

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0005.004

多顶点三角形刚性折纸自由度分析*

张锐浩, 张帆**, 庄彦帅, 张玉辉, 王锋

(上海工程技术大学 机械与汽车工程学院, 上海 201620)

摘要:针对多顶点折纸机构自由度分析困难问题,提出了在多顶点折纸机构的自由度分析中,利用邻接矩阵分析刚性折纸自由度的方法;用邻接矩阵表示顶点之间的连接关系,通过引入消元矩阵,用矩阵乘法描述了确定运动状态的过程;通过计算顶点对应的行元素之和来确定约束的个数,避免了交叉折痕顶点自由度的计算误差;以分析单顶点 4 折痕折纸图案自由度为基础,拓扑到分析多顶点三角形刚性折纸图案自由度;最后,通过软件仿真验算刚性折纸图案自由度计算结果的正确性。

关键词:折纸结构;邻接矩阵;仿真分析

中图分类号:TH132

文献标志码:A

文章编号:1672-058X(2021)05-0023-06

0 引言

折纸是一种古老的艺术形式,折纸的命名源自日语词根“ori”和“gami”组合,意思是折叠和纸张,其可以实现不经裁剪和粘接,使二维平面的纸张折叠成三维立体模型^[1]。它的运动是连续的且一一对应的二维到三维的映射。折纸可分为刚性折纸和非刚性折纸,假设在折叠过程中,刚性折纸面始终为刚性平面(通常视为连杆),将折痕视为转轴,则刚性折纸板折叠过程中不发生扭转变形等情况。因此,仅由相邻折叠面的夹角即可决定折纸构型。非刚性折纸则不具有这一假设,认为可以在折纸面内发生扭转、弯曲等变形,可产生形变。由于刚性折纸具有结构巧妙、易于折叠等优点,越来越受到工程师们的关注。例如航天工程中的太阳能阵列^[2-3],在日常生活领域有可折叠餐具^[4],直升机^[5]等。为了

探索折纸的原理,从而使折纸结构发展出更多的结构,越来越多的学者用数学来揭示其中的原理。

在折纸运动学的研究中,Kawasaki's 提出了单顶点可以平折时夹角之间的基本理论,Maekawa's 提出了山谷折痕分布理论,这两个基本理论成为折纸的基本定理。数值算法^[6]、四元数法和矩阵法^[7]等被用来分析刚性折纸的可折叠性。Hull^[8]研究了单顶点折纸折痕图案能够刚性折叠的一个内在充要条件,为刚性折纸图案拓扑和应用分析奠定了基础。BERRY M 等^[9]在非欧几里德空间,提出运动高斯曲率的方法研究折纸运动空间。得出了有向顶点的构形空间与高斯曲率的关系。吴和游^[9]分别用四元素法和双四元素法建立了折纸机构的运动模型,分析了单顶点或多顶点的折纸图案的平面折叠性,并判断了折纸在折叠过程的自相交性。但是判断折纸机构自由度的方法还是比较少,蔡建国等^[11]在刚性折纸机构的自由度的研究中,建立了折纸机构的

收稿日期:2020-09-08;修回日期:2020-11-16.

* 基金项目:上海市科委生物医药领域科技支撑计划资助(17441901200).

作者简介:张锐浩(1998—),男,广东揭阳人,硕士,研究生,从事机构学研究.

** 通讯作者:张帆(1980—),女,河南平顶山人,博士,副教授,从事机构学与并联机器人理论研究. Email:pdszhangfan@sues.edu.cn.

系统约束方程,并从雅克比矩阵的零空间中计算出了刚性折纸机构的自由度,但是其研究存在局限性,若是机构中存在冗余自由度时,方法不再适用。同时其方法的计算过程较为复杂。

然而,利用邻接矩阵的方法计算刚性折纸机构的自由度,可以简化多顶点刚性折纸机构自由度的运算。首先,介绍刚性折纸的基本条件和基本定理;然后,以计算单顶点刚性折纸机构自由度为基础,拓扑到多顶点三角形刚性折纸自由度的计算。通过折痕与折痕之间的关系,建立邻接矩阵并通过矩阵变换计算刚性折纸机构的自由度;最后,通过软件建模和仿真验证邻接矩阵方法计算的准确性。

