doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0006.009

凸度量空间中的广义凸性*

甘庆龄, 旷华武**, 杨光惠
(贵州大学 数学与统计学院,贵阳 550025)

摘　要:针对凸度量空间中的抽象凸结构,提出了 3 种新广义 W-凸函数,以及利用中点 W-凸性研究了凸度量空间中广义凸性的方法。首先,将线性空间中基于标准凸结构的 3 种广义凸函数概念引入了凸度量空间,定义了 3 种新广义 W-凸函数;其次,在适当条件下,证明了中间点 W-凸函数是中点 W-凸函数,也是 $[0,1]\cap Q$-W-凸函数,进而获得了稠密性定理,并讨论了稠密性定理在极小化问题和多目标规划问题中的应用;最后,在中点 W-凸性以及上半连续性或下半连续性或 W-拟凸性或 W-严格拟凸性或 W-半严格拟凸性等条件下,建立了 W-凸函数的一些判别准则。获得的稠密性定理与利用中点凸性建立判别准则的方法,可以应用于其他类型凸性或广义凸性相关问题的研究。

关键词:凸度量空间;W-凸函数;中点 W-凸函数;判别准则;多目标规划
中图分类号:O174.13; O177.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2021)06-0068-08

0　引　言

凸集与凸映射、广义凸集与广义凸映射,分别是凸性理论和广义凸性理论的主要研究内容之一,在线性规划、无约束优化、约束优化、多目标规划、博弈论等最优化理论,以及不动点理论、非线性分析等研究中有非常重要的应用。有关广义凸性的研究可参考文献[1-9]。在通常意义下,例如在 R^n 中,凸函数、拟凸函数等概念是基于基础线性空间中的标准凸结构 $W(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$[1]。因此,关于凸性与广义凸性的研究,通常在线性空间中进行[1-3,7-9],在没有线性结构的度量空间中,相关理论较少。另一方面,正如线性空间,度量空间也是数学中常见的基本空间之一。因为度量空间不必具有线性结构,不一定能像线性空间一样引进标准的凸集、凸函数等概念,所以能否突破这种限制,即能否在度量空间中引入某种结构,使它具有线性空间中标准凸结构的某些性质,从而可以在度量空间中定义"凸集"与"凸函数"等,是值得探讨的。

1970 年,Takahashi[4] 首次在度量空间中引进了凸结构,命名这类度量空间为凸度量空间,并介绍了凸度量空间中的一些基本概念和基本理论,推广了一些不动点定理;2016 年,Abdelhakim[5] 在凸度量空间首次引入了 W-凸函数与 W-严格凸函数概念,讨论了其性质,建立了一个 W-凸函数的判别准则,获得了两个不动点定理;2017 年,Jafari[6] 在凸度量空间首次引入了 W-拟凸函数,研究了平衡问题。注意到:第一,自 Takahashi 定义凸度量空间以来,对凸度量空间中不动点定理的研究较多[4-6,11],对凸度量空间中广义凸集与广义凸函数的研究较少;第二,与线性空间比较,例如与文献[1]比较,文献[4-6]中对广义凸函数类型的定义是不完善的,W-凸函数的判别准则仅有一个且条件较强。本文的目的是应用研究凸性及广义凸性的基本思想方法,尤其是文献[1]及[2,7]中的基本思想方法,针对凸度量空

收稿日期:2020-11-19;**修回日期**:2020-12-31.
* **基金项目**:贵州省科技计划项目资助(黔科合基础[2019]1067 号).
作者简介:甘庆龄(1997—),女,江西萍乡人,硕士研究生,从事广义凸性研究.
** **通讯作者**:旷华武(1970—),男,贵州思南人,教授,硕士生导师,从事广义凸性及其应用研究. Email:hwkuang@gzu.edu.cn.

间中的抽象凸结构,引进 3 种新广义 W-凸函数,研究 6 种广义 W-凸函数相关问题,包括中间点 W-凸函数的性质、稠密性定理及其应用、W-凸函数的一些判别准则等。

1　预备知识

定义 1[4]　设 (X,d) 是度量空间,$W:X\times X\times[0,1]\to X$ 是映射,如果 $d(z,W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda d(z,x)+(1-\lambda)d(z,y)$, $\forall x,y,z\in X,\lambda\in[0,1]$,则称 W 是 (X,d) 上的一个凸结构,(X,d,W) 是一个凸度量空间。

定义 2[4]　设 (X,d,W) 是凸度量空间,$K\subseteq X$,若任意 $x,y\in K$,任意 $\lambda\in[0,1]$,有 $W(x,y,\lambda)\in K$,则称 K 是 W-凸集。

双曲空间(hyperbolic space),包括具有线性结构的赋范线性空间,不具有线性结构的 CAT(0) 空间和 Busemann 凸空间,是凸度量空间。特别地,赋范线性空间按照标准凸结构 $W(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$ ($\forall x,y\in X$, $\forall 0\leqslant\lambda\leqslant 1$) 构成凸度量空间,$W$-凸集就是通常意义下的凸集。由于凸度量空间不一定具有线性结构,不一定是线性空间,所以 W-凸集不一定是通常意义下的凸集。

