doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0006.010

关于累积剩余(r,s)熵的研究*

王甜甜, 汪加梅**

(安徽工业大学 数理科学与工程学院,安徽 马鞍山 243032)

摘　要:首先推广了 Kumar 等对于累积剩余 Tsallis 熵的研究,提出了累积剩余(r,s)熵的定义,给出了其有界性的充分性及一些不同的单变量连续分布的累积剩余(r,s)熵的表达式;接着给出了相应的动态累积剩余(r,s)熵的定义和一些性质;最后利用累积剩余(r,s)熵与平均剩余寿命函数、风险率函数的关系来刻画一些分布,指出含有多参数的累积剩余(r,s)熵对基于 Renyi 熵、Tsallis 熵等单参数的累积剩余熵具有参考意义。

关键词:(r,s)熵; 累积剩余熵; 生存函数; 风险率函数; 平均剩余寿命函数

中图分类号:O177.92　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-058X(2021)06-0076-06

0 引　言

信息论中,Shannon 熵在度量随机变量 X 相关的离散度、波动性或不确定指数方面起着至关重要的作用。在这里,X 是绝对连续的非负随机变量,具有概率密度函数 $f(x)$ 和生存函数 $\bar{F}(x)=P(X>x)$。由 Shannon 微分熵给出的随机变量 X 相关的不确定度的平均值为

$$H(X)=-\int_0^\infty f(x)\log f(x)\,\mathrm{d}x$$

在许多文献中,以不同的方式概括了上式,Havrda 等[1]推广了 Shannon 熵的一种不可加形式:

$$H_r(x)=\frac{1}{1-r}\left[\int_0^\infty f_r(x)\,\mathrm{d}x-1\right],r>1,r\neq 1$$

当 $r\to 1$ 时,上面的测度趋于 Shannon 熵,虽然熵测量 $H_r(x)$ 最初是由 Havrda 等在控制论的背景下首次提出的,但 Tsallis 发现了它的非广延性的特征,并将其放在物理背景下研究,所以熵测度 $H_r(x)$ 叫做 Tsallis 熵。1991 年,Rathie 等[2]引入了统一的(r,s)熵,它包含了许多经典熵,其关于具有概率密度函数 $f(x)$ 的非负随机变量的形式为

$$H_r^s(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\int_0^\infty f_r(x)\,\mathrm{d}x\right)^s-1\right]$$

在生命分析和生命测试中,系统的当前年龄也应考虑在内。系统在 t 时刻仍在运行时的剩余寿命为 $X_t=\{X-t\mid X>t\}$。1996 年,Ebrahimi[3]提出剩余寿命 X_t 的熵为

$$H(X)=-\int_0^\infty \frac{f(x)}{\bar{F}(t)}\log\frac{f(x)}{\bar{F}(t)}\mathrm{d}x,t>0$$

2006 年,Nanda 等[4]提出了 Tsallis 剩余熵为

$$H_r(x;t)=\frac{1}{1-r}\left[\int_t^\infty \frac{f^r(x)}{F^r(t)}\mathrm{d}x-1\right],r>1,r\neq 1$$

2004 年,Rao 等[5]提出了累积剩余熵的概念,定义为

$$\eta(x)=\int_0^\infty \bar{F}(x)\log\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x$$

累积剩余熵(CRE)是基于累积分布函数的一种广义不确定性度量,相比 Shannon 提出的基于概率密度的测度,该测度具有更稳定的性质。累积剩余熵在连续域和离散域都有一致的定义,它可以很容易地从样本数据中计算出结果且渐进地收敛到真

收稿日期:2021-03-05;**修回日期:**2021-05-18.

* **基金项目:**国家自然科学基金(11401007);安徽自然科学基金(KJ2017A042).

作者简介:王甜甜(1996—),女,河南信阳人,硕士研究生,从事量子信息与量子熵研究.

