doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0004.010

二次分式函数的 n 次迭代问题*

魏小琴
(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘　要:离散动力系统是对常微分方程解族进行离散化之后得到的系统,因其形式简洁并易于反映问题的本质,从 20 世纪 60 年代开始在 Smale 等著名数学家的倡导下蓬勃发展起来,对函数 n 次迭代的研究有助于了解离散动力系统轨道的长期行为;关于二次分式函数的 n 次迭代将在已有结果的基础上利用共轭相似法研究的前人未解决的 3 类特殊情形,即:$b_1=0$ 且 $a_1c_1=0$;$b_1\neq0$ 且 $a_1c_1=0$;$a_1b_1c_1\neq0$ 且 $a_1=a_2+1$,$b_2=b_1+2$,$c_1=c_2+1$;共轭相似法的原理是找到一个可逆桥函数将二次分式函数转化为二次函数,再根据二次函数已有的 n 次迭代结果解决问题;方法的关键在于寻找桥函数,但这没有一个固定的方法,针对每一类特殊情形,将寻找不同的桥函数.

关键词:函数迭代式;桥函数;共轭相似法
中图分类号:O193　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2021)04-0063-05

0　前　言

离散动力系统是对常微分方程解族进行离散化之后得到的系统。因其形式简洁并易于反映问题的本质,从 20 世纪 60 年代开始在 Smale 等著名数学家的倡导下蓬勃发展起来。对函数 n 次迭代的研究有助于了解离散动力系统轨道的长期行为。具体地说,函数 $f(x)$ 的迭代[1] 是指对同一函数 $f(x)$ 的多次复合。$f(x)$ 的 n 次迭代记为

$$f^n(x)=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n}(x)$$

对于函数的迭代,人们比较关心它的 n 次迭代式。如何求得函数的 n 次迭代式,就成为人们不断研究的课题。

目前,已有的方法有不动点法[1]、矩阵法[2-3]、共轭相似法[1,4]。根据函数的不同,可以选择更为适合它的方法去求解 n 次迭代式。文献[1]用不动点法求解一次函数 $f(x)=ax+b$ 的 n 次迭代式, 得到

$$f^n(x)=a^nx+\frac{1-a^n}{1-a}\cdot b$$

不动点法的原理是通过设置待定系数,利用函数 $f(x)$ 的不动点计算出待定系数,进而求得函数 $f(x)$ 的 n 次迭代式[1]。方法针对求解一次函数的 n 次迭代式非常适合,当然,不动点法还可以用于二次函数、线性分式函数,但却不是唯一最优的方法,对于线性分式函数:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

文献[3]利用矩阵法讨论它的 n 次迭代。文献[4]则利用矩阵的特征多项式的理论,推广了前人已有的结论,并得到了计算线性分式函数 n 次迭代式的一般公式。矩阵法的原理是首先定义线性分式函数的系数矩阵,再根据数学归纳知,可以将求解线

收稿日期:2020-05-28;**修回日期**:2020-06-24.
* **基金项目**:重庆市自然科学基金项目资助(CSTC2018JCYJAX0418).
作者简介:魏小琴(1996—),女,重庆万州区人,硕士研究生,从事微分方程与动力系统研究.

性分式函数的 n 次迭代问题转化为计算系数矩阵的 n 次幂问题[3]。利用此方法,文献[5]用共轭相似法求解二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的 n 次迭代式，得到

$$f^n(x)=\begin{cases}a^{2^n-1}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^{2^n}-\dfrac{b}{2a} \\ \qquad \text{当 } b^2-2b-4ac=0 \text{ 时} \\ \dfrac{2}{a}\cos 2^n\arccos\left(\dfrac{a}{2}x+\dfrac{b}{4}\right)-\dfrac{b}{2a} \\ \qquad \text{当 } b^2-2b-4ac-8=0 \text{ 时}\end{cases}$$