1 折纸基本理论

折纸艺术因其能直观展示如何利用折纸来生成连续但有区别的图形,而广泛受到人们的关注。折纸的折叠过程是连续变化的,且能反应折纸图案从二维到三维的映射。折纸图案由一系列的折痕图案组成,包括向上凸起的山折痕(实线)和向下凹陷的谷折痕(虚线),折纸图案的刚性可折叠性是由一系列的山折痕和谷折痕组合而成,其组合对平折折纸的折叠性起关键性作用。以下介绍折纸的一些基本理论,包括平折的必要条件,有效的山谷折痕分配条件^[12-14]。

Kawasaki's 定理 1 单个顶点周围的交替角度之和是 π ,如图 1 所示。

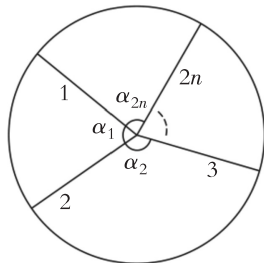


图 1 具有 n 条折痕的单顶点的折痕图案

Fig. 1 A single vertex crease pattern with n creases

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots - \alpha_{2n} = 0$$

Kawasaki's 定理 2 对于相邻的折痕夹角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n}$,假设 α_{2n} 为其中的最小角,则围成最小角度的折痕必须由一条山折痕和一条谷折痕组成。

Maekawa's 定理 山折痕 (M) 与谷折痕 (V)

之差为 ± 2 ,即:

$$M - V = \pm 2$$

单顶点折痕所围成的角度之和为 2π ,如图 1 所示的单顶点折痕为

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n} = 2\pi$$

2 单一顶点折纸机构自由度研究

在刚性折纸的研究过程中,刚性折纸的折痕视为旋转关节或转动副,刚性纸板则视为连杆(如图 2 所示)。在单顶点的自由度分析中,无论折痕数多少,单顶点刚性折纸在空间上总是具有 3 个方向共同约束力,因此等效机构的秩 d 为 3,根据修改的 $G-K$ 自由公式^[16-17]:

$$M = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v - \xi$$

其中, M 是机构的自由度, d 为机构的秩, n 为包括机架在内的构件数, g 为运动副数, f_i 为运动副的自由度, v 为多回路并联机构在去掉公共约束后的冗余约束数, z 是机构的局部自由度数。

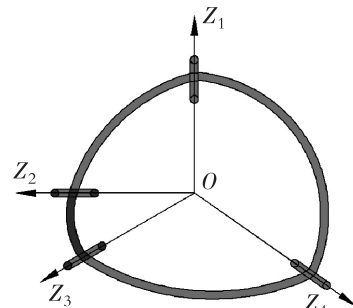


图 2 单一顶点 4 折痕机构

Fig. 2 Single vertex 4 crease mechanism

然而,在分析单顶点刚性折纸的自由度时, n 为刚性面的面数(杆件数), g 为折痕数, f_i 为 1(通常为转动副), v 和 z 都为 0(一般的单顶点刚性折纸没有冗余自由度和局部自由度)。单顶点刚性折纸顶点可以分为边界顶点和非边界顶点,对于非边界顶点其自由度计算公式为

$$M = m - 3 \tag{1}$$

其中, M 为自由度数, m 为折痕数,例如图 2 所示单顶点 4 折痕刚性折纸自由度为 $M = 4 - 3 = 1$ 。

对于边界顶点其自由度计算公式如下:

$$M = m - 2 \tag{2}$$

其中, M 为自由度数, m 为围绕此顶点的折痕数。

3 多顶点刚性折纸机构

对于多顶点刚性折纸机构而言,为了实现折纸的刚性折叠性,每个顶点的运动必须与其相邻的顶点的运动兼容不发生干涉。然而,相较于单顶点刚性折纸机构,多顶点刚性折纸机构获得这样的运动特性是比较难得到的,多顶点刚性折纸机构可以实现刚性折叠的图案是比较少的。因此,分析多顶点刚性折叠机构的自由度是非常有必要的。

利用邻接矩阵方法,分析多顶点三角形刚性折纸图案的自由度,其由单顶点 4 折痕折纸图案拓扑得到,其图形如图 3 所示,因其满足平折折纸定理(3 个顶点中的任意单一顶点都满足上述平折的必要条件,有效的山谷折痕分配条件)和折纸乘数的积为 1^[6]等条件而可刚性折叠。对于多顶点三角形折纸图案而言,并不是所有的折纸图案都可以刚性折叠,如图 4 所示,图 4(a)和图 4(b)为两种不可刚性折叠情况,已被证明不可严格刚性折叠^[18],虽然满足山谷折痕分布和平折折纸定理,但是因存在 3 对相互平行的边而不满足折纸乘数的积为 1 的条件而不可刚性折叠。