** **通讯作者:**汪加梅(1983—),女,安徽舒城人,副教授,博士,从事量子信息与量子熵研究. Email:wangjm@ahut.edu.cn.

实值。Rao[6],Wang 和 Vemuri[7] 分别在 2005 年、2007 年得出了该测度的若干性质,并在可靠性工程和计算机视觉方面提供了一些应用;2007 年,Asadi 等[8]考虑了累积剩余熵的动态版本,定义为

$$\eta(x;t)=\int_t^\infty \frac{\bar F(x)}{\bar F(t)}\log\frac{\bar F(x)}{\bar F(t)}\mathrm{d}x,t>0$$

已有学者对于累积剩余熵的参数化推广进行了尝试。2010 年,Abbasnejad 等[9]提出了 r 阶的动态生存熵(DSE),并解释了其与平均剩余寿命函数的关系。通过考虑 CRE 与某一部件的平均剩余寿命之间的关系,2015 年,Mohan 等[10]在 Tsallis 熵的基础上提出了累积剩余 Tsallis 熵及其动态版本:

$$\eta(x)=\frac{1}{1-r}\left(\int_0^\infty \bar F^r(x)\mathrm{d}x-1\right)$$

$$\eta(x;t)=\frac{1}{1-r}\left(\int_t^\infty\left(\frac{\bar F(x)}{\bar F(t)}\right)^r\mathrm{d}x-1\right)$$

Mohan 刻画了一些著名的寿命分布和概率模型。Kumar[11]在 Mohan 等的研究基础上继续研究了累积剩余 Tsallis 熵及其动态版本的性质。但是基于 Renyi 熵或者是 Tsallis 熵的累积剩余测度都是不含参数或者仅一个参数。针对前人的研究,将研究基于含有多参数的(r,s)熵定义的累积剩余测度的一些性质与刻画结果。

本篇文章的结构如下:第一节中提出了累积剩余(r,s)熵,同时给出了一些特定分布的表达式;第二部分提出了动态剩余(r,s)熵,研究了其性质刻画;第三部分中,利用平均剩余寿命函数和风险率函数与累积剩余(r,s)熵的关系来刻画一些特定分布的性质。

1　累积剩余(r,s)熵

定义 1　对于具有生存函数$\bar F(x)$的随机变量 X,基于(r,s)熵的累积剩余熵定义为

$$\eta(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\int_0^\infty \bar F^r(x)\mathrm{d}x\right)^s-1\right]$$

$$r>0,r\neq 1,s>0 \tag{1}$$

下面的引理给出了累积剩余(r,s)熵有界的充分条件:

引理 1　若 $X\in L^1$ 且对所有 $p>\frac{1}{r}$,$E(X^p)<1$,有 $\eta_r^s(x)<\infty$。

证明　令 $X\in L^1$,则有 $E(x)<1$,可以得到:

$$\left(\int_0^\infty \bar F^r(x)\mathrm{d}x\right)^s=\left(\int_0^1 \bar F^r(x)\mathrm{d}x+\int_1^\infty \bar F^r(x)\mathrm{d}x\right)^s\leqslant$$
$$\left(1+\int_1^\infty \bar F^r(x)\mathrm{d}x\right)^s\leqslant$$
$$\left(1+\int_1^\infty\left(\frac{\bar F(X^p)}{x^p}\right)^r\mathrm{d}x\right)^s=$$
$$\left(1+(E(X^p))^r\int_1^\infty\frac{1}{x^{pr}}\mathrm{d}x\right)^s$$

第二个不等式根据马尔可夫不等式得到。最后的等式中,若 $p>\frac{1}{r}$,则该积分是有限的,即可证明 $\eta_r^s(x)<\infty$。

以下是非负随机变量的一些不同单变量连续分布的测度表达。

推论 1　(1) X 服从参数为 $b>0$ 的有限维分布,则

$$\eta_r^s(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\frac{1}{(br+1)^s}-1\right]$$

(2) 若 X 在(a,b),$a<b$ 上服从均匀分布,则

$$\eta_r^s(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\frac{b^{(r+1)s}}{(r+1)^s(b-a)^{rs}}-1\right]$$

(3) 若 X 服从参数 $a>1$ 的 Pareto 分布,则

$$\eta_r^s(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\frac{1}{ar+1}\right)^s-1\right]$$