共轭相似法的原理是通过可逆桥函数 $h(x)$,使函数 f 与 g 满足 $f=h^{-1}\circ g\circ h$,把一个复杂函数转化成一个易求迭代式的较为简单的函数。再求出简单函数的 n 次迭代式,并利用 $f^n=h^{-1}\circ g^n\circ h$ 这一性质,进而求解出原函数的 n 次迭代式[1-2]。共轭相似法的关键是桥函数，但这没有一个固定的方法。

关于二次分式函数：

$$f(x)=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2} \tag{1}$$

已有若干的研究成果。如文献[6]给出二次分式函数在两种情形 $b_1=c_1=b_2=0$ 且 $a_1:a_2:c_2=1:2:-1$ 以及 $a_1=c_1=b_2=0$ 且 $b_1:a_2:c_2=2:-1:1$ 下的 n 次迭代式结论,文献[7]给出二次分式函数在两种情形 $a_2=b_1=0$ 且 $a_1:b_2=1:2$ 以及 $c_1=b_2=0$ 且 $b_1:c_2=2:1$ 下的 n 次迭代式结论。这些都是二次分式函数的一些特殊情形,如何扩大更多特殊情形的二次分式函数的 n 次迭代式,得到更多的结果,就成为探究的重点。二次分式函数有很多的特殊情形,主要关注 $a_2b_2c_2\neq0$ 的情形,并针对未解决的 3 种的情形进行研究,即：

(i) 若 $b_1=0$ 且 $a_1c_1=0$ 时；

(ii) 若 $b_1\neq0$ 且 $a_1c_1=0$ 时；

(iii) 若 $a_1b_1c_1\neq0$ 且满足：

$$a_1=a_2+1,\ b_2=b_1+2,\ c_1=c_2+1$$

将通过对不同特殊情形下的二次分式函数选取不同的桥函数，利用共轭相似法求解得出结论。

1 主要结果及证明

定理 1 若 $b_1=0$ 且 $a_1c_1=0$ 时,二次分式函数如式(1)所示可转化为

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2},\text{当 } a_1=0 \text{ 时} & (2)\\ f(x)=\dfrac{a_1x^2}{a_2x^2+b_2x+c_2},\text{当 } c_1=0 \text{ 时} & (3)\end{cases}$$

其中式(2)的 n 次迭代式为

$$f^n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(\dfrac{a_2}{c_1}\right)^{2^n-1}\left(x+\dfrac{b_2}{2a_2}\right)^{2^n}-\dfrac{b_2}{2a_2}} \\ \qquad \text{当}\left(\dfrac{b_2}{c_1}\right)^2-2\dfrac{b_2}{c_1}-4\dfrac{a_2}{c_1}\dfrac{c_2}{c_1}=0 \text{ 时} \\ \dfrac{1}{\dfrac{2c_1}{a_2}\cos 2^n\arccos\left(\dfrac{c_1}{2a_2}x+\dfrac{b_2}{4c_1}\right)-\dfrac{b_2}{2a_2}} \\ \qquad \text{当}\left(\dfrac{b_2}{c_1}\right)^2-2\dfrac{b_2}{c_1}-4\dfrac{a_2}{c_1}\dfrac{c_2}{c_1}-8=0 \text{ 时}\end{cases}$$

式(3)的 n 次迭代式为

$$f^n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(\dfrac{b_2}{a_1}\right)^{2^n-1}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{b_2}{2c_1}\right)^{2^n}-\dfrac{b_2}{2c_1}} \\ \qquad \text{当}\left(\dfrac{b_2}{a_1}\right)^2-2\dfrac{b_2}{a_1}-4\dfrac{c_1}{a_1}\dfrac{a_2}{a_1}=0 \text{ 时} \\ \dfrac{1}{\dfrac{2c_1}{a_1}\cos 2^n\arccos\left(\dfrac{c_1}{2a_1x}+\dfrac{b_2}{4a_1}\right)-\dfrac{b_2}{2c_1}} \\ \qquad \text{当}\left(\dfrac{b_2}{a_1}\right)^2-2\dfrac{b_2}{a_1}-4\dfrac{c_1}{a_1}\dfrac{a_2}{a_1}-8=0 \text{ 时}\end{cases}$$