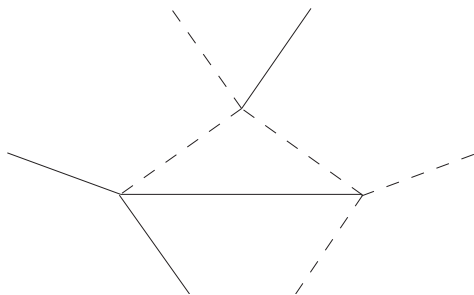


图 3 多顶点三角形刚性折纸图案

Fig. 3 Multi-vertex triangle rigid origami pattern

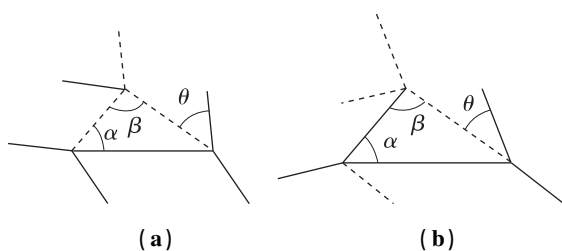


图 4 多顶点三角形不可刚性折纸图案

Fig. 4 Multi-vertex triangle non-rigid origami pattern

在多顶点三角形折纸图案可刚性折叠的情况下,利用邻接矩阵分析其自由度。邻接矩阵直观展现了顶点之间的连接关系。首先,将多顶点三角形折纸图案封闭,即添加边界,添加边界后的图案如图 5 所示,并将顶点由 1~9 逆时针编号,其中 1、2、3 为非边界顶点,4~9 为边界顶点。则建立的邻接矩阵 C_0 为

$$C_0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

矩阵中“1”表示顶点与顶点之间相连,即存在折痕则记为“1”,不相连则为“0”,从矩阵中的每一行或列可以知道每一个顶点有几条折痕围成(例如顶点 1 有 4 条折痕)。由于矩阵为对称阵,因此分析时只分析行或列即可。

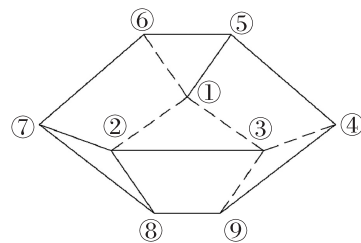


图 5 多顶点三角形刚性折纸边界添加图

Fig. 5 Addition of multi-vertex triangle rigid origami boundary

通过引入变量 $D_i (i=0, 1, 2, 3, \dots, 9)$ 确定每顶点实现确定运动所需要的驱动,驱动的添加选择从非边界顶点 1 开始,依次添加驱动(也可以选择从 2 或 3 开始,但只能从非边界顶点 1、2、3 开始)。当邻接矩阵为 C_0 时,变量 $D_0 = 0$ (此时并未添加驱动到折纸机构中),由式(1)和邻接矩阵 C_0 可以计算得非边界顶点 1 所需的驱动为 $4 - 3 = 1$,则邻接矩阵由 C_0 变

为 C_1 :

$$C_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

此时矩阵 C_1 中的“1”表示未有确定运动的折痕数(与矩阵 C_0 中的“1”的含义不同),即此折痕未有确定的输入驱动(角度变量)。当非边界顶点 1 输入了确定的驱动,邻接矩阵 C_1 中的第一列和第一行中的“1”变为“0”。邻接矩阵由 C_0 变到 C_1 引入消元矩阵 $E_{j,n}$,消元矩阵^[10]的表示如下:

$$E_{j,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0_{j,j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

消元矩阵是 $n \times n$ 的矩阵,在矩阵中的第 j 行和第 j 列中的元素都为 0,对角线上的元素为 1,左乘矩阵 $E_{j,n}$ 使得 C_i 的第 j 行中的元素都为 0,右乘矩阵 $E_{j,n}$ 使得 C_i 的第 j 列中的元素都为 0,其变换如下所示:

$$C_{i+1} = E_{j,n} C_i E_{j,n}$$

同时变量由 D_0 变为 $D_1, D_1 = D_0 + 1 = 1$ (1 表示需要添加的驱动或角度变量)。

然后,继续对非边界顶点 2 添加驱动,由式(1)和邻接矩阵 C_1 得非边界顶点 2 需要添加的驱动为 $3-3=0$,其中第一个“3”为 C_1 中第 2 行的元素和。此时的邻接矩阵 C_2 为

$$C_2 = E_{2,9} C_1 E_{2,9} =$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