现在引进凸度量空间中的 3 种广义凸函数,为方便读者,将已有 3 种一并列出。

定义 3　设 (X,d,W) 是凸度量空间,$K\subseteq X$ 是 W-凸集,$f:K\to\mathbf{R}$。

(1) 如果 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,都有

$$f(W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

称 $f(x)$ 为 K 上的 W-凸函数[5]。

(2) 如果 $\forall x,y\in K,x\neq y$, $\forall\lambda\in(0,1)$,都有

$$f(W(x,y,\lambda))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

称 $f(x)$ 为 K 上的 W-严格凸函数[5]。

(3) 如果 $\forall x,y\in K,f(x)\neq f(y)$, $\forall\lambda\in(0,1)$,都有

$$f(W(x,y,\lambda))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

称 $f(x)$ 为 K 上的 W-半严格凸函数。

(4) 如果 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,都有

$$f(W(x,y,\lambda))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$$

称 $f(x)$ 为 K 上的 W-拟凸函数[6]。

(5) 如果 $\forall x,y\in K,x\neq y$, $\forall\lambda\in(0,1)$,都有

$$f(W(x,y,\lambda))<\max\{f(x),f(y)\}$$

称 $f(x)$ 为 K 上的 W-严格拟凸函数。

(6) 如果 $\forall x,y\in K,f(x)\neq f(y)$, $\forall\lambda\in(0,1)$,都有

$$f(W(x,y,\lambda))<\max\{f(x),f(y)\}$$

称 $f(x)$ 为 K 上的 W-半严格拟凸函数。

对于标准凸结构,W-凸函数、W-严格凸函数、W-半严格凸函数、W-拟凸函数、W-严格拟凸函数,W-半严格拟凸函数分别就是通常意义的凸函数,严格凸函数、半严格凸函数、拟凸函数、严格拟凸函数、半严格拟凸函数,后 6 种函数的定义见文献[1]。

严格 W-凸函数既是 W-凸的,又是 W-半严格凸的和 W-严格拟凸的;W-凸函数既是 W-拟凸的,又是 W-半严格拟凸的;严格 W-拟凸函数既是 W-拟凸的,又是 W-半严格拟凸的;半严格 W-凸函数是半严格 W-拟凸的。这 8 种蕴含关系的反蕴含关系,甚至对线性空间中的标准凸结构都不真,反例见文献[1]。

为讨论凸度量空间中的广义凸性,引入条件(W)[10]。

$$(\mathbf{W})\quad W(W(x,y,t),W(x,y,s),\lambda)=W(x,y,\lambda t+(1-\lambda)s)$$
$$\forall x,y\in X,t,s,\lambda\in[0,1]$$

赋范线性空间中的标准凸结构、CAT(0) 空间和 Busemann 空间中的凸结构都满足条件(W)。

例 1　设 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是实 Hilbert 空间,X 是 H 中单位球面 $\{x\in H:\|x\|=1\}$ 的一个闭子集,其直径 $\delta(X)\leqslant\sqrt{2}$ 且 X 是测地连通的。定义 $d_1:X\times X\to[0,+\infty)$ 为 $d_1(x,y)=\arccos\langle x,y\rangle$, $\forall x,y\in X$,定义 $W:X\times X\times[0,1]\to X$ 为 $W(x,y,\lambda)=\dfrac{1}{\|\lambda x+(1-\lambda)y\|}(\lambda x+(1-\lambda)y)$, $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,则 (X,d_1,W) 是凸度量空间[11]。

取 $H=R^3$,有 $X=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,x_i\geqslant 0,i=1,2,3\}$,则 (X,d_1,W) 是凸度量空间,但 X 按通常 R^3 中的向量加法和数乘不构成线性空间,在此含义下,(X,d_1,W) 不是赋范线性空间,X 显然是 W-凸集,但 X 作为 R^3 的子集,不是通常意义下的凸集。

取 $x_0=(1,0,0)\in X$,令 $f:X\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x)=\arccos x_1,\ \forall x=(x_1,x_2,x_3)\in X$$

则 f 是 W-凸函数,这是因为

$$f(W(x,y,\lambda))=d_1(x_0,W(x,y,\lambda))\leqslant$$
$$\lambda d_1(x_0,x)+(1-\lambda)d_1(x_0,y)=$$
$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$\forall x,y\in X,\ \forall\lambda\in[0,1]$$

例 2　设 X 为闭区间族 $[a_i,b_i]$,其中 $0\leqslant a_i<$

$b_i\leqslant 1$。对 $I_i=[a_i,b_i]\in X,I_j=[a_j,b_j]\in X,\forall 0\leqslant\lambda\leqslant 1$,定义

$$W(I_i,I_j,\lambda)=[\lambda a_i+(1-\lambda)a_j,\lambda b_i+(1-\lambda)b_j]$$

再通过 Hausdorff 距离定义 X 上的度量 d,则 (X,d,W) 是凸度量空间[4]。容易验证凸结构满足条件(W)。令 $f,g:X\to\mathbf{R}$ 为 $f([x,y])=x^2+y^2$,$\forall[x,y]\in X$,有

$$g([x,y])=\begin{cases}1, & x=\dfrac{1}{2}\\ 0, & x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases},\quad\forall[x,y]\in X$$

