doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0005.014

状态依赖脉冲 Caputo 分数阶微分方程解的存在唯一性*

李晓月, 王 奇
(安徽大学 数学科学学院,安徽 合肥 230601)

摘 要:针对状态依赖脉冲 Caputo 分数阶微分方程,利用不动点方法研究方程解的存在唯一性;首先,定义一个全连续算子,利用 Schaefer 不动点定理及 Gronwall 不等式讨论对应的非脉冲方程解的存在性结论;然后利用状态依赖脉冲函数项的单调条件及解的延拓方法得到每个脉冲区间上状态依赖脉冲 Caputo 分数阶微分方程局部解及整体解的存在性结论;最后利用压缩映射原理得到状态依赖脉冲 Caputo 分数阶微分方程整体解的唯一性,改进了已有的结果。

关键词:状态依赖脉冲;Caputo 分数阶微分方程;不动点定理;存在唯一性

中图分类号:O175.12 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2021)05-0087-04

0 引 言

由于系统的脉冲时刻与系统状态有关,因此具状态依赖脉冲微分方程成为微分方程领域的难点问题,已有结果主要研究方程解的存在唯一性及稳定性,详见文献[1-7]。受已有文献的启发,利用不动点方法研究状态依赖脉冲 Caputo 分数阶微分方程

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t) = f(t,x(t)),t\in J \\ t\neq\tau_k(x(t)),\alpha\in(1,2] \\ \left.\begin{array}{l} x(t^+) = I_k(x(t)) \\ x'(t^+) = \tilde{I}_k(x(t)) \end{array}\right\} t = \tau_k(x(t)) \\ k = 1,2,\cdots,m \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在唯一性,其中 $J:=[0,T]$,${}^{C}D^{\alpha}$ 表示阶数为 α 的 Caputo 分数阶导数,$f:J\times R\to R,I_k,\tilde{I}_k:R\to R$ 都是连续函数。有关分数阶导数及微积分的更多知识,详见文献[8-9]。

1 预备知识

记 $C(J,R)$ 表示从 J 到 R 的连续函数组成的空间,其范数为

$$\|x\|=\sup\{|x(t)|,t\in J\}$$

$PC(J,R)=\{x: J\to R:t_k=\tau_k(x(t)),x(t_k^-)$ 连续,$x(t_k^+)$ 存在,$x\in C((t_k,t_{k+1}], R),k=1,2,\cdots,m\}$,其范数为

$$\|x\|=\max\{\|x_k\|,k=1,2,\cdots,m\}$$

其中 $x_k=x_k(t),t\in(t_k,t_{k+1}]$。

定义 2.1[8-9] 对任意函数 $h\in L^1([a,b],R^+)$,定义其分数阶积分

$$I_a^{\alpha}h(t)=\int_a^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\,\mathrm{d}s,\alpha\in\mathbf{R}_+$$

定义 2.2[8-9] 函数 h 在区间$[a,b]$上有定义,定义其 Riemann-liouville 分数阶导数为

收稿日期:2020-09-11;**修回日期**:2020-11-24.
* **基金项目**:安徽省教育厅自然科学基金重点项目(KJ2018A0027).
作者简介:李晓月(1994—),女,山西大同人,硕士研究生,从事泛函微分方程及生物数学研究.

$$(D_{a^+}^{\alpha}h)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s$$

其中 $n=[\alpha]+1$, $[\alpha]$为取整函数。

定义 2.3[8-9] 对任意函数 h 在区间$[a,b]$上有定义,定义其 Caputo 分数阶积分为

$$({}^C D_{a^+}^{\alpha}h)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}h^n(s)\mathrm{d}s$$

其中 $n=[\alpha]+1$, $[\alpha]$为取整函数。

引理 2.1[10] 若$\beta>0$, $a(t)$是区间$[0,T)$, $T\leqslant+\infty$上的非负局部可积函数, $b(t)$是区间$[0,T)$, $T\leqslant+\infty$上的非负、非减有界连续函数, $y(t)$是区间$[0,T)$, $T\leqslant+\infty$上的非负局部可积函数。若

$$y(t)\leqslant a(t)+b(t)\int_0^t(t-s)^{\beta-1}y(s)\mathrm{d}s$$

则

$$y(t)\leqslant a(t)+\int_0^t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(b(t)\Gamma(\beta))}{\Gamma(j\beta)}\times(t-s)^{j\beta-1}a(s)\mathrm{d}s, t\in[0,T)。$$

