

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0005.015

## 两点边值问题二尺度小波核LS-SVM解法\*

张艳敏, 吴自库\*\*

(1. 青岛理工大学 琴岛学院, 山东 青岛 266106; 2. 青岛农业大学 理学与信息科学学院, 山东 青岛 266109)

**摘要:**针对两点边值问题难以得到解析解,提出了利用二尺度小波核最小二乘支持向量机方法求两点边值问题的近似解;首先将两点边值问题转换为带有两个约束条件的目标优化问题,再利用二尺度小波核函数的组合构造满足边界条件的近似解;其中第一个约束条件用第一尺度小波核函数逼近,第二个约束条件是对第一次逼近的误差函数用第二尺度小波核函数再次逼近,可提高近似解逼近精度;最后将目标优化问题转化为回归问题,进而利用最小二乘支持向量机方法求解回归系数,系数求解过程中核心是将参数回归问题转化为二次规划问题,可避免复杂的微分运算;数值实验表明:方法求解两点边值问题有较高的精度,计算量小,并且具有较好的稳定性,因此二尺度小波核最小二乘支持向量机方法求解两点边值问题的近似解是有效的,并且具有精度高、可微、表达式简单且形式固定等特点。

**关键词:**二尺度小波核;最小二乘支持向量机;两点边值问题;近似解

**中图分类号:**O175.8

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-058X(2021)05-0091-06

### 0 引言

两点边值问题即在给定边界两点定解条件下,寻找微分方程解析解的问题。两点边值问题模型在应用科学和工程技术领域中有广泛的应用。很多物理、航空航天、生物、化学等问题都可以用两点边值问题来描述<sup>[1-3]</sup>,因此有很多学者对两点边值问题进行深入研究。然而事实表明两点边值问题很难获得解析解,因此研究其数值解法是非常必要的。传统求解方法包括刘颖<sup>[4]</sup>利用有限差分法研究了两点边值问题的数值解,该方法理论成熟,显示差分格式稳定性好,但稳定性与步长密切相关。罗炯兴<sup>[5]</sup>利用同伦分析法求解,得到了逼近解析解的函数级数形式,但随着级数项增加,逼近精度提高的同时,计算量会大幅度提升。卢仁洋等<sup>[6]</sup>采用有限元法求解了可齐次化的Dirichlet、Neumann两点边值问题,实现了对计算过程的简化。冯和英<sup>[7]</sup>采用有

限体积法求解了延迟两点边值问题,提出了线性离散插值与数值积分相结合的处理方式,得到的数值解关于步长是二阶收敛的。Winfried A等<sup>[8]</sup>提出通过打靶法求解自适应两点边值问题,得到了较高的逼近精度。然而这些传统的方法为保持差分格式的稳定性,都需要对步长进行严格限制,往往计算量也比较大,因此近些年出现一些改进的软计算方法。杨云磊<sup>[9]</sup>利用神经网络法分析神经网络模型中网络拓扑结构及样本量对两点边值问题的计算结果的影响。张国山等<sup>[10-13]</sup>利用最小二乘支持向量机(Least Squares Support Vector Machines, LS-SVM)方法研究一维偏微分方程、一阶延迟微分方程、一阶微分方程的近似解中,得到的近似解具有较高的逼近精度,计算量也相对较少,还有其他改进方法<sup>[14-18]</sup>。其中,利用神经网络方法能得到稳定的解,但同时也存在多个局部极值点和隐含层数的选择问题<sup>[13]</sup>,而LS-SVM方法恰恰弥补这一不足。利用改进的二尺度小波核最小二乘支持向量机方法研究两点边值问

收稿日期:2020-08-16;修回日期:2020-09-10.

\* 基金项目:国家自然科学基金项目资助(11701310);中华农业科教基金教材建设研究项目资助(NKJ201803046).

作者简介:张艳敏(1981—),女,山东东营人,副教授,硕士,从事微分方程理论研究.

\*\* 通讯作者:吴自库(1968—),男,山东郓城人,教授,博士,从事微分方程研究. Email:zkwu1968@126.com.