易知 f 是 W-严格凸函数,g 是 W-半严格凸函数,从而也是 W-半严格拟凸函数,但不是其他 4 类函数。

引理 1[4] 设 (X,d,W) 是凸度量空间,那么 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,有

(1) $W(x,x,\lambda)=x,W(x,y,0)=y$

$$W(x,y,1)=x$$

(2) $d(x,W(x,y,\lambda))=(1-\lambda)d(x,y)$

$$d(y,W(x,y,\lambda))=\lambda d(x,y)$$

引理 2[10] 设 (X,d,W) 是凸度量空间,凸结构 W 满足条件(W),有

(1) $W(x,y,\lambda)$ 关于 λ 是连续的;

(2) Synchronized 性质成立,即

$$W(x,y,\lambda)=W(y,x,1-\lambda)$$
$$\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$$

2 中点 W-凸性与稠密性定理

除非特别声明,下文总设 (X,d,W) 是凸度量空间,凸结构 W 满足条件(W),$K\subseteq X$ 是 W-凸集,f: $K\to\mathbf{R}$。

引理 3 设 f 为 K 上的 W-半严格拟凸函数,x,$y\in K$ 且 $f(x)=f(y)$,则

(1) 至多存在一个 $\beta\in(0,1)$,使得

$$f(W(x,y,\beta))>f(x)=f(y)$$

(2) 若存在 $\beta\in(0,1)$,使得

$$f(W(x,y,\beta))>f(x)=f(y)$$

则 $\forall\lambda\in[0,1],\lambda\neq\beta$,有

$$f(W(x,y,\lambda))=f(x)=f(y)$$

证明 (1) 如果存在 $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1),\lambda_1\neq\lambda_2$,使 $f(W(x,y,\lambda_1))>f(x)=f(y),f(W(x,y,\lambda_2))>f(x)=f(y)$。不妨设 $0<\lambda_1<\lambda_2<1$,令 $\lambda=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\in(0,1)$,则由条件(W),知

$$W(x,y,\lambda_1)=W(W(x,y,\lambda_2),W(x,y,0),\lambda)$$

由 f 为 K 上 W-半严格拟凸函数与引理 1,得

$$f(W(x,y,\lambda_1))<\max\{f(W(x,y,\lambda_2)),f(y)\}=f(W(x,y,\lambda_2))$$

令 $u=\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{1-\lambda_1}\in(0,1)$,则由引理 2,知

$$W(x,y,\lambda_2)=W(y,x,(1-\lambda_2))=W(W(y,x,(1-\lambda_1)),W(y,x,0),1-u)$$

注意到 $W(y,x,1-\lambda_1)=W(x,y,\lambda_1)$,则由 f 的 W-半严格拟凸性,得

$$f(W(x,y,\lambda_2))<\max\{f(W(y,x,1-\lambda_1)),f(x)\}=f(W(x,y,\lambda_1))$$

这与 $f(W(x,y,\lambda_1))<f(W(x,y,\lambda_2))$ 矛盾,故结论正确。

(2) 用反证法,由引理 3(1)知,$f(W(x,y,\lambda))\leqslant f(x)=f(y)$,$\forall\lambda\in(0,1),\lambda\neq\beta$。假设 $\exists\lambda_0\in(0,1),\lambda_0\neq\beta$,使

$$f(W(x,y,\lambda_0))<f(x)=f(y)$$

当 $1>\beta>\lambda_0>0$ 时,取 $u=\dfrac{\beta-\lambda_0}{1-\lambda_0}\in(0,1)$,则有

$$W(x,y,\beta)=W(y,x,(1-\beta))=W(W(y,x,(1-\lambda_0)),W(y,x,0),1-u)$$

以及

$$f(W(x,y,\beta))<\max\{f(W(y,x,(1-\lambda_0))),f(x)\}=f(x)$$

与已知条件矛盾。

当 $0<\beta<\lambda_0<1$,取 $t=\dfrac{\beta}{\lambda_0}\in(0,1)$,则 $W(x,y,\beta)=W(W(x,y,\lambda_0),W(x,y,0),t)$。由 f 的 W-半严格拟凸性,得 $f(W(x,y,\beta))<f(y)$,与已知条件矛盾。综上所述,引理得证。

引理 4 若存在 $\alpha\in(0,1)$,使 $\forall x,y\in K$,$f(W(x,y,\alpha))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$,则有

(1) 对 $\forall x,y\in K$,成立

$$f(W(x,y,\frac{1}{2}))\leqslant\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$$

(2) $\Lambda_n\subseteq T_W$,其中

$$\Lambda_n=\{\frac{m}{2^n}:m=0,1,\cdots,2^n\},n=1,2,3,\cdots$$

以及

$$T_W=\{\lambda\in[0,1]\mid f(W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall x,y\in K\}$$

