变化情况, 得到如图 1 所示的结果。



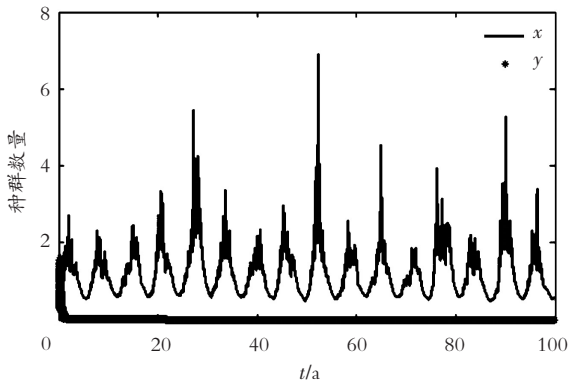
(a)  $\sigma_{11}(t) = \sigma_{12}(t) = \sigma_{21}(t) = \sigma_{22}(t) = 0$  时种群的数量变化



(b)  $\sigma_{11}(t) = 3.3 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{12}(t) = 1.5 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{21}(t) = 2.4 + 0.1 \cos(t)$ ,  $\sigma_{22}(t) = 1 + 0.1 \cos(t)$  时种群的数量变化



(c)  $\sigma_{11}(t) = 0.02 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{12}(t) = 0.03 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{21}(t) = 0.01 + 0.1 \cos(t)$ ,  $\sigma_{22}(t) = 0.04 + 0.1 \cos(t)$  时种群的数量变化



(d)  $\sigma_{11}(t) = 0.1 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{12}(t) = 0.2 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{21}(t) = 2 + 0.1 \cos(t)$ ,  $\sigma_{22}(t) = 1.5 + 0.1 \cos(t)$  时种群的数量变化

图 1 种群的数量变化

Fig. 1 Change in the number of population

图 1(a)–1(d) 之间唯一的区别是随机扰动系数的取值不一样。在图 1(a) 中, 取  $\sigma_{11}(t) = \sigma_{12}(t) = \sigma_{21}(t) = \sigma_{22}(t) = 0$ , 表示在没有环境扰动的影响下两种群数量变化。可以看到, 此时种群  $x(t)$  和  $y(t)$  的数量变化波动基本与正弦函数和余弦函数的图像是一致的, 并且具有随机持久性, 符合定理 4 的理论证明; 在图 1(b) 中, 取  $\sigma_{11}(t) = 3.3 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{12}(t) = 1.5 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{21}(t) = 2.4 + 0.1 \cos(t)$ ,  $\sigma_{22}(t) = 1 + 0.1 \cos(t)$ ; 图 1(c) 中, 取  $\sigma_{11}(t) = 0.02 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{12}(t) = 0.03 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{21}(t) = 0.01 + 0.1 \cos(t)$ ,  $\sigma_{22}(t) = 0.04 + 0.1 \cos(t)$ ; 图 1(d) 中, 取  $\sigma_{11}(t) = 0.1 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{12}(t) = 0.2 + 0.1 \sin(t)$ ,  $\sigma_{21}(t) = 2 + 0.1 \cos(t)$ ,  $\sigma_{22}(t) = 1.5 + 0.1 \cos(t)$ 。从图中可以看到, 较小的随机扰动仍可以使系统保持与图 1(a) 相似波动的变化, 但随着白噪声强度的

增大, 对种群数量的影响也逐渐增大, 较大的随机扰动则会导致种群灭绝。在图 1(b) 中, 选取的参数满足  $r_1^u < 0.5 (\sigma_{11}^l)^2$  和  $r_2^l > c_2^u - 0.5 (\sigma_{21}^l)^2$ , 根据定理 5 可知, 种群  $x(t)$  和  $y(t)$  趋于灭绝, 图 1(b) 模拟出的图像恰好符合上述性质。

## 5 结束语

在具有一个环境噪声的 Holling II 捕食者–食饵模型的基础上, 考虑了具有两个环境噪声且模型系数与时间有关的 Holling II 捕食–食饵模型, 使模型系统更贴合实际。证得了模型正解的存在唯一性和随机有界性, 探究了模型的持续性和随机持久性, 并给出了模型中种群灭绝的充分性条件, 从而掌握了更准确的种群数量变化规律, 对物种保护、利用和管理具有重要意义。