题,不仅稳定性好、计算量小,而且精度高,近似解表达式形式简单,且连续可微,可以成为诸多领域广泛应用的方法之一。

LS-SVM 方法基本原理是首先利用基核函数整体逼近微分方程的解,然后再将问题转化为二次规划问题。利用改进的二尺度小波核最小二乘支持向量机方法,研究如下两点边值问题的近似解:

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=g(x), c<x<d \\ y(c)=y_0, y(d)=y_1 \end{cases} \quad (1)$$

## 1 二尺度小波核 LS-SVM 的函数逼近方法

考虑到小波函数的逼近性能,可以将 LS-SVM 中的核函数用小波核函数替代,但是选取的小波核函数一定要满足 Mercer 条件。常用的满足 Mercer 条件的小波核函数有 Mexico 帽小波、Morlet 小波、径向基小波等。采用多尺度小波核函数可以提高逼近精度,但是尺度越多,计算量越大。这里以二尺度小波核 LS-SVM 为例,给出其回归原理。设有观测数据,  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n, x_i \in \mathbf{R}^d, y_i \in \mathbf{R}$ 。寻求如下形式的逼近函数:

$$y \approx f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad (1)$$

其中,

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j W(x, x_j) + b, f_2(x) = \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \bar{W}(x, x_j)$$

$W$  为第一尺度小波核函数,  $\bar{W}$  为第二尺度小波核函数;  $\alpha_j, \bar{\alpha}_j (j=1, 2, \dots, n)$ ,  $b$  为回归参数。方法的核心目标是估计回归参数,可以利用拉格朗日乘子法获得,将回归参数问题转换为如下的二次优化问题:

$$\begin{aligned} \min J &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}^T \bar{\boldsymbol{\alpha}}) + \frac{\gamma}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{\bar{\gamma}}{2} \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} \\ \text{s. t. } y_i &= \sum_{j=1}^n \alpha_j W(x_i, x_j) + b + e_i = 0 \\ y_i - f_1(x_i) &= \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \bar{W}(x_i, x_j) + \bar{e}_i = 0 \\ & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

$\boldsymbol{\alpha}^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ ,  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^T = [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n]$ ,  $\mathbf{e}^T = [e_1, e_2, \dots, e_n]$  和  $\bar{\mathbf{e}}^T = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n]$  为偏差项,  $\gamma$  和  $\bar{\gamma}$  为惩罚因子。第一个约束条件相当于用第一尺度小波核函数逼近,第二个约束条件相当于对第一次逼近的误差函数用第二尺度小波核函数再次逼近,从而提高逼近精度。

**定理 1** 二次规划问题式(2)的解为如下方程组解。

$$\mathbf{M}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{R} \quad (3)$$

其中  $\boldsymbol{\lambda}^T = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  和  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^T = [\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n]$  为拉格朗日乘子,  $\mathbf{X}^T = [\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\lambda}^T, b, \bar{\boldsymbol{\alpha}}^T, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^T]$ ,  $\mathbf{R}^T = [0_n, Y, 0, 0_n, Y]$ ,  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ , 系数矩阵  $\mathbf{M} = (m_{ij})_{5 \times 5}$  的各元素意义如下:

令  $\mathbf{1}_n(0_n)$  表示元素都为 1(0)的  $n$  阶行向量,  $\mathbf{I}_n$  为  $n$  阶单位矩阵,  $(0)_{l \times k}$  所有元素都为 0 的  $l \times k$  矩阵,  $\boldsymbol{\Omega} = (W(x_i, x_j))_{n \times n}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\Omega}} = (\bar{W}(x_i, x_j))_{n \times n}$ , 则有:  
 $m_{11} = \mathbf{I}_n, m_{12} = -\boldsymbol{\Omega}^T, m_{13} = 0_n^T, m_{14} = (0)_{n \times n}, m_{15} = -\bar{\boldsymbol{\Omega}}^T$ ;  
 $m_{21} = \boldsymbol{\Omega}, m_{22} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{I}_n, m_{23} = \mathbf{1}_n^T, m_{24} = m_{25} = (0)_{n \times n}; m_{31} = 0_n, m_{32} = \mathbf{1}_n, m_{34} = 0_n, m_{35} = \mathbf{1}_n; m_{41} = m_{42} = (0)_{n \times n}, m_{43} = 0_n^T, m_{44} = \mathbf{I}_n, m_{45} = -\bar{\boldsymbol{\Omega}}^T; m_{51} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}, m_{52} = (0)_{n \times n}, m_{53} = \mathbf{1}_n^T, m_{54} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}, m_{55} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \mathbf{I}_n$ 。