证明 (1) 因为

$$(1-\alpha)\frac{(1-\alpha)}{2}+\alpha(\frac{1}{2}+\frac{1-\alpha}{2})=\frac{1}{2}$$

所以由条件(W)，对 $\forall x,y\in K$，成立

$$W(x,y,\frac{1}{2})=$$
$$W(W(x,y,\frac{1}{2}+\frac{1-\alpha}{2}),\ W(x,y,\frac{1-\alpha}{2}),\alpha)$$
$$W(x,y,\frac{1}{2}+\frac{1-\alpha}{2})=$$
$$W(W(x,y,\frac{1}{2}),\ W(x,y,1),\alpha)$$
$$W(x,y,\frac{1-\alpha}{2})=$$
$$W(W(x,y,0),\ W(x,y,\frac{1}{2}),\alpha)$$

因此由已知条件，得

$$f(W(x,y,\frac{1}{2}))\leqslant$$
$$\alpha f(W(x,y,\frac{1}{2}+\frac{1-\alpha}{2}))+$$
$$(1-\alpha)f(W(x,y,\frac{1-\alpha}{2}))\leqslant$$
$$\alpha[\alpha f(W(x,y,\frac{1}{2}))+(1-\alpha)f(W(x,y,1))]+$$
$$(1-\alpha)[\alpha f(W(x,y,0))+(1-\alpha)f(W(x,y,\frac{1}{2}))]=$$
$$\alpha^2 f(W(x,y,\frac{1}{2}))+\alpha(1-\alpha)f(x)+$$
$$\alpha(1-\alpha)f(y)+(1-\alpha)^2 f(W(x,y,\frac{1}{2}))$$

等价于

$$[1-\alpha^2-(1-\alpha)^2]f(W(x,y,\frac{1}{2}))\leqslant$$
$$\alpha(1-\alpha)f(x)+\alpha(1-\alpha)f(y)$$

即 $f(W(x,y,\frac{1}{2}))\leqslant\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$。

(2)用数学归纳法。显然 $0,1\in T_W$，当 $n=1$ 时，由(1)知 $\frac{1}{2}\in T_W$；由 $n=2$，因为

$$f(W(x,y,\frac{1}{4}))=f(W(W(x,y,\frac{1}{2}),W(x,y,0),\frac{1}{2}))\leqslant$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)]+\frac{1}{2}f(y)=$$
$$\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$$

所以 $\frac{1}{4}\in T_W$。

$$f(W(x,y,\frac{3}{4}))=f(W(W(x,y,\frac{1}{2}),W(x,y,1),\frac{1}{2}))\leqslant$$
$$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)]+\frac{1}{2}f(x)=$$
$$\frac{3}{4}f(x)+\frac{1}{4}f(y)$$

所以 $\frac{3}{4}\in T_W$。

以上表明 $n=2$ 时，$0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\in T_W$。

假设当 $n=k$ 时，对 $0\leqslant m\leqslant 2^k$，有 $\frac{m}{2^k}\in T_W$。下证当 $n=k+1$ 时，对 $0\leqslant m\leqslant 2^{k+1}$，成立 $\frac{m}{2^{k+1}}\in T_W$。

事实上，当 $0\leqslant m\leqslant 2^k$ 时，因为

$$f(W(x,y,\frac{m}{2^{k+1}}))=$$
$$f(W(W(x,y,\frac{m}{2^k}),W(x,y,0),\frac{1}{2}))\leqslant$$
$$\frac{1}{2}f(W(x,y,\frac{m}{2^k}))+\frac{1}{2}f(y)\leqslant$$
$$\frac{1}{2}[\frac{m}{2^k}f(x)+(1-\frac{m}{2^k})f(y)]+\frac{1}{2}f(y)$$

所以 $\frac{m}{2^{k+1}}\in T_W$。

当 $2^k<m\leqslant 2^{k+1}$ 时，

$$1-\frac{m}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}-m}{2^{k+1}}$$

此时 $0\leqslant 2^{k+1}-m\leqslant 2^k$，由上一步证明知 $1-\frac{m}{2^{k+1}}\in T_W$。因为

$$f(W(x,y,\frac{m}{2^{k+1}}))=f(W(y,x,(1-\frac{m}{2^{k+1}})))\leqslant$$
$$(1-\frac{m}{2^{k+1}})f(y)+(1-(1-\frac{m}{2^{k+1}}))f(x)=$$
$$\frac{m}{2^{k+1}}f(x)+(1-\frac{m}{2^{k+1}})f(y)$$

所以 $\frac{m}{2^{k+1}}\in T_W$，即当 $n=k+1$ 时，对 $0\leqslant m\leqslant 2^{k+1}$，成立 $\frac{m}{2^{k+1}}\in T_W$，则由归纳法，知 $\Lambda_n\subseteq T_W$。