2 主要结论

(H_1) $f:J\times R\to R$ 连续,存在函数 $M\in L^p(J,R^+)$, N 使得

$$|f(t,u)|\leqslant M(t)|u|+N(t)$$

$$\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}N(s)\mathrm{d}s \text{ 存在}, t\in J$$

$$|f(t,u)-f(t,v)|\leqslant M(t)|u-v|$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。此外, $M(t)$非减有界。

(H_2) $\tau_k\in C^1(R,R)$, $k=1,2,\cdots,m$,并且

$$0<\tau_1(x)<\cdots<\tau_m(x)<T, x\in\mathbf{R}。$$

(H_3) $I_k,\tilde{I}_k\in C(R,R)$,并且

$$\tau_k(I_k(x))\leqslant\tau_k(x)<\tau_{k+1}(I_k(x)), x\in\mathbf{R}。$$

存在函数 $c_k,\tilde{c}_k\in C(R,R^+)$使得

$$|I_k(u)-I_k(v)|\leqslant c_k|u-v|$$

$$|\tilde{I}_k(u)-\tilde{I}_k(v)|\leqslant\tilde{c}_k|u-v|$$

(H_4) $\frac{\tau'_k(x)}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t(t-s)^{\alpha-2}f(s,x)\mathrm{d}s\neq1$, $k=1,2,\cdots,m,a,t\in J$。

定理 2.1 若条件(H_1)和的第二式及(H_2)、(H_4)及均满足,则方程式(1)至少存在一解。

证明 首先考虑以下问题:

$$\begin{cases}{}^C D^{\alpha}x(t)=f(t,x(t))\\ t\in J,\alpha\in(1,2]\\ x(0)=x_0,x'(0)=\tilde{x}_0\end{cases}\tag{2}$$

定义 $F:C(J,R)\to C(J,R)$的算子为

$$(Fx)(t)=x_0+\tilde{x}_0t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\mathrm{d}s\tag{3}$$

① 在 $C(J,R)$中取函数列 $x_n\to x$,则由(H_1)易得 $Fx_n\to Fx$, $n\to\infty$,即算子 F 是全连续算子。

② 取 $C(J,R)$中有界集

$$B_r=\{x\in C(J,R):\|x\|\leqslant r\}$$

由条件(H_1)及赫尔德不等式得

$$|(Fx)(t)|\leqslant|x_0|+|\tilde{x}_0|T+\frac{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}[M(s)|x|+N(s)]\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}\leqslant$$

$$|x_0|+|\tilde{x}_0|T+\frac{\|M^{\frac{q}{q-1}}\|_{L^q}T^{\alpha-1+q^{-1}}}{(q\alpha-q+1)\Gamma(\alpha)}r+\frac{\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}N(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}=H\tag{4}$$

即$\|Fx\|\leqslant H$,在 $C(J,R)$中,算子 F 把有界集映成有界集。

③ 任取 $x\in B_r$, $t'_1,t'_2\in J$,则

$$|(Fx)(t'_2)-(Fx)(t'_1)|\leqslant|\tilde{x}_0(t'_2-t'_1)|+\frac{\int_{t'_1}^{t'_2}(t'_2-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))|\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}+$$

$$\frac{\int_0^{t'_1}[(t'_2-s)^{\alpha-1}-(t'_1-s)^{\alpha-1}]|f(s,x(s))|\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}\leqslant$$

$$|\tilde{x}_0(t'_2-t'_1)|+\frac{\|M\|_{L^p}(t'_2-t'_1)^{\alpha-1+q^{-1}}}{(q\alpha-q+1)^{q-1}\Gamma(\alpha)}r+\frac{\int_{t'_1}^{t'_2}(t'_2-s)^{\alpha-1}|N(s)|\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}+$$

$$\frac{\int_0^{t'_1}|(t'_2-s)^{\alpha-1}-(t'_1-s)^{\alpha-1}||N(s)|\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}+$$

$$\frac{\left(\int_0^{t'_1}[(t'_2-s)^{\alpha-1}-(t'_1-s)^{\alpha-1}]^q\mathrm{d}s\right)^{q-1}}{\Gamma(\alpha)}\|M\|_{L^p}r\to0, t'_2-t'_1\to0\tag{5}$$