**证明** 利用拉格朗日乘子解二次规划问题式(2),其拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}^T \bar{\boldsymbol{\alpha}}) + \frac{\gamma}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{\bar{\gamma}}{2} \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} + \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[ y_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j W(x_i, x_j) - b - e_i \right] + \\ & \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \left[ y_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j W(x_i, x_j) - b - \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \bar{W}(x_i, x_j) - \bar{e}_i \right] \end{aligned}$$

依据 Karush-Kuhn-Tucker 最优条件  $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0$  (这里  $\boldsymbol{\varphi}$  为  $\boldsymbol{\alpha}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}, b, \boldsymbol{\lambda}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}$  中任何一个未知变量),重新计算整理便得式(3)。

由于式(1)的解在两个端点是已知的,可以对上述回归方法进行改进。令函数  $f(x)$  在区间  $[c, d]$  上连续,且  $f(c) = C, f(d) = D$ 。则式(1)的近似解表示为

$$y \approx \tilde{f}(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= A(x) + B(x) \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j W(x, x_j) + b \right) \\ f_2(x) &= B(x) \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_j \bar{W}(x, x_j) \end{aligned}$$

$$A(x) = C + \frac{(x-c)}{d-c} (D-C), B(x) = (x-c)(x-d)$$

显然有  $\tilde{f}(c) = C, \tilde{f}(d) = D$ 。

在区间内部设置训练点集  $\{(x_i, y_i) | y_i = f(x_i), x_i \in (c, d), i=1, 2, \dots, n\}$ , 带入式(4)有:

$$\begin{cases} B(x_i) \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j W(x_i, x_j) + b \right) + e_i = y_i - A(x_i) \\ B(x_i) \left( \sum_{j=1}^n (\alpha_j W(x_i, x_j) + \bar{\alpha}_j \bar{W}(x_i, x_j)) + b \right) + \\ \bar{e}_i = y_i - A(x_i) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

依照相同的方法可以得到回归参数。如果取  $B(x) \equiv 1, A(x) \equiv 0$  就是式(2)了。

为了检验二尺度小波核最小二乘支持向量机的逼近能力,这里选取文献[19]中的一个一元函数的例子,其逼近区间为  $[-10, 10]$ 。均选取 Mexico 帽小波,其小波核函数为

$$W(x, x') = \left( 1 - \frac{(x-x')^2}{\sigma^2} \right) \exp\left( -\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2} \right)$$

例 1

$$f(x) = \begin{cases} -2.186x - 12.864, & x < -2 \\ 4.264x, & -2 \leq x < 0 \\ 10e^{-0.05x-0.5} \sin(0.03x^2 + 0.7x), & x > 0 \end{cases}$$

取步长  $h=0.4$ ,对区间  $[-10, 10]$  等分,内部 49 个点为训练点集。测试点集为将区间 209 等分的内部 208 个点。参数  $\sigma_1^2=0.64, \sigma_2^2=0.16, \gamma=1.0e+6, \bar{\gamma}=2.0e+6$ 。测试集的最大绝对误差为  $1.55e-7$ 。从逼近结果来看,该方法操作简单,计算量少,精度高。通常惩罚因子取为固定常数,尺度参数  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  为可调参数。

## 2 二尺度小波核 LS-SVM 解常微分方程机制

为了利用所提出的方法解式(1),首先要配置训练点。不妨对区间  $[c, d]$  进行  $N+1$  等分,步长为  $h = \frac{d-c}{N+1}$ 。选取内部  $N$  个点  $\{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N\}$  为训练点集。设问题式(1)的近似解为  $\tilde{y} = u(x) + \bar{u}(x)$ ,其中,

$$u(x) = A(x) + B(x) \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j W(x, x_j) + b \right)$$

$$\bar{u}(x) = B(x) \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j \bar{W}(x, x_j)$$

$A(x)$  和  $B(x)$  为已知函数,分别为

$$A(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{d-c}(x-c), B(x) = (x-c)(x-d)$$