设 (X,d,W) 是凸度量空间，$K\subseteq X$ 是 W-凸集，$f:K\to\mathbf{R}$，如果存在 $\alpha\in(0,1)$，使

$$f(W(x,y,\alpha))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),\ \forall x,y\in K$$

则称 f 是 α-W-凸函数或者中间点 W-凸函数；如果 $\alpha=\frac{1}{2}$，称 f 是 $\frac{1}{2}$-W-凸函数或者中点 W-凸函数。引理 4 证明了中间点 W-凸函数是中点 W-凸函数。

由于$\bigcup_{n=1}^{\infty}\Lambda_n$ 在$[0,1]$中稠密,故 T_W 在$[0,1]$中稠密。

对线性空间 X 及其标准凸结构,若$f:X\to\mathbf{R}$ 且 f 是中间点凸的,那么$[0,1]\cap Q\subseteq T$,其中 $T=\{t\in[0,1]:f(y+t(x-y))\leqslant tf(x)+(1-t)f(y),\ \forall x,y\in X\}$。下证上述结果对中点 W-凸函数也成立。

引理 5 设 f 是中点 W-凸的,即$\frac{1}{2}\in T_W$,则 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in T_W,\lambda_1\lambda_2\neq 0,1$,成立

$$k=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\in T_W$$

证明 注意到:

$$k=\lambda_1(\lambda_1k)+(1-\lambda_1)[\lambda_2+(1-\lambda_2)k]=\lambda_1^2k+(1-\lambda_1)[\lambda_2+(1-\lambda_2)k]$$

由 W 满足条件(W),成立

$$W(x,y,k)=W(W(x,y,\lambda_1k),\ W(x,y,\lambda_2+(1-\lambda_2)k,\lambda_1)$$

$$W(x,y,\lambda_1k)=W(W(x,y,k),W(x,y,0),\lambda_1)$$

$$W(x,y,\lambda_2+(1-\lambda_2)k)=W(W(x,y,1),W(x,y,k),\lambda_2)\text{。}$$

由 $\lambda_1,\lambda_2\in T_W$,知

$$\begin{aligned}&f(W(x,y,k))\leqslant\lambda_1f(W(x,y,\lambda_1k))+\\&(1-\lambda_1)f(W(x,y,(\lambda_2+(1-\lambda_2)k)))\leqslant\\&\lambda_1[\lambda_1f(W(x,y,k))+(1-\lambda_1)f(y)]+\\&(1-\lambda_1)[\lambda_2f(x)+(1-\lambda_2)f(W(x,y,k))]=\\&\lambda_1^2f(W(x,y,k))+\lambda_1(1-\lambda_1)f(y)+\\&(1-\lambda_1)\lambda_2f(x)+(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)f(W(x,y,k))\end{aligned}$$

因此,得到

$$[1-\lambda_1^2-(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)]f(W(x,y,k))\leqslant\lambda_1(1-\lambda_1)f(y)+(1-\lambda_1)\lambda_2f(x)$$

即有

$$f(W(x,y,k))\leqslant\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}f(x)+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}f(y)$$

这说明 $k=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\in T_W$。

定理 1(稠密性定理) 设(X,d,W)是凸度量空间,W 满足条件(W),$K\subseteq X$ 是 W-凸集,$f:K\to\mathbf{R}$,$\frac{1}{2}\in T_W$,则$[0,1]\cap Q\subseteq T_W$,T_W 在$[0,1]$中稠密。

证明 由引理 4,知

$$\frac{1}{2}\in T_W,\frac{k}{2^n}\in T_W,\ \forall 0\leqslant k\leqslant 2^n,\ \forall n=1,2,3,\cdots$$

对任意有理数$\frac{n}{m}\in Q\cap[0,1]$($m,n$ 为正整数且互质),取 $\lambda_1=\frac{m-n}{2^p},\lambda_2=\frac{n}{2^p}$,其中 p 是正整数且充分大,则 $\lambda_1\in T_W,\lambda_2\in T_W,\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{n}{m}\in T_W$,因此$[0,1]\cap Q\subseteq T_W$。

现在讨论稠密性定理在优化问题中的应用。

定理 2 设$\frac{1}{2}\in T_W$,则 f 的每一个局部极小值点是全局极小值点。

证明 设 $x_0\in K$ 是 f 的局部极小值点,则$\exists\varepsilon>0,\forall x\in B_\varepsilon(x_0)\cap K,f(x_0)\leqslant f(x)$。任取 $y\in K$,由于 K 是 W-凸集,知$\forall\lambda\in(0,1),W(x_0,y,\lambda)\in K$。由稠密性定理得$[0,1]\cap Q\subseteq T_W$。取充分接近 1 的有理数 $\lambda_0\in[0,1]\cap Q\subseteq T_W$,使

$$d(x_0,W(x_0,y,\lambda_0))\leqslant\lambda_0d(x_0,x_0)+(1-\lambda_0)d(x_0,y)=(1-\lambda_0)d(x_0,y)<\varepsilon$$

则 $W(x_0,y,\lambda_0)\in B_\varepsilon(x_0)\cap K$,从而

$$f(x_0)\leqslant f(W(x_0,y,\lambda_0))\leqslant\lambda_0f(x_0)+(1-\lambda_0)f(y)$$