即算子 F 把有界集映成等度连续的。由 Arezela-Ascoli 定理知算子 F 是全连续的。

④ 考虑集合

$$K=\{x\in C(J,R):x=\lambda Fx,0<\lambda<1\}$$

的有界性。

对任意 $x\in K$，则由条件(H_1)，类似于以上推导，有

$$|x(t)|\leqslant |x_0|+|\tilde{x}_0|T+\frac{\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}N(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}+\frac{M(t)\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)|\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)} \qquad (6)$$

取 $a(t)=|x_0|+|\tilde{x}_0|T+\frac{\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}N(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}$，$b(t)=\frac{M(t)}{\Gamma(\alpha)}$，由引理 2.1 得

$$|x(t)|\leqslant a(t)E_\beta(b(T)\Gamma(\beta)t^\beta)\leqslant H \qquad (7)$$

即集合 K 有界。

由 Schaefer 不动点定理得算子 F 存在不动点，即方程式(2)的解，记解为 $x_1(t)$。考虑函数

$$r_{k,1}(t)=\tau_k(x_1(t))-t,\ t\geqslant 0,k=1,2,\cdots,m \qquad (8)$$

由条件(H_2)得 $r_{k,1}(0)\neq 0$。若 $r_{k,1}(t)\neq 0,t\in J$，则 $x_1(t)$ 是方程式(1)的解。

下面考虑存在 $t\in J$ 使得 $r_{1,1}(t)\neq 0$，由 $r_{1,1}(0)\neq 0$ 及 $r_{1,1}(t)$ 的连续性，存在 $t_1\in J$ 使得 $r_{1,1}(t_1)=0$ 及 $r_{1,1}(t)\neq 0,t\in[0,t_1)$。由条件($H_2$)得 $r_{k,1}(t)\neq 0,t\in[0,t_1),k=1,2,\cdots,m$。

考虑以下问题

$$\begin{cases} {}^CD^\alpha x(t)=f(t,x(t)),t\in[t_1,T] \\ x(t_1^+)=I_k(x_1(t_1)) \\ x'(t_1^+)=\tilde{I}_k(x_1(t_1)) \end{cases} \qquad (9)$$

在 $C([t_1,T],R)$ 定义算子 F_1 为

$$(F_1x)(t)=I_k(x_1(t_1))+\tilde{I}_k(x_1(t_1))(t-t_1)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\mathrm{d}s \qquad (10)$$

类似于步骤一可得，算子 F_1 是全连续的，有不动点 x_2。考虑函数

$$r_{k,2}(t)=\tau_k(x_2(t))-t,\ t\geqslant t_1,k=1,2,\cdots,m \qquad (11)$$

若 $r_{k,2}(t)\neq 0,t\in(t_1,T]$，则

$$x(t)=\begin{cases} x_1(t),t\in[0,t_1] \\ x_2(t),t\in(t_1,T] \end{cases} \qquad (12)$$

是式(1)的解。考虑在 $t\in(t_1,T]$ 使得

$$r_{2,2}(t)=0 \qquad (13)$$

由条件(H_3)得

$$r_{2,2}(t_1^+)=\tau_2(x_2(t_1^+))-t_1=\tau_2(I_1(x_1(t_1)))-t_1>\tau_1(x_1(t_1))-t_1=r_{1,1}(t_1)=0 \qquad (14)$$

由 $r_{2,2}(t)$ 的连续性，存在 $t_2>t_1$ 使得 $r_{2,2}(t_2)=0$ 及 $r_{2,2}(t)\neq 0,t\in(t_1,t_2)$。由条件($H_2$)得

$$r_{k,2}(t)\neq 0,t\in(t_1,t_2),k=2,\cdots,m \qquad (15)$$

若存在 $\tilde{t}\in(t_1,t_2]$ 使得 $r_{1,2}(\tilde{t})=0$。则条件(H_3)得

$$r_{1,2}(t_1^+)=\tau_1(x_2(t_1^+))-t_1=\tau_1(I_1(x_1(t_1)))-t_1\leqslant \tau_1(x_1(t_1))-t_1=r_{1,1}(t_1)=0 \qquad (16)$$