同时变量由 D_1 变为 D_2 ,则 $D_2 = D_1 + 0 = 1$ 。

然后继续对非边界顶点 3 添加驱动,由式(1)和邻接矩阵 C_2 得非边界顶点 3 需要添加的驱动为 $2-3 < 0$,其中的“2”为 C_2 中第 3 行的元素和(若存在非边界顶点行元素和小于或等于 3,则需要添加的驱动为 0)。此时的邻接矩阵 C_3 为

$$C_3 = E_{3,9} C_2 E_{3,9} =$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

同时变量由 D_2 变为 D_3 ,则 $D_3 = D_2 + 0 = 1$ 。

由上述计算可得非边界顶点 1、2、3 需要的总驱动数量 $M_e = D_3 = 1$ 。

下面计算边界顶点所需要的驱动数,边界顶点需要的总驱动数 M_b 计算如下:

$$M_b = \frac{\sum_{j=b+1}^n (\sum r(j) - 2)}{2} \quad (3)$$

其中, b 为非分边界顶点数, n 为图形的总顶点数, $r_b(j)$ 为最后一个非边界顶点添加驱动后的邻接矩阵中的第 j 行的和。

由邻接矩阵 C_3 和式(3)可以得到多顶点三角形刚行折纸图案边界顶点需要添加的总驱动数为

$$M_b = \frac{\sum_4^9 (\sum 2 - 2)}{2} = 0$$

可以发现邻接矩阵 C_3 中第 4 行至第 9 行每一行的和都是 2,则由式(7)可得边界顶点需要的约束为

$M_b = 0$ 。最后,计算得到多顶点三角形刚性折纸机构的自由度: $M = M_e + M_b = 1$ 。

4 模拟仿真

通过 Adams 软件的建模仿真功能,建立多顶点三角形刚性折纸图案,建模过程中,刚性折纸的折痕视为旋转关节(细线表示),刚性纸板则视为连杆。连杆与连杆之间由旋转副连接,通过约束的方式使连杆与连杆仅存在转动自由度。多顶点三角形刚性折纸图案的三维建模图形如图 6 所示。

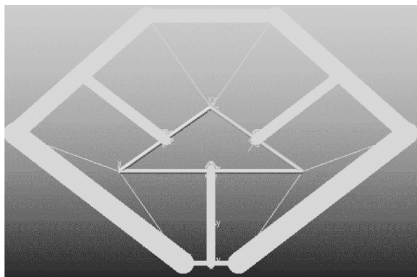


图 6 多顶点三角形刚性折纸图案三维建模

Fig. 6 Three-dimensional modeling of multi-vertex triangle rigid origami pattern

在完成建模的基础上,为模型添加驱动,模型的驱动添加数为上述计算结果,模型仅需添加一个驱动。然后,执行仿真运行步骤,看能否完成刚性折叠过程。

多顶点三角形刚折纸运动模型完成了从初始平折到完全折叠的运动过程,结果如图 7 所示,机构仅添加一个驱动即可完成所需的折叠运动(驱动添加图如图 8 所示),运动过程并无奇异位形,若添加多个驱动则可能会产生冗余驱动。仿真结果验证了多顶点三角形刚性折纸的自由度为 1 的结论是正确的。



图 7 多顶点三角形刚性折纸图案的运动完成折叠

Fig. 7 The movement of the multi-vertex triangle rigid origami pattern completes the folding

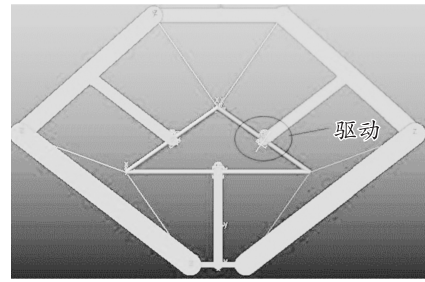


图 8 多顶点三角形刚性折纸图案的折叠驱动添加

Fig. 8 Folding drive addition of multi-vertex triangle rigid origami pattern

5 结束语

在刚性折纸的平折条件和峰谷分配的条件等条件下,以分析单顶点 4 折痕的刚性折纸自由度为基础,拓扑到多顶点三角形刚性折纸自由度分析,通过邻接矩阵的方法分析多顶点三角形刚性折纸的自由度,该方法具有运算简单、表达直观的优点。顶点之间的关系用邻接矩阵表示,便于计算机运算和矩阵变换。通过引入消元矩阵,用矩阵乘法描述了确定运动状态的过程,通过矩阵变换简化了折纸图案中的复杂运动表示。最后通过软件仿真验算其计算结果的准确性。