(4) 若 X 服从参数 $\lambda>0$ 的指数分布,则

$$\eta_r^s(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\frac{1}{\lambda r}\right)^s-1\right]$$

证明　若非负连续随机变量 X 服从参数 $b>0$ 的有限维分布,其生存函数为$\bar F(t)=(1-t)^b$,$0<t<1$,则

$$\eta_r^s(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\int_0^1 \bar F^r(x)\mathrm{d}x\right)^s-1\right]=$$
$$\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\int_0^1(1-x)^{br}\mathrm{d}x\right)^s-1\right]=$$
$$\frac{1}{(1-r)s}\left[\frac{1}{(br+1)^s}-1\right]$$

若非负连续随机变量 X 在(a,b),$a<b$ 上服从均匀分布,其生存函数为$\bar F(t)=\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^b$,$t>0$,则

$$\eta_r^s(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\int_0^\infty \bar F^r(x)\mathrm{d}x\right)^s-1\right]=$$
$$\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\int_0^\infty\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^r\mathrm{d}x\right)^s-1\right]=$$
$$\frac{1}{(1-r)s}\left[\frac{b^{(r+1)s}}{(r+1)^s(b-a)^{rs}}-1\right]$$

若非负连续随机变量 X 服从参数 $a>1$ 的 Pareto 分布,其生存函数为$\bar F(t)=\left(1+\frac{t}{a}\right)^{-a}$,$t>0$,则

$$\eta_r^s(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\int_0^\infty \bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x\right)^s-1\right]=$$

$$\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{a}\right)^{-ar}\mathrm{d}x\right)^s-1\right]=$$

$$\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\frac{a}{ar-1}\right)^s-1\right]$$

若非负连续随机变量 X 服从参数 $\lambda>0$ 的指数分布,其生存函数为 $\bar{F}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $t>0$,则

$$\eta_r^s(x)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda rx}\mathrm{d}x\right)^s-1\right]=$$

$$\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\frac{1}{\lambda r}\right)^s-1\right]=$$

$$\frac{1}{(1-r)s}\left[\frac{1}{(\lambda r)^s}-1\right]$$

2 动态累积剩余(r,s)熵

2015 年,Mohan 等[10] 给出了动态累积剩余 Tsallis 熵测度的定义,相应地,下面定义了动态累积剩余(r,s)熵测度:

$$\eta(x;t)=\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\frac{\int_t^\infty \bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^s-1\right]$$

$$r>0,r\neq 1,s>0 \tag{2}$$

对于任意 $t\geqslant 0$,$\eta_r^s(x;t)$ 具有 $\eta_r^s(x)$ 的所有性质。当 $r\to 1$,$s\to 1$ 时,式(2)简化为基于 Shannon 熵的累积剩余测度。下面的引理给出了 $\eta_r^s(x;t)$ 关于平均剩余寿命的一个上界。

X 的平均剩余寿命定义为

$$\delta_F(t)=E(X-t\mid X\geqslant t)=\frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}(t)}$$

引理 2 当 $t>0$,$s>0$,$r>1(0<r<1)$ 时,有

$$\eta_r^s(x;t)\geqslant(\leqslant)\frac{(\delta_F(t))^s-1}{(1-r)s}$$

证明 因为 $\bar{F}(t)$ 是关于 t 的递减函数,且令 $y=\frac{1}{(1-r)s}(x^s-1)$,有 $\mathrm{d}y=\frac{1}{1-r}x^{s-1}$,则 $r>1$ 时,函数 y 单调递减;$0<r<1$ 时,函数 y 单调递增。则

$$\eta(x;t)=\frac{1}{1-r}\left[\left(\frac{\int_t^\infty \bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^s-1\right]\geqslant(\leqslant)$$

$$\frac{1}{1-r}\left[\left(\frac{\bar{F}^{r-1}(x)\int_t^\infty \bar{F}(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^s-1\right]=$$

$$\frac{1}{1-r}\left[\left(\frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}(t)}\right)^s-1\right]=$$

$$\frac{(\delta_F(t))^s-1}{1-r}$$

证毕。

下面证明动态累积剩余(r,s)熵唯一决定了生存函数 $\bar{F}(x)$。

定理 1 设 X 是具有密度函数 $f(x)$ 和生存函数 $\bar{F}(x)$ 的连续非负随机变量。假设 $\eta_r^s(x)<\infty$,$t\geqslant 0$,$r>0$,$r\neq 1$,$s>0$,那么对任一 r,$\eta_r^s(x;t)$ 唯一地决定了变量的生存函数 $\bar{F}(x)$。