显然  $\tilde{y}$  满足边界条件。令

$$H = \{f \in C^2[c, d] \mid f(c) = C, f(d) = D\}$$

$$\bar{H} = \{\bar{f} \in C^2[c, d] \mid \bar{f}(c) = \bar{f}(d) = 0\}$$

显然有  $u \in H, \bar{u} \in \bar{H}$ 。为了方便计算,引进算子

$$\ell: \ell(r) = r'' + pr' + qr$$

首先采用第一尺度在  $H$  空间中寻求问题式(1)的近似解  $u$ , 即有  $\ell(u) \approx g$ , 将  $u$  代入式(1)并化简得

$$\sum_{j=1}^N F(x, x_j) \alpha_j + \ell(B)(x)b + \ell(A)(x) - g(x) \approx 0 \quad (5)$$

其中,

$$F(x, x_j) = B(x) W''(x, x_j) + \ell(B)(x) W(x, x_j) + (p(x)B(x) + 2B'(x)) W'(x, x_j)$$

记  $E = g - \ell(u)$ , 则第二尺度  $\bar{u}$  满足方程

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = E(x), & c < x < d \\ y(a) = 0, y(b) = 0 \end{cases}$$

记

$$\bar{F}(x, x_j) = B(x) \bar{W}''(x, x_j) + (p(x)B(x) + 2B'(x)) \bar{W}'(x, x_j) + \ell(B)(x) \bar{W}(x, x_j)$$

将  $\bar{u}$  代入式(1)得:

$$\sum_{j=1}^N F(x, x_j) \alpha_j + \ell(B)(x)b + \ell(A)(x) + \sum_{j=1}^N \bar{F}(x, x_j) \bar{\alpha}_j - g(x) \approx 0 \quad (6)$$

记  $Y(x_i) = g(x_i) - \ell(A)(x_i), (i = 1, 2, \dots, N)$ , 引入偏差项  $\mathbf{e}^T = [e_1, e_2, \dots, e_N], \bar{\mathbf{e}}^T = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_N]$  将训练点集代入式(5)和式(6)得:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N F(x_i, x_j) \alpha_j + \ell(B)(x_i)b - Y(x_i) + e_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^N (F(x_i, x_j) \alpha_j + \bar{F}(x_i, x_j) \bar{\alpha}_j) + \ell(B)(x_i)b - Y(x_i) + \bar{e}_i &= 0 \end{aligned}$$

于是参数回归问题转化为如下二次规划问题:

$$\min J = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}^T \bar{\boldsymbol{\alpha}}) + \frac{\gamma}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{\bar{\gamma}}{2} \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}}$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^N F(x_i, x_j) \alpha_j + \ell(B)(x_i)b - Y(x_i) + e_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^N (F(x_i, x_j) \alpha_j + \bar{F}(x_i, x_j) \bar{\alpha}_j) + \ell(B)(x_i)b - Y(x_i) + \bar{e}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

定理 2 二次规划问题式(7)的解为如下方程的解。

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{R} \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{X}, \mathbf{R}$  的含义与式(3)相似, 系数矩阵  $\mathbf{Z}$  中涉及的变量符号也与式(3)相似。  $\mathbf{Z}$  中元素含义如下:

令  $\boldsymbol{\Omega} = (F(x_i, x_j))_{N \times N}, \bar{\boldsymbol{\Omega}} = (\bar{F}(x_i, x_j))_{N \times N}$ , 则有:

$$z_{11} = \mathbf{I}_N, z_{12} = \boldsymbol{\Omega}^T, z_{13} = \mathbf{0}_N^T, z_{14} = (0)_{N \times N}, z_{15} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}^T; z_{21} =$$

$$\Omega, z_{22} = -\frac{1}{\gamma} \mathbf{I}_N, z_{23} = [\ell(B)(x_i)]_{N \times 1}, z_{24} = z_{25} = (\mathbf{0})_{N \times N};$$

$$z_{31} = \mathbf{0}_N, z_{32} = \mathbf{z}_{23}^T, z_{33} = \mathbf{0}, z_{34} = z_{32}, z_{35} = \mathbf{0}_N; z_{41} = z_{42} =$$

$$(\mathbf{0})_{N \times N}, z_{43} = \mathbf{0}_N^T, z_{44} = \mathbf{I}_N, z_{45} = \overline{\Omega}^T; z_{51} = \Omega, z_{52} = (\mathbf{0})_{N \times N},$$

$$z_{53} = z_{23}, z_{54} = \overline{\Omega}^T, z_{55} = -\frac{1}{\gamma} \mathbf{I}_N. \mathbf{Y} = [Y(x_i)]_{1 \times N}.$$