证明 先证式(2)的 n 次迭代式，取桥函数 $h(x)=1/x$，则 $h^{-1}(x)=1/x$，于是由共轭相似 $f(x)=h^{-1}\circ g\circ h(x)$ 可得

$$g(x)=h\circ f\circ h^{-1}(x)=\frac{a_2}{c_1}\frac{1}{x^2}+\frac{b_2}{c_1}\frac{1}{x}+\frac{c_2}{c_1}$$

再令 $\alpha=1/x,g(\alpha)=\dfrac{a_2}{c_1}\alpha^2+\dfrac{b_2}{c_1}\alpha+\dfrac{c_2}{c_1}$,根据二次函数已有的 n 次迭代式知：

$$g^n(\alpha)=\begin{cases}\left(\dfrac{a_2}{c_1}\right)^{2^n-1}\left(a+\dfrac{b_2}{2a_2}\right)^{2^n}-\dfrac{b_2}{2a_2} \\ \qquad \text{当}\left(\dfrac{a_2}{c_1}\right)^2-2\dfrac{b_2}{c_1}-4\dfrac{a_2}{c_1}\dfrac{c_2}{c_1}=0 \text{ 时} \\ \dfrac{2c_1}{a_2}\cos 2^n\arccos\left(\dfrac{a_2\alpha}{2c_1}+\dfrac{b_2}{4c_1}\right)-\dfrac{b_2}{2a_2} \\ \qquad \text{当}\left(\dfrac{a_2}{c_1}\right)^2-2\dfrac{b_2}{c_1}-4\dfrac{a_2}{c_1}\dfrac{c_2}{c_1}-8=0 \text{ 时}\end{cases}$$

最后由 $f^n(x)=h^{-1}\circ g\circ h(x)$ 可得 $f^n(x)$。

式(3)的证明与式(1)的证明类似。同样取桥函数 $h(x)=1/x$，则 $h^{-1}(x)=1/x$，通过共轭相似可得到：

$$g(x)=h\circ f\circ h^{-1}(x)=\frac{c_2}{a_1}x^2+\frac{b_2}{a_1}x+\frac{a_2}{a_1}$$

再根据二次函数已有的 n 次迭代式知：

$$g^n(x)=\begin{cases}\left(\frac{b_2}{a_1}\right)^{2n-1}\left(x+\frac{b_2}{2c_1}\right)^{2^n}-\frac{b_2}{2c_1} \\ \qquad 当\left(\frac{b_2}{a_1}\right)^2-2\frac{b_2}{a_1}-4\frac{c_1}{a_1}\frac{a_2}{a_1}=0 时 \\ \frac{2c_1}{a_1}\cos 2^n\arccos\left(\frac{c_1}{2a_1}x+\frac{b_2}{4a_1}\right)-\frac{b_2}{2c_1} \\ \qquad 当\left(\frac{b_2}{a_1}\right)^2-2\frac{b_2}{a_1}-4\frac{c_1}{a_1}\frac{a_2}{a_1}-8=0 时\end{cases}$$

最后由 $f^n(x)=h^{-1}\circ g^n\circ h(x)$ 可得 $f^n(x)$。

定理 2　若 $b_1\neq 0$ 且 $a_1c_1=0$ 时，二次分式函数如式(1)所示可转化为

$$\begin{cases}f(x)=\frac{b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}, 当 a_1=0 时 & (4) \\ f(x)=\frac{a_1x^2+b_1x}{a_2x^2+b_2x+c_2}, 当 c_1=0 时 & (5)\end{cases}$$

若式(4)满足 $a_2=1, b_1=b_2+2, c_2=c_1+1$，也即是形如

$$f(x)=\frac{(B+2)x+C}{x^2+Bx+C+1} \tag{6}$$

其中 $B\neq -2, C\neq 0$。它的 n 次迭代式为

$$f^n(x)=\begin{cases}\eta_1(\alpha(B,C),\beta(B,C)) \\ \qquad 当 B^2+4B-4C=0 时 \\ \eta_2(\alpha(B,C),\beta(B,C)) \\ \qquad 当 B^2+4B-4C-8=0 时\end{cases}$$