进而$f(x_0)\leqslant f(y)$。由 y 的任意性,知 x_0 是 f 的全局极小值点。

设(X,d,W)是凸度量空间,W 满足条件(W),$K\subseteq X$ 是 W-凸集,考虑多目标规划问题(MP):

$$(\mathrm{MP})\quad\min\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(f_1(x),\cdots,f_m(x))^{\mathrm{T}},x\in K$$

其中,$f_i:K\to R^1(i=1,2,\cdots,m),F:K\to R^m$ 是向量值函数。记

$$R_+^m=\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in R^m:\lambda_i\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant m\}$$

$$T_{W_i}=\{t\in[0,1]\mid f_i(W(x,y,t))\leqslant tf_i(x)+(1-t)f_i(y),\ \forall x,y\in K\},i=1,2,\cdots,m$$

根据文献[1]中定义 5.4.4,若$\bar{x}\in K$ 且不存在 $y\in K$,使 $F(y)\in F(\bar{x})-R_+^m\setminus\{0\}$,则称 $\bar{x}$ 为问题(MP)的全局有效解;若 $\bar{x}\in K$ 且存在 $\bar{x}$ 的邻域 $B_\varepsilon(\bar{x})$,不存在 $y\in K\cap B_\varepsilon(\bar{x})$,使 $F(y)\in F(\bar{x})-R_+^m\setminus\{0\}$,则称 $\bar{x}\in K$ 为问题(MP)的局部有效解。

定理 3 设$\frac{1}{2}\in T_{W_i}(i=1,2,\cdots,m)$,则问题(MP)的任何局部有效解为全局有效解。

证明 由稠密性定理得$[0,1]\cap Q\subseteq T_{W_i}$。设 $x_0\in K$ 为问题(MP)的局部有效解,即存在 x_0 的邻域 $B_\varepsilon(x_0)$,不存在 $x\in B_\varepsilon(x_0)\cap K$,使得 $f_i(x)\leqslant f_i(x_0),i=1,2,\cdots,m$,至少存在一个 $1\leqslant j\leqslant m$,使 $f_j(x)<f_j(x_0)$。

若 $x_0\in K$ 不是全局有效解,那么$\exists x^*\in K$,使 $f_i(x^*)\leqslant f_i(x_0),i=1,2,\cdots,m$,至少存在$1\leqslant j\leqslant m$,使

$f_j(x^*)<f_j(x_0)$。取充分接近 1 的有理数 $\lambda\in[0,1]\cap Q\subseteq T_{W_i}$,使

$$d(x_0,W(x_0,x^*,\lambda))\leqslant \lambda d(x_0,x_0)+(1-\lambda)d(x_0,x^*)<\varepsilon$$

则 $W(x_0,x^*,\lambda)\in B_\varepsilon(x_0)\cap K$,从而

$$f_i(W(x_0,x^*,\lambda))\leqslant \lambda f_i(x_0)+(1-\lambda)f_i(x^*)\leqslant f_i(x_0)$$

$i=1,2,\cdots,m$,且

$$f_j(W(x_0,x^*,\lambda))\leqslant \lambda f_j(x_0)+(1-\lambda)f_j(x^*)<f_j(x_0)$$

矛盾,故定理得证。

3　W–凸函数判别准则

本节讨论 W–凸函数的一些判别准则。设(X,d,W)是凸度量空间,W 满足条件(W),$K\subseteq X$ 是 W–凸集,$f:K\to\mathbf{R}$。

定理 4　设$\frac{1}{2}\in T_W$, f 下半连续,则 f 是 W–凸函数。

证明　$\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,由定理 1,T_W 在$[0,1]$中是稠密的,因此存在收敛于 λ 的序列$\{\lambda_n\}\subseteq T_W$。由引理 2,$W(x,y,t)$关于 t 连续且 f 下半连续,则有

$$f(W(x,y,\lambda))\leqslant \varliminf_{n\to\infty} f(W(x,y,\lambda_n))\leqslant \varliminf_{n\to\infty}(\lambda_n f(x)+(1-\lambda_n)f(y))=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

这说明 f 是 W–凸函数。

定理 5　设$\frac{1}{2}\in T_W$,且 f 上半连续,则 f 是 W–凸函数。

证明　$\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,只需证明 $f(W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

不妨 $\lambda\neq0,\lambda\neq1,x\neq y$。由 T_W 在$[0,1]$中稠密,取 $\lambda_n\in T_W,\lambda_n>\lambda$,使 $\lambda_n\to\lambda$,则

$$f(W(x,y,\lambda))=f(W(W(x,y,\frac{\lambda}{\lambda_n}),W(x,y,0),\lambda_n))\leqslant \lambda_n f(W(x,y,\frac{\lambda}{\lambda_n}))+(1-\lambda_n)f(y)$$