## 参考文献 (References):

- [1] FREEDMAN H I. Deterministic Mathematical Models in Population Ecology[J]. Biometrics, 1980(22): 33–91
- [2] AZIZ-ALAOUI M A, OKIYE M D. Boundedness and Global Stability for a Predator–prey Model with Modified Leslie–Gower and Holling–type II Schemes[J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 16(7): 1069–1075
- [3] NOSRATI K, SHAFIEE M. Dynamic Analysis of Fractional–order Singular Holling Type–II Predator–prey System[J]. Applied Mathematics & Computation, 2017, 313: 159–179
- [4] JIANG D, SHI N. A Note on Nonautonomous Logistic Equation with Random Perturbation [J]. J Math Anal Appl, 2005(303): 164–172
- [5] LIU M, MANDAL P S. Dynamical Behavior of A one–prey Two–predator Model with Random Perturbations [J]. Communications in Nonlinear and Numerical Simulation, 2015(28): 123–137
- [6] LIU Q, ZU L, JIANG D. Dynamics of Stochastic Predator–prey Models with Holling II Functional Response[J]. Communications in Nonlinear & Numerical Simulation, 2016(37): 62–76
- [7] LI X, GRAY A, JIANG D, et al. Sufficient and Necessary Conditions of Stochastic Permanence and Extinction for Stochastic Logistic Populations under

- Regime Switching[J]. *J Math Anal Appl*, 2011(376): 11—28
- [8] LUO J W, LI M, LIU K, et al. Analysis of a Mutualism Model with Time-related Coefficients in a Stochastic Environment[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2020, 11(3): 1—20
- [9] MAO X. *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. Chichester: Horwood Publishing Limited, 1997
- [10] LIU M, WANG K. Population Dynamical Behavior of Lotka-Volterra Cooperative Systems with Random Perturbations[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A*, 2013(33): 2495—2522
- [11] KARATZAS I, SHREVE S E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991
- [12] LIU M, WANG K. Analysis of a Stochastic Autonomous Mutualism Model[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2013(402): 392—403
- [13] 赵爱民, 赵晓丹, 刘桂荣. 一类随机互惠种群模型的渐近行为[J]. *山西大学学报(自然科学版)*, 2019(42): 281—286
- ZHAO A M, ZHAO X D, LIU G R. Asymptotic Properties of a Stochastic Mutualism Population Model[J]. *Journal of Shanxi University(Natural Science Edition)*, 2019(42): 281—286 (in Chinese)
- [14] HIGHAM D J. *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*[J]. *SIAM Rev*, 2001(43): 525—546

## Analysis of a Predator-prey Model with Time-related Coefficients and Two Parameters Perturbation

WEI Ning

(School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** For a Holling II predator-prey model with time-related coefficients and two parameters perturbation, some dynamical behaviors of the model are discussed. In order to research the long-term dynamic characteristics of the model, the existence and uniqueness of the positive solution is proved by using contradiction to ensure the stability of the positive solution of the model, and then, by constructing Lyapunov function, and using Itô formula and Chebyshev inequality, stochastic ultimate boundedness of the model is explored, which ensures that the system is reasonable. Thus, the continuity and permanence of the system can be further considered, and by using discrete Hölder inequality and the moment inequality and other stochastic differential inequalities, uniformly Hölder-continuous and stochastic permanence of the system is obtained. Moreover, the sufficient conditions for the system to be extinct are given by using exponential martingale inequality and Borel-Cantelli lemma. At last, some numerical simulations are introduced to verify the correctness of the theoretical results.

**Key words:** predator-prey model; time-related coefficients; Itô formula; stochastically ultimate boundedness; extinction

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

魏宁. 具有时间相关系数和双参数扰动的捕食者-食饵模型分析[J]. *重庆工商大学学报(自然科学版)*, 2021, 38(6): 89—95  
WEI N. Analysis of a Predator-prey Model with Time-related Coefficients and Two Parameters Perturbation[J]. *Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)*, 2021, 38(6): 89—95