则 $r_{1,2}(t)$ 在 $\tilde{t}'\in(t_1,T]$ 点取非负最大值。由于

$$r'_{1,2}(\tilde{t}')=\tau'_1(x_2(\tilde{t}'))x'_2(\tilde{t}')-1=\tau'_1(x_2(\tilde{t}'))\frac{\int_{t_1}^{\tilde{t}'}(\tilde{t}'-s)^{\alpha-2}f(s,x_2(s))\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha-1)}-1=0$$

与条件(H_4)产生矛盾。

步骤三、类似于步骤一、二，利用数学归纳法，可以得到

$$\begin{cases} {}^CD^\alpha x(t)=f(t,x(t)),t\in(t_m,T] \\ x(t_m^+)=I_m(x_{m-1}(t_m)) \\ x'(t_m^+)=\tilde{I}_m(x_{m-1}(t_m)) \end{cases} \qquad (17)$$

的解 $x_m(t),t\in(t_m,T]$，从而得到方程式(1)的分段连续解

$$x(t)=\begin{cases} x_1(t),t\in[0,t_1] \\ x_2(t),t\in(t_1,t_2] \\ \cdots \\ x_m(t),t\in(t_m,T] \end{cases} \qquad (18)$$

由条件(H_2)的第二式及(H_3)的第二式，利用压缩映射原理得：

定理 2.2　若条件(H_1)和的第一式及(H_2)、(H_4)均满足，并且

$$\sum_{k=1}^m c_k(t)+\frac{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}M(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}<1,t\in J$$

则方程式(1)存在唯一解。

4　结束语

和文献[1]比较，条件(H_1)比文献[1]的条件(H_2)更加宽松，已改进文献[1]的相关结果。

参考文献(References)：

[1]　BENCHOHRA M, BERHOUN F. Impulsive Fractional Differential Equations with Variable Times[J]. Comput. Math Appl, 2010,59(10):1245—1252

[2]　ABBAS S, AGARWAL R P, BENCHOHRA M. Darboux Problem for Impulsive Partial Hyperbolic Differential

Equations of Fractional Order with Variable Times and Infinite Delay[J]. Nonlinear Analysis: 2010(4): 818—829

[3] EZZINBI K, TOUR H, ZABSONRE I. An Existence Result for Impulsive Functional Differential Equations with Variable Times[J]. Afr Mat, 2013,24:407—415

[4] HAKL R, PINTO M, TKACHENKO V, et al. Almost Periodic Evolution Systems with Impulse Action at State-dependent Moments[J]. J Math Anal Appl, 2017,46: 1030—1045

[5] SONG Q K, YANG J X, LI C D, et al. Stability Analysis of Nonlinear Fractional-order Systems with Variable-time Impulses[J]. J. Franklin Institute, 2017, 354(7): 2959—2978

[6] GABOR G. Differential Inclusions with State-dependent Impulses on the Half-line: New Frechet Space of Functions and Structure of Solution Sets[J]. J Math Anal Appl, 2017, 44(6):1427—1448

[7] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations[M]. San Diego:Academic Press, 1999

[8] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations[M]. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies Elsevier Science B V, 2006

[9] YE H, GAO J, DING Y. A Generalized Gronwall Inequality and Its Application to a Fractional Differential Equations[J]. J Math Anal Appl, 2007, 32(8): 1075—1081

Existence and Uniqueness of Solutions for State Dependent Impulsive Caputo Fractional Differential Equations

LI Xiao-yue, WANG Qi

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Anhui Hefei 230601, China)

Abstract: For the state dependent impulsive Caputo fractional differential equation, the fixed point method is used to study the existence and uniqueness of the solution. Firstly, we define a completely continuous operator, and discuss the existence of solutions of the corresponding nonimpulsive Caputo fractional equations by using Schaefer fixed point theorem and Gronwall inequality. Secondly, we obtain the existence of local and global solutions of state dependent impulsive Caputo fractional differential equations on each impulsive interval by using the monotone condition of state dependent impulsive function term and the extension method of solutions. Finally, by using the compression mapping principle, the uniqueness of the global solution of the state dependent impulsive Caputo fractional differential equation is obtained, which improve the existing results.

Key words: state dependent impulsive; Caputo fractional differential equations; fixed point theorems; existence and uniqueness

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:

李晓月,王奇. 状态依赖脉冲 Caputo 分数阶微分方程解的存在唯一性[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(5):87—90

LI X Y, WANG Q. Existence and Uniqueness of Solutions for State Dependent Impulsive Caputo Fractional Differential Equations [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2021,38(5):87—90