由引理 2,$W(x,y,t)$关于 t 连续,知 $W(x,y,\frac{\lambda}{\lambda_n})\to W(x,y,1)=x$。因为 f 上半连续,所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0,\forall n>N$,成立 $f(W(x,y,\frac{\lambda}{\lambda_n}))<f(x)+\varepsilon$,从而 $f(W(x,y,\lambda))<\lambda_n(f(x)+\varepsilon)+(1-\lambda_n)f(y)$,令 $\varepsilon\to0$, $n\to\infty$,得

$$f(W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

定理 6　设$\frac{1}{2}\in T_W$,f 是 W–拟凸函数,则 f 是 W–凸函数。

证明　$\forall x,y\in K$, $\forall t\in(0,1)$,只需证明 $f(W(x,y,t))\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$。

(1) 当 $f(x)=f(y)$时,由 f 的 W–拟凸性得到

$$f(W(x,y,t))\leqslant\max\{f(x),f(y)\}=f(x)=tf(x)+(1-t)f(y)$$

(2) 当 $f(x)\neq f(y)$时,有

① 若 $f(y)<f(x)$,分两种情况:

1) 当 $\exists t<t'<1$,使 $f(W(x,y,t'))\leqslant f(y)$时,由 f 的 W–拟凸性,得到

$$f(W(x,y,t))=f(W(W(x,y,t'),W(x,y,0),\frac{t}{t'}))\leqslant \max\{f(W(x,y,t')),f(y)\}=f(y)<tf(x)+(1-t)f(y)$$

2) 当 $\forall t<t'<1$ 成立, $f(W(x,y,t'))>f(y)$时,取 $t_n\in T_W,t_n>t,t_n\to t$。由 $W(x,y,t)=W(W(x,y,t_n),W((x,y,0),\frac{t}{t_n})$,知

$$f(W(x,y,t))\leqslant \max\{f(W(x,y,0)),f(W(x,y,t_n))\}=f(W(x,y,t_n))\leqslant t_nf(x)+(1-t_n)f(y)$$

$n\to\infty$,得

$$f(W(x,y,t))\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

② 若 $f(x)<f(y)$时,也分两种情况:

1) 当 $\exists 0<t'<t$,使 $f(W(x,y,t'))\leqslant f(x)$时,令 $\alpha=\frac{t-t'}{1-t'}$,则 $t=\alpha+(1-\alpha)t'$及 $W(x,y,t)=W(W(x,y,1),W(x,y,t'),\alpha)$,故

$$f(W(x,y,t))\leqslant\max\{f(W(x,y,t')),f(x)\}=f(x)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

2) 当 $\forall 0<t'<t$ 成立, $f(W(x,y,t'))>f(x)$时,取 $t_n\in T_W,t_n<t,t_n\to t$。令 $\alpha_n=\frac{t-t_n}{1-t_n}$,则

$$W(x,y,t)=W(W(x,y,1),W(x,y,t_n),\alpha_n)$$

$$f(W(x,y,t))\leqslant\max\{f(x),f(W(x,y,t_n))\}=f(W(x,y,t_n))\leqslant t_nf(x)+(1-t_n)f(y)$$

令 $n\to\infty$,有

$$f(W(x,y,t))\leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

定理 7 设 $\frac{1}{2}\in T_W$,f 是 W-半严格凸函数或 W-半严格拟凸函数,则 f 是 W-凸函数。

证明 W-半严格凸函数是 W-半严格拟凸函数,因此不妨设 f 是 W-半严格拟凸函数。由定理 6,现只需证明 f 为 W-拟凸函数。

如果 f 不是 W-拟凸函数,那么

$$\exists x,y\in K,x\neq y,\ \exists\lambda_0\in(0,1)$$

$$f(W(x,y,\lambda_0))>\max\{f(x),f(y)\}$$

(1) 当 $f(x)\neq f(y)$ 时,由 f 的 W-半严格拟凸性,有

$$f(W(x,y,\lambda_0))<\max\{f(x),f(y)\}$$

矛盾。

(2) 当 $f(x)=f(y)$ 时,由引理 3,$f(W(x,y,\lambda))=f(x)=f(y)$,$\forall\lambda\in[0,1]$,$\lambda\neq\lambda_0$,

取 $0<t<\lambda_0<s<1$,使 $\lambda_0=\frac{t+s}{2}$,则

$$f(W(x,y,\lambda_0))=$$

$$f(W(W(x,y,t),W(x,y,s),\frac{1}{2}))\leq$$

$$\frac{1}{2}f(W(x,y,t))+\frac{1}{2}f(W(x,y,s))=f(x)$$

矛盾。以上说明 f 为 W-拟凸函数,从而由定理 6 知结论成立。

4 结 论

针对凸度量空间中的抽象凸结构,将线性空间中基于标准凸结构的 3 种广义凸函数概念引入了凸度量空间,定义了 3 种新广义 W-凸函数,证明了中间点 W-凸函数是中点 W-凸的以及 $[0,1]\cap Q$-W-凸的,获得了稠密性定理;利用中点 W-凸性,建立了 W-凸函数的判别准则等。获得稠密性定理的方法有一定的技巧性与新意,可以应用于一些其他凸或广义凸映射稠密性问题的研究,例如对中间点预不变凸函数的相关稠密性问题的研究。利用中点广义凸性而不是中间点广义凸性建立判别准则的方法,可以应用于建立其他一些凸或广义凸或锥凸或广义锥凸映射的判别准则。例如,利用本文及文献[1]中的思想方法,可以作如下乐观的预期:一方面,可以将文献[1]中建立凸函数判别准则的条件中间点凸性简化为中点凸性;另一方面,可以将文献[1]中严格凸函数、拟凸函数等的一些判别准则相应推广到凸度量空间。