其中

$$\eta_1(\alpha(B,C),\beta(B,C))=\left\{\alpha^{2^n-1}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{2^n}-\frac{\beta}{2\alpha}\right\}^{-1}+1$$

$$\eta_2(\alpha(B,C),\beta(B,C))=$$
$$\left\{-\frac{2}{\alpha}\cos 2^n\arccos\left(-\frac{\alpha}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{\beta}{4}\right)-\frac{\beta}{2\alpha}\right\}^{-1}+1$$

且 $\alpha(B,C)=B+C+2, \beta(B,C)=B+2$。

若式(5)满足 $c_2=-1, a_1=a_2+1, b_2=b_1+2$，也即是形如

$$f(x)=\frac{(A+1)x^2+Bx}{Ax^2+(B+2)x-1} \tag{7}$$

其中，$A\neq -1, B\neq 0$。它的 n 次迭代式为

$$f^n(x)=\begin{cases}\eta_3(\mu(A,B),\nu(A,B)) \\ \qquad 当 B^2+2B=0 时 \\ \eta_4(\mu(A,B),\nu(A,B)) \\ \qquad 当 B^2+2B-8=0 时\end{cases}$$

其中

$$\eta_3(\mu(A,B),\nu(A,B))=\left\{\mu^{2^n-1}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\nu}{2\mu}\right)^{2^n}-\frac{\nu}{2\mu}\right\}^{-1}+1$$

$$\eta_4(\mu(A,B),\nu(A,B))=$$
$$\left\{\frac{2}{\mu}\cos 2^n\arccos\left(\frac{\mu}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{\nu}{4}\right)-\frac{\nu}{2\mu}\right\}^{-1}+1$$

且 $\mu(A,B)=A+B+1, \nu(A,B)=2A+B+2$。

证明　先证式(6)的 n 次迭代式，取桥函数 $h(x)=1/(x-1)$，则 $h^{-1}(x)=1/x+1$。由共轭相似 $f(x)=h^{-1}\circ g\circ h(x)$ 得

$$g(x)=h\circ f\circ h^{-1}(x)=-(B+C+2)x^2-(B+2)x-1$$

根据二次函数已有的 n 次迭代式知：

$$g^n(x)=\begin{cases}\eta'_1(\alpha(B,C),\beta(B,C)) \\ \qquad 当 B^2+4B-4C=0 时 \\ \eta'_2(\alpha(B,C),\beta(B,C)) \\ \qquad 当 B^2+4B-4C-8=0 时\end{cases}$$

其中

$$\eta'_1(\alpha(B,C),\beta(B,C))=\alpha^{2^n-1}\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{2^n}-\frac{\beta}{2\alpha}$$

$$\eta'_2(\alpha(B,C),\beta(B,C))=$$
$$-\frac{2}{\alpha}\cos 2^n\arccos\left(-\frac{\alpha}{2}\cdot x-\frac{\beta}{4}\right)-\frac{\beta}{2\alpha}$$

且 $\alpha(B,C)=B+C+2, \beta(B,C)=B+2$。

最后由 $f^n(x)=h^{-1}\circ g^n\circ h(x)$ 可求得 $f^n(x)$。

式(7)的 n 次迭代的证明与式(6)类似。首先取桥函数 $h(x)=1/(x-1)$，则 $h^{-1}(x)=1/x+1$，由共轭相似得

$$g(x)=h\circ f\circ h^{-1}(x)=(A+B+1)x^2+(2A+B+2)x+A$$

再根据二次函数已有的结论知：

$$g^n(x)=\begin{cases}\eta_3'(\mu(A,B),\nu(A,B)) \\ \qquad 当 B^2+2B=0 时 \\ \eta_4'(\mu(A,B),\nu(A,B)) \\ \qquad 当 B^2+2B-8=0 时\end{cases}$$