参考文献 (References):

- [1] BLEES M K, BARNARD A W, ROSE P A, et al. Graphene Kirigami [J]. Nature, 2015, 524 (7564): 204—207
- [2] ZIRBEL S A, LANG R J, THOMSON M W, et al. Accommodating Thickness in Origami-Based Deployable Arrays [J]. Journal of Mechanical Design, 2013, 135 (11): V06BT07A027
- [3] O'ROURKE J. How to Fold It: The Mathematics of Linkages, Origami, and Polyhedra [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011
- [4] IV F F, MING N H, HOTL. Foldable Plastic Bowl; US, USD567592 S1 [P]. 2008
- [5] QUAGLIA C P, DASCANIO A J, THRALL A P. Bascule Shelters: A Novel Erection Strategy for Origami-inspired Deployable Structures [J]. Engineering Structures, 2014, 75: 276—287
- [6] TACHI T. Generalization of Rigid Foldable Quadrilateral Mesh Origami [J]. Journal of the International Association for Shell & Spatial Structures, 2009, 50(3):

- 173—179
- [7] ABEL Z, CANTARELLA J, ED DEMAINE, et al. Rigid Origami Vertices: Conditions and Forcing Sets[J]. *Mathematics*, 2016,7(1): 171—184
- [8] BERRY M, LEE-TRIMBLE M E, SANTANGELO C D. Topological Transitions in the Configuration Space of Non-euclidean Origami[J]. *Physical Review E*, 2020, 101(4)
- [9] WU W, YOU Z. Modelling Rigid Origami with Quaternions and Dual Quaternions [J]. *Proceedings of the Royal Society. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, 466(2119):2155—2174
- [10] CAI J G, D X W, Z Y, et al. Bistable Behavior of the Cylindrical Origami Structure with Kresling Pattern [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2015,137(6),061406
- [11] KASAHARA K, TAKAHAMA T. *Origami for the Connoisseur* [M]. Tokyo: Kodansha Amer Inc, 1998
- [12] KAWASAKI T. On the Relation Between Mountain – creases and Valley – creases of a Flat Origami [C]// *Proceedings of the 1st International Meeting of Origami Science and Technology*, 1989:229—237
- [13] HULL T. On the Mathematics of Flat Origamis [J]. *Congressus Numerantium*, 1994:215—224
- [14] JUSTIN J. *Mathematics of Origami, Part 9* [J]. *British Origami*, 1986(118):28—30
- [15] DAI J S, HUANG Z, KIPLING H. Mobility of Overconstrained Parallel Mechanisms [J]. *Mech Design*, 2006(128):220—229
- [16] HUANG Z, LI Q, DING H. Theory of Parallel Mechanism [J]. *Mech Mach Sci*, 2012(6):653—654

Analysis of Freedom Degree of Multi-vertex Triangle Rigid Origami

**ZHANG Rui-hao, ZHANG Fan, ZHUANG Yan-shuai,
ZHANG Yu-hui, WANG Feng**

(School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering and Technology, Shanghai 201620, China)

Abstract: Rigid foldability is an important feature of the paper folding mechanism, allowing continuous movement along a predetermined crease between the folded and unfolded state without stretching or bending the surface. It has great potential in engineering applications. In view of the difficulty in the analysis of the freedom degree of multi-vertex origami mechanism, a method using adjacency matrix to analyze the freedom degree of rigid origami is proposed. The adjacency matrix is used to represent the connection relationship between vertices, then, by introducing an elimination matrix, the process of determining the motion state is described by matrix multiplication. The number of constraints is determined by calculating the sum of the row elements corresponding to the vertices, which avoid the calculation error of the freedom degree of the vertices of the cross crease. Based on the analysis of the freedom degree of the single-vertex 4-fold origami pattern, the topology is used to analyze the freedom degree of multi-vertex triangular rigid origami pattern. Finally, the correctness of the calculation results of the freedom degree of the rigid origami pattern is checked by software simulation.

Key words: origami structure; adjacency matrix; simulation analysis

责任编辑:罗姗姗

引用本文/Cite this paper:

张锐浩,张帆,庄彦帅,等.多顶点三角形刚性折纸自由度分析[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(5):23—28
ZHANG R H, ZHANG F, ZHUANG Y S, et al. Analysis of Freedom Degree of Multi-vertex Triangle Rigid Origami [J]. *Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)*, 2021, 38(5):23—28