参考文献(References):

[1] 杨新民,戎卫东. 广义凸性及其应用[M]. 北京:科学出版社,2016

YANG X M, RONG W D. Generalized Convexity and Its Applications[M]. Beijing: Science Press, 2016 (in Chinese)

[2] 彭建文. 广义凸性及其在最优化问题中的应用[D]. 呼和浩特:内蒙古大学,2005

PENG J W. Generalized Convexity with Applications in Optimization Problem [D]. Hohhot: Inner Mongolia University,2005(in Chinese)

[3] 杨玉红. 预不变凸性及在半无限多目标优化问题的最优性和对偶性中的应用[D]. 呼和浩特:内蒙古大学,2017

YANG Y H. Preinvexity and Its Applications in Optimization and Duality for Semi-infinite Multiobjective Optimization Problems[D]. Hohhot: Inner Mongolia University,2017(in Chinese)

[4] TAKAHASHI W. A Convexity in Metric Space and Nonexpansive Mappings[J]. Kodai Mathematical Seminar Reports,1970,22:142—149

[5] ABDELHAKIM A. A Convexity of Functions on Convex Metric Spaces of Takahashi and Applications[J]. Journal of the Egyptian Mathematical Society,2016,24: 348 - 354

[6] JAFARI S. Existence Results for φ - quasimonotone Equilibrium Problems in Convex Metric Spaces[J]. A Journal of Mathematical Programming and Operations Research,2017,66:293—310

[7] 旷华武. 中点凸性与广义凸函数相关集合的对称性问题[J]. 数学的实践与认识,2019,49(4):185—192

KUANG H W. Midpoint Convexity and Symmetrization Problems of Sets Concerned with Generalized Convex Functions[J]. Mathematics in Practice and Theory,2019,49(4):185—192 (in Chinese)

[8] 陈丽娟,旷华武,杨光惠. 中点预不变凸函数是(0,1)∩Q-预不变凸的[J]. 贵州大学学报(自然科学版),2019,36(6):10—16

CHEN L J, KUANG H W, YANG G H. The Midpoint Preinvex Functions are(0,1)∩Q-Preinvex Functions[J]. Journal of Guizhou University(Natural Science) Edition,2019,36(6):10—16 (in Chinese)

[9] 李均,刘晓静. 广义 E-凸函数的几点新发现[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2017,34(4):20—23

LI J, LIU X J. Some New Findings of Generalized E-Convex Function [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University(Natural Science Edition),2017,34(4): 20—23 (in Chinese)

[10] 旷华武.本质上是 Banach 空间闭凸子集的凸度量空间[J].应用数学学报,2020,43(4):728—741
KUANG H W. Convex Metric Spaces Which Are Essentially Closed Convex Subsets of Banach Spaces[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2020, 43 (4): 728—741 (in Chinese)

[11] NICOLAE A. Asymptotic Behavior of Averaged and Firmly Nonexpansive Mappings in Geodesic Spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2013,87(1):102—115

Generalized Convexity in Convex Metric Spaces

GAN Qing-ling, KUANG Hua-wu, YAMG Guang-hui

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: For the abstract convex structure in convex metric spaces, three new generalized W-convex functions are proposed, and the method of using midpoint W-convexity to study generalized convexity in convex metric spaces is proposed. Firstly, the concepts of three generalized convex functions based on standard convex structure in linear space are introduced into convex metric space, and three new generalized W-convex functions are defined; Secondly, under some appropriate conditions, it is proved that the intermediate point W-convex function is a midpoint W-convex function, and the midpoint W-convex function is also $[0,1]\cap Q$-W-convex function. Furthermore we obtain density theorem and discuss some applications of the density theorem in minimization and multiobjective programming problem; Finally, several discriminant criterions of W-convex function are established under the conditions of midpoint W-convexity and upper semicontinuity or lower semicontinuity or W-quasiconvexity or W-strict quasiconvexity or W-semi-strict quasiconvexity. The method of obtaining density theorem and establishing criterions by using midpoint convexity can be applied to the study of the related problems of other types of convexity or generalized convexity.

Key words: convex metric spaces; W-convex function; midpoint W-convex function; discriminant criterion; multiobjective programming

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

甘庆龄,旷华武,杨光惠. 凸度量空间中的广义凸性[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(6):68—75

GAN Q L, KUANG H W, YANG G H. Generalized Convexity in Convex Metric Spaces[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2021,38(6):68—75