证明 由式(2)得:

$$(1-r)s\eta_r^s(X;t)=\left(\frac{\int_t^\infty \bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^s-1=$$

$$\frac{\left(\int_t^\infty \bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x\right)^s}{\bar{F}^{rs}(t)}-1 \tag{3}$$

对式(3)关于 t 微分,有

$$(1-r)s\eta_r^{s'}(X;t)=$$

$$-s\frac{\left(\int_t^\infty \bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x\right)^{s-1}}{F^{r(s-1)}(t)}+rs\lambda_F(t)\frac{\left(\int_t^\infty \bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x\right)^s}{F^{rs}(t)}=$$

$$-s[1+(1-r)(s-1)\eta_r^{s-1}(X;t)]+$$

$$rs\lambda_F(t)[1+(1-r)s\eta_r^s(X;t)]$$

$\lambda_F(t)=\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$ 是随机变量 X 的风险率函数,两个生存函数 $\bar{F}_1(t)$ 和 $\bar{F}_2(t)$ 分别对应 $\eta_r^s(X_1;t)$ 和 $\eta_r^s(X_1;t)$,风险率函数为 $\lambda_{F_1}(t)$ 和 $\lambda_{F_2}(t)$。令

$$(1-r)s\eta_r^{s'}(X_1;t)=(1-r)s\eta_r^{s'}(X_2;t)$$

即有

$$-s[1+(1-r)(s-1)\eta_r^{s-1}(X_1;t)]+$$

$$rs\lambda_{F_1}(t)[1+(1-r)s\eta_r^s(X_1;t)]=$$

$$-s[1+(1-r)(s-1)\eta_r^{s-1}(X_2;t)]+$$

$$rs\lambda_{F_2}(t)[1+(1-r)s\eta_r^s(X_2;t)] \tag{4}$$

令 $\eta_r^s(X_1;t)=\eta_r^s(X_2;t)$,则也有 $\eta_r^{s-1}(X_1;t)=\eta_r^{s-1}(X_2;t)$,式(4)可推导出 $\lambda_{F_1}(t)=\lambda_{F_2}(t)$ 或者等价于 $\bar{F}_1(t)=\bar{F}_2(t)$。得证。

3 特定寿命分布的特征结果

在这一节中,利用平均剩余寿命函数和风险率

函数来刻画一些分布。平均剩余寿命和风险率函数的关系为

$$\lambda_F(t)=\frac{\delta_F'(t)+1}{\delta_F(t)} \tag{5}$$

其中，$\lambda_F(t)$为风险率函数。

在给出定性结果前，先来证明下面的定理。

定理 2　设 X 是具有生存函数$\overline{F}(t)$，平均剩余寿命 $\delta_F(t)$ 的非负连续随机变量，且动态累积剩余(r,s)熵测度定义为

$$\eta_r^s(x;t)=\frac{1}{(1-r)s}\{k[\delta_F(t)]^s-1\} \tag{6}$$

则有

(i) 当且仅当 $k=\frac{1}{r^s}$时，X 服从指数分布；

(ii) 当且仅当 $k<\frac{1}{r^s}$时，X 服从 Pareto 分布；

(iii) 当且仅当 $k>\frac{1}{r^s}$时，X 服从有限维分布。

证明　充分性：若非负随机变量 X 服从指数分布，其概率密度函数、生存函数、平均剩余寿命分别是

$$f(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t},\lambda>0,t>0$$

$$\overline{F}(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

$$\delta_F(t)=\frac{1}{\lambda}$$

因此，由定义式(2)，有

$$(r-1)s\eta_r^s(x;t)=1-\left[\frac{\int_t^\infty\overline{F}^r(x)\mathrm{d}x}{\overline{F}^r(t)}\right]^s=$$
$$1-\left[\frac{\int_t^\infty(\mathrm{e}^{-\lambda x})^r\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^{-\lambda t})^r}\right]^s=$$
$$1-\frac{1}{r^s}\left(\frac{1}{s}\right)^s$$