证明 式(8)的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}(\alpha^T \alpha + \bar{\alpha}^T \bar{\alpha}) + \frac{\gamma}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{\bar{\gamma}}{2} \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} +$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \sum_{j=1}^N F(x_i, x_j) \alpha_j + \ell(B)(x_i) b - Y(x_i) + e_i \right) +$$

$$\sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i \left( \sum_{j=1}^N (\bar{F}(x_i, x_j) \bar{\alpha}_j + \bar{\ell}(B)(x_i) \bar{b} - \bar{Y}(x_i) + \bar{e}_i) \right)$$

证明方法完全类似于定理 1, 符号的含义也大部分相同, 此处略去。

### 3 数值实验

选取 2 个数值算例检验方法的有效性。为了便于比较, 两个算例均有解析解。

例 1 
$$\begin{cases} y'' + x^2 y' - 4xy = 9x^2, 0 < x < 1 \\ y(0) = 0, y(1) = 2 \end{cases}$$

例 2 
$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{5}, 1 < x < 2 \\ y(1) = \frac{4}{5}, y(2) = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

其解析解分别为  $y = x^4 + x$  和  $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{x}$ 。

与第二部分的方法相同, 固定惩罚因子(正则化参数)  $\gamma = 1.0e+8, \bar{\gamma} = 2.0e+8$ 。尺度参数  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  为仅有的 2 个可调参数。训练点集为求解区间  $[c, d]$  等分的内点, 这里进行了  $N = 10, 20, 40$  3 种情况。采用  $E_y = \|y - \bar{y}\|_\infty$  来评价数值精度, 数值模拟结果见表 1。图 1 和图 2 分别是例 1 和例 2 在  $N = 40$  情况下近似解曲线和误差曲线。从表 1 可以看出: 利用二尺度小波核最小二乘支持向量机方法计算两点边值问题具有较高的数值精度。当  $N = 10$  时, 逼近精度即可达到  $10^{-4}$  数量级, 而当  $N = 40$  时, 最高则达到  $10^{-7}$ 。显然随着训练点的数量增加误差  $E_y$  下降。因此方法具有很好的稳定性, 用于解两点边值问题可行。

表 1 数值模拟结果

Table 1 Numerical simulation results				
$N$	算例	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$E_y$
10	例 1	0.7	0.3	$2.271 \times 10^{-4}$
	例 2			$8.015 \times 10^{-5}$

续表(表1)

$N$	算例	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$E_y$
20	例 1	0.8	0.5	$1.331 \times 10^{-5}$
	例 2			$3.453 \times 10^{-6}$
40	例 1	0.9	0.4	$3.646 \times 10^{-6}$
	例 2			$3.974 \times 10^{-7}$

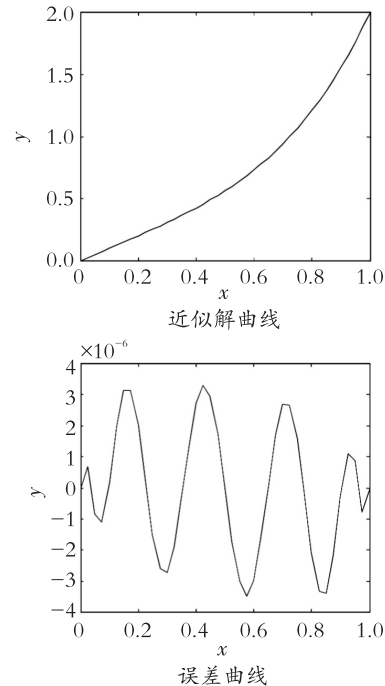


图 1  $N = 40$  例 1 近似解曲线与误差曲线  
Fig. 1 Approximate solution curve and error curve of the example 1 when  $N = 40$

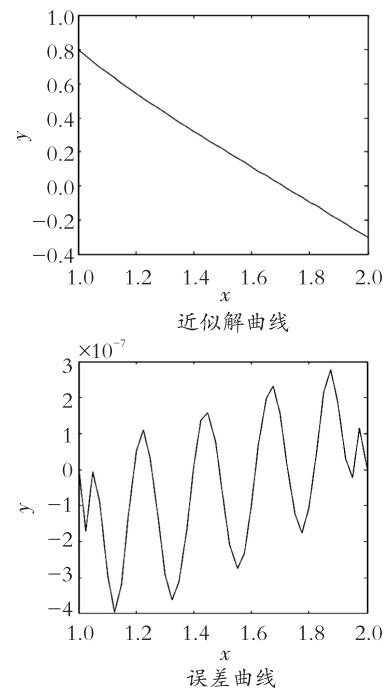


图 2  $N = 40$  例 2 近似解曲线与误差曲线  
Fig. 2 Approximate solution curve and error curve of the example 2 when  $N = 40$

## 4 结束语

利用二尺度小波核LS-SVM方法研究了两点边值问题的近似解问题,推导了近似解公式。同其他已有的方法相比,方法避免了复杂微分、积分运算,同时近似解为闭式解。采用Mexico帽小波核函数,只有两个尺度参数为可调节参数,大大减少了计算量。数值算例验证了方法求解此类问题是有效的。但是仅对线性两点边值情况进行了研究,而非线性情况的求解是更为复杂和繁琐的问题,下一步将研究利用二尺度小波核LS-SVM求解非线性两点边值问题,验证方法的有效性。

### 参考文献(References):

- [1] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题[M]. 北京:科学技术出版社, 2007  
GE W G. Boundary Value Problems for Nonlinear Ordinary Differential Equations[M]. Beijing: Science and Technology Press, 2007 (in Chinese)
- [2] 谢可超. 快速稳定配置法求解高阶非线性两点边值问题[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学, 2018  
XIE K C. Fast Stable Collocation Method for Solving High Order Nonlinear Two Point Boundary Value Problems [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2018 (in Chinese)
- [3] 杨忠贵, 韩晓玲, 王珊. 一类非线性四阶三点边值问题正解的存在性[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2019, 47(3): 69—72  
YANG Z G, HAN X L, WANG S. Existence of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Fourth Order Three Point Boundary Value Problems [J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2019, 47(3): 69—72 (in Chinese)
- [4] 刘颖. 奇异摄动两点边值问题的层适应网格上的混合差分方法[D]. 北京:北方工业大学, 2019  
LIU Y. Hybrid Difference Method on Layer Adaptive Grid for Singularly Perturbed Two Point Boundary Value Problem [D]. Beijing: North University of Technology, 2019 (in Chinese)
- [5] 罗炯兴. 二阶非线性微分方程边值问题的同伦分析解[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(9): 253—263  
LUO J X. Homotopy Analysis Solutions for Boundary Value Problems of Second Order Nonlinear Differential Equations [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2019, 49(9): 253—263 (in Chinese)
- [6] 卢仁洋, 于陆洋, 江山. 两点边值问题的三类边值条件的有限元解法实现[J]. 高教学刊, 2018(5): 58—60  
LU R Y, YU L Y, JIANG S. Finite Element Solution of Three Kinds of Boundary Value Conditions for Two Point Boundary Value Problems [J]. Journal of Higher Education, 2018(5): 58—60 (in Chinese)
- [7] 冯和英, 尹锋霖, 常鸿. 一类延迟线性微分方程两点边值问题的有限体积方法[J]. 湖南科技大学学报(自然科学版), 2018, 33(1): 114—124  
FENG H Y, YIN F L, CHANG H. Finite Volume Method for Two Point Boundary Value Problems of Delay Linear Differential Equations [J]. Journal of Hunan University of Science & Technology (Natural Science Edition), 2018, 33(1): 114—124 (in Chinese)
- [8] AUZINGER W, BURKOTOVÁ J, RACHNKOVÁ I, et al. Shooting Methods for State-dependent Impulsive Boundary Value Problems with Applications [J]. Applied Numerical Mathematics, 2018, 128: 3025—3050
- [9] 杨云磊, 张天乐, 侯木舟, 等. 一类微分方程两点边值问题的神经网络方法应用研究[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2018, 33(2): 57—63  
YANG Y L, ZHANG T L, HOU M Z, et al. Application of Neural Network Method to a Class of Two Point Boundary Value Problems of Differential Equations [J]. Journal of Xuzhou Institute of Technology (Natural Sciences Edition), 2018, 33(2): 57—63 (in Chinese)
- [10] MEHRKANOON S, FALKE T, SUYKENS J A K. Approximate Solutions to Ordinary Differential Equations Using Least Squares Support Vector Machines [J]. IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(9): 1356—1367
- [11] MEHRKANOON S, SUYKENS J A K. Parameter Estimation of Delay Differential Equations: An Integration-free LS-SVM Approach [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2014(19): 830—841
- [12] 张国山, 王一鸣, 王世伟, 等. 常微分方程近似解的LS-SVM改进求法[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(6): 695—707  
ZHANG G S, WANG Y M, WANG S W, et al. Improved LS-SVM Method for Approximate Solutions of Ordinary Differential Equations [J]. 2013, 33(6): 695—707 (in Chinese)
- [13] 吴自库, 李福乐. 一维热传导方程热源反问题基于最小二乘法的正则化方法[J]. 计算物理, 2016, 33(1): 49—56  
WU Z K, LI F L. Regularization Method Based on Least Square Method for Inverse Heat Source Problem of One Dimensional Heat Conduction Equation [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2016, 33(1): 49—56 (in Chinese)
- [14] ABO Z S, YUSUF M, MIRZA N M, et al. Numerical Solution of Second-order, Two-point Boundary Value Problems Using Continuous Genetic Algorithms [J]. International Journal for Numerical Methods in