这里 $k=\frac{1}{r^s}$，$\delta_F(t)=\frac{1}{\lambda}$。即证 $\eta_r^s(x;t)=\frac{1}{(1-r)s}\times\{k[\delta_F(t)]^s-1\}$。

若非负随机变量 X 服从 Pareto 分布，其概率密度函数、生存函数、平均剩余寿命分别是

$$f(t)=\left(1+\frac{t}{a}\right)^{-a-1},a>1,t>0$$

$$\overline{F}(t)=\left(1+\frac{t}{a}\right)^{-a}$$

$$\delta_F(t)=\frac{a+t}{a-1}$$

因此根据定义式(2)，简化为

$$(1-r)s\eta_r^s(X;t)=k[\delta_F(t)]^s-1$$

这里若 $r>1$，则

$$k=\left(\frac{a-1}{ar-1}\right)^s<\frac{1}{r},\delta_F(t)=\frac{a+t}{a-1}$$

若非负随机变量 X 服从有限维分布，其概率密度函数、生存函数、平均剩余寿命分别是

$$f(t)=b(1-t)^{b-1},b>0,0<t<1$$

$$\overline{F}(t)=(1-t)^b$$

$$\delta_F(t)=\frac{1-t}{b+1}$$

因此，经过简化得

$$(1-r)s\eta_r^s(x;t)=k[\delta_F(t)]^s-1$$

这里若 $r>1$，则

$$k=\left(\frac{b+1}{br+1}\right)^s,\delta_F(t)=\frac{1-t}{b+1}$$

必要性：令式(6)成立，根据式(2)有

$$k^{\frac{1}{s}}\delta_F(t)=\frac{\int_t^\infty\overline{F}^r(x)\mathrm{d}x}{\overline{F}^r(t)} \tag{7}$$

式(7)左右两边对 t 微分，得到

$$k^{\frac{1}{s}}\delta_F'(t)=-1+r\lambda_F(t)\frac{\int_t^\infty\overline{F}^r(x)\mathrm{d}x}{\overline{F}^r(t)}=$$
$$-1+r\lambda_F(t)k^{\frac{1}{s}}\delta_F(t)$$

根据平均剩余寿命和风险率之间的关系：

$$\lambda_F(t)\delta_F(t)=1+\delta_F'(t) \tag{8}$$

则有

$$\delta_F'(t)=\frac{k^{\frac{1}{s}}r-1}{k^{\frac{1}{s}}(1-r)} \tag{9}$$

将式(9)两边同时对 t 在$(0,x)$上积分，得到

$$\delta_F(x)=\frac{k^{\frac{1}{s}}r-1}{k^{\frac{1}{s}}(1-r)}x+\delta_F(0)$$

由参考文献[12]知，当且仅当 $k=\frac{1}{r^s}$时，X 服从指数分布，当且仅当 $k<\frac{1}{r^s}$时，X 服从 Pareto 分布，当且仅当 $k>\frac{1}{r^s}$时，X 服从有限维分布。定理证明完毕。

接下来，将结果推广到一个更一般的情形，将 k 作为 t 的函数。

定理 3　若 X 是非负连续随机变量，满足

$$\eta_r^s(x;t)=\frac{1}{(1-r)s}\{k(t)[\delta_F(t)]^s-1\} \tag{10}$$

那么

$$\delta_F(t)=\left\{\mu(k(0))^{\frac{1}{(1-r)s}}+\int_t^{\infty}\left[\frac{r(k(x))^{\frac{1}{(1-r)s}}-(k(x))^{\frac{r}{(1-r)s}}}{1-r}\right]\mathrm{d}x\right\}(k(t))^{\frac{1}{(1-r)s}}$$

证明 由式(2),有

$$(1-r)s\eta_r^s(X;t)=\left(\frac{\int_t^{\infty}\bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^s-1$$

代入式(10),得

$$\left(\frac{\int_t^{\infty}\bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^s-1=k(t)[\delta_F(t)]^s-1$$

也即

$$\left(\frac{\int_t^{\infty}\bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^s=k(t)[\delta_F(t)]^s \tag{11}$$

两边同时对 t 微分,得

$$s\left(\frac{\int_t^{\infty}\bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^{s-1}\left[-1+r\lambda_F(t)\frac{\int_t^{\infty}\bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right]=$$

$$k'(t)[\delta_F(t)]^s+sk(t)(\delta_F(t))^{s-1}\delta_F{}'(t)$$

代入式(5)和式(11),得

$$\begin{aligned}-s(k(t))^{\frac{s-1}{s}}+rsk(t)\delta_F{}'(t)+rsk(t)=\\ k'(t)\delta_F(t)+sk(t)\delta_F{}'(t)\end{aligned} \tag{12}$$

简化式(12),得

$$\delta_F{}'(t)+\frac{k'(t)}{(1-r)sk(t)}\delta_F(t)=\frac{1-rk^{\frac{1}{s}}(t)}{(1-r)k^{\frac{1}{s}}(t)}$$

解这个非齐次线性微分方程,有

$$\delta_F(t)=\left\{\mu(k(0))^{\frac{1}{(1-r)s}}+\int_t^{\infty}\left[\frac{r(k(x))^{\frac{1}{(1-r)s}}-(k(x))^{\frac{r}{(1-r)s}}}{1-r}\right]\mathrm{d}x\right\}(k(t))^{\frac{1}{(1-r)s}}$$

即证。

接下来,用风险率函数来描述动态累积剩余(r,s)熵的寿命模型,有以下结果。

定理 4 设 X 是具有生存函数 $\bar{F}(t)$、风险率函数 $\lambda_F(t)$ 的非负连续随机变量,且

$$\eta_r^s(x;t)=\frac{1}{(1-r)s}\left\{\frac{k}{(\lambda_F(t))^s}-1\right\} \tag{13}$$

那么

(i) 当且仅当 $k=\frac{1}{r^s}$ 时,X 服从指数分布;

(ii) 当且仅当 $k<\frac{1}{r^s}$ 时,X 服从 Pareto 分布;

(iii) 当且仅当 $k>\frac{1}{r^s}$ 时,X 服从有限维分布。

证明 假设式(13)成立,那么有

$$\frac{1}{(1-r)s}\left[\left(\frac{\int_t^{\infty}\bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^s-1\right]=\frac{1}{(1-r)s}\left\{\frac{k}{(\lambda_F(t))^s}-1\right\}$$

由此可得

$$\left(\frac{\int_t^{\infty}\bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x}{\bar{F}^r(t)}\right)^s=\frac{k}{(\lambda_F(t))^s} \tag{14}$$

式(14)可转化为

$$f(t)\int_t^{\infty}\bar{F}^r(x)\,\mathrm{d}x=k^{\frac{1}{s}}\bar{F}^{r+1}(t)$$

等式两边同时对 t 微分,得

$$\lambda_F(t)=\left[\frac{k^{\frac{1}{s}}r-1}{k^{\frac{1}{s}}}t+\frac{1}{\lambda_F(0)}\right]^{-1}=(at+b)^{-1} \tag{9}$$

这里 $a=\frac{k^{\frac{1}{s}}r-1}{k^{\frac{1}{s}}}$,$b=\frac{1}{\lambda_F(0)}$。

若 $k=\frac{1}{r^s}$,则风险率函数为常数,即 X 服从指数分布;若 $k>\frac{1}{r^s}$,则 $a>0$,式(15)是服从 Pareto 分布的风险率函数;若 $k<\frac{1}{r^s}$,则 $a<0$,式(15)是服从有限维分布的风险率函数。