- Engineering, 2004, 61(8):1219—1242
- [15] 程荣军, 程玉民. 带源参数的热传导反问题的无网格方法[J]. 物理学报, 2007, 56(1):5569—5574  
CHENG R J, CHENG Y M. Meshless Method for Inverse Heat Conduction Problem with Source Parameters [J]. Journal of Physics, 2007, 56(1): 5569—5574 (in Chinese)
- [16] KADALBAJOO M K, KUMAR D. Parameter - uniform Fitted Operator B - spline Collocation Method for Self - adjoint Singularly Perturbed Two - point Boundary Value Problems [J]. Electronic Transactions on Numerical Analysis Etna, 2008, 30(7):346—358
- [17] KHALEGHI M, TALEBI M M, BABOLIAN E, et al. Solving a Class of Singular Two - point Boundary Value Problems Using New Effective Reproducing Kernel Technique [J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 331, 264—273
- [18] SHENG C T, SHEN J. A Hybrid Spectral Element Method for Fractional Two - Point Boundary Value Problems [J]. Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications, 2017, 10(2):437—464
- [19] 张相胜, 王蕾, 潘丰. 多尺度最小二乘支持向量机的回归建模[J]. 计算机工程, 2012, 38(5):175—177  
ZHANG X S, WANG L, PAN F. Regression Modeling of Multiscale Least Square Support Vector Machine [J]. Computer Engineering, 2012, 38(5): 175—177 (in Chinese)

## Two-scale Wavelet Kernel LS-SVM Method for the Two-point Boundary Value Problem

ZHANG Yan-min, WU Zi-ku\*\*

- (1. College of Qindao, Qingdao University of Technology, Shandong Qingdao 266106, China;  
2. School of Science and Information, Qingdao Agricultural University, Shandong Qingdao 266109, China)

**Abstract:** In practice, it is difficult to obtain analytical solution for two-point boundary value problem, the two-scale wavelet kernel LS-SVM method is proposed to solve the approximate solution of two-point boundary value problem. Firstly, the two-point boundary value problem is transformed into an objective optimization problem with two constraint conditions, and then an approximate solution satisfying the boundary conditions is constructed by using the combination of two-scale wavelet kernel functions. The first constrained condition is approximated by the first scale wavelet kernel function, and the second constraint condition is that the error function of the first approximation is approximated by the second scale wavelet kernel function, which can improve the approximation accuracy of the approximate solution. Finally, the objective optimization problem is transformed into the regression problem, and then the LS-SVM method is used to solve the regression coefficients. In the process of coefficients solving, the key is to transform the parametric regression problem into quadratic programming problem, which can avoid complex differential operation. Numerical experiments show that the proposed method has high accuracy, less calculation and good stability. Therefore, the two-scale wavelet kernel LS-SVM method is effective for solving the two-point boundary value problem, and has the characteristics of high precision, differentiability, simple expression and fixed form.

**Key words:** two-scale wavelet kernel; LS-SVM; two-point boundary value problem; approximate solution

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:

张艳敏, 吴自库. 两点边值问题二尺度小波核 LS-SVM 解法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2021, 38(5):91—96  
ZHANG Y M, WU Z K. Two-scale Wavelet Kernel LS-SVM Method for the Two-point Boundary Value Problem [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2021, 38(5):91—96