定理的唯一性易证。

4 结 论

将累积剩余熵推广到参数更多的(r,s)熵,定义了其相关的累积剩余熵及其动态版本,并研究了这些广义信息测度的一些性质和刻画结果。值得注意的是,当 $r\neq1$,$s=1$ 时,可由累积剩余(r,s)熵得到累积剩余 Tsallis 熵;当 $r\neq1$,$s=0$ 时,可由累积剩余(r,s)熵得到累积剩余 Renyi 熵。根据 r 和 s 的其他不同取值也可得到相应的基于其他熵的累积剩余熵,即累积剩余(r,s)熵涵盖了其他多种基于单参数熵定义的累积剩余熵,具有重要参考意义。

参考文献(References):

[1] HAVRDA J , FRANTIEK C. Quantification Method of Classification Processes: Concept of Structural α Entropy[J]. Kybernetika Praha, 1967,3(1):30—35

[2] RATHIE P N, TANEJA I J. Unified (r,s)-entropy and Its Bivariate Measures[J]. Information Sciences, 1991, 54(1-2):23—39

[3] EBRAHIMI N. How to Measure Uncertainty in the Residual Life Time Distribution[J]. Sankhyā:The Indian Journal of Statistics,Series A,1996, 58(1):48—56

[4] NANDA A K , PAUL P . Some Properties of Past Entropy and Their Applications[J]. Metrika, 2006, 64(1):47—61

[5] RAO M , CHEN Y , VEMURI B C , et al. Cumulative Residual Entropy: A New Measure of Information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(6): 1220—1228

[6] RAO M . More on a New Concept of Entropy and Information[J]. Journal of Theoretical Probability, 2005, 18(4):967—981

[7] WANG F , VEMURI B C . Non-Rigid Multi-Modal Image Registration Using Cross-Cumulative Residual Entropy[J]. International Journal of Computer Vision, 2007, 74(2):201—215

[8] ASADI M, ZOHREVAND Y. On the Dynamic Cumulative Residual Entropy[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2007, 137(6):1931—1941

[9] ABBASNEJAD M, ARGHAMI N R, MORGENTHALER S, et al. On the Dynamic Survival Entropy[J]. Statistics and Probability Letters, 2010, 80(23-24):1962—1971

[10] MOHAN S M , NITIN G. Some Characterization Results on Dynamic Cumulative Residual Tsallis Entropy[J]. Journal of Probability and Statistics, 2015(2015):1—8

[11] KUMAR V. Characterization Results Based on Dynamic Tsallis Cumulative Residual Entropy[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2017, 46(17): 8343—8354

[12] GUPTA R C, KIRMANI S N U A. Some Characterization of Distributions by Functions of Failure Rate and Mean Residual Life[J]. Communications in Statistics, 2004, 33(12):3115—3131

Research on the Dynamic Cumulative Residual(r,s) Entropy

WANG Tian-tian, WANG Jia-mei

(School of School of Mathematics & Physics, Anhui University of Technology, Anhui Ma'anshan 243032, China)

Abstract:The cumulative residual (r,s) entropy and its dynamic version are proposed. Firstly, this paper popularizes the research of kumar and soon on *cumulative* residual *Tsallis* entropy and puts forward the definition of cumulative residual (r,s) entropy, and the expression of its bounded sufficient conditions and some different single-variable continuous distributions of the measured cumulative residual measurement are given. Then, the definition and some properties of dynamic accumulated residual(r,s)entropy are given. Finally, some distributions are characterized by the relationship between average residual life function, risk rate function and accumulated residual (r,s) entropy. Accumulated residual entropy with multiple parameters is of reference significance for cumulative residual entropy based on single parameters such as *Renyi* entropy and *Tsallis* entropy.

Key words: (r,s) entropy; cumulative residual entropy ; survival function; risk rate function; average residual life function

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

王甜甜,汪加梅. 关于累积剩余(r,s)熵的研究[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(6):76—81

WANG T T, WANG J M. Research on the Dynamic Cumulative Residual(r,s) Entropy[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2021,38(6):76—81