其中

$$\eta_3{}'(\mu(A,B),\nu(A,B))=\mu^{2^n-1}\left(x+\frac{v}{2\mu}\right)^{2^n}-\frac{\nu}{2\mu}$$

$$\eta'_4(\mu(A,B),\nu(A,B))=$$

$$\frac{2}{\mu}\cos 2^n\arccos\left(\frac{\mu}{2}\cdot x+\frac{\nu}{4}\right)-\frac{\nu}{2\mu}$$

且 $\mu(A,B)=A+B+1,\nu(A,B)=2A+B+2$。

最后由 $f^n(x)=h^{-1}\circ g^n\circ h(x)$ 可得 $f^n(x)$。

定理 3 若 $a_1b_1c_1\neq 0$ 且满足 $a_1=a_2+1,b_2=b_1+2,c_1=c_2+1$ 时,二次分式函数如式(1)所示可转化为

$$f(x)=\frac{(A+1)x^2+Bx+C+1}{Ax^2+(B+2)x+C}$$

其中 $A+B+C\neq -2$,它的 n 次迭代式为

$$f^n(x)=\begin{cases}\eta_5(\phi(A,B,C),\varphi(A,B,C)) \\ \quad\text{当 } B^2+2B-4A-4AC=0 \text{ 时} \\ \eta_6(\phi(A,B,C),\varphi(A,B,C)) \\ \quad\text{当 } B^2+2B-4A-4AC-8=0 \text{ 时}\end{cases}$$

其中

$$\eta_5(\phi(A,B,C),\varphi(A,B,C))=$$

$$\left\{\phi^{2^n-1}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\varphi}{2\phi}\right)^{2^n}-\frac{\varphi}{2\phi}\right\}^{-1}+1$$

$$\eta_6(\phi(A,B,C),\varphi(A,B,C))=$$

$$\left\{\frac{2}{\phi}\cos 2^n\arccos\left(\frac{\phi}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{\varphi}{4}\right)-\frac{\varphi}{2\phi}\right\}^{-1}+1$$

且 $\phi(A,B,C)=A+B+C+2,\varphi(A,B,C)=2A+B+2$。

证明 取桥函数 $h(x)=1/(x-1)$,则 $h^{-1}(x)=1/x+1$,由共轭相似得

$$g(x)=h^{-1}\circ f\circ h(x)=(A+B+2)x^2+(2A+B+2)x+A$$

再根据二次函数已有的 n 次迭代式的结论知:

$$g^n(x)=\begin{cases}\eta'_5(\phi(A,B,C),\varphi(A,B,C)) \\ \quad\text{当 } B^2+2B-4A-4AC=0 \text{ 时} \\ \eta'_6(\phi(A,B,C),\varphi(A,B,C)) \\ \quad\text{当 } B^2+2B-4A-4AC-8=0 \text{ 时}\end{cases}$$

其中

$$\eta'_5(\phi(A,B,C),\varphi(A,B,C))=\phi^{2^n-1}\left(x+\frac{\varphi}{2\phi}\right)^{2^n}-\frac{\varphi}{2\phi}$$

$$\eta'_6(\phi(A,B,C),\varphi(A,B,C))=$$

$$\frac{2}{\phi}\cos 2^n\arccos\left(\frac{\phi}{2}\cdot x+\frac{\varphi}{4}\right)-\frac{\varphi}{2\phi}$$

且 $\phi(A,B,C)=A+B+C+2,\varphi(A,B,C)=2A+B+2$。

最后由 $f^n(x)=h^{-1}\circ g^n\circ h(x)$ 可得 $f^n(x)$。

2 结束语

在前人已有的基础上,用共轭相似法讨论了二次分式函数:$f(x)=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}(a_2b_2c_2\neq 0)$ 的 3 类特殊情形下的 n 次迭代式。找到一个可逆桥函数 $h(x)$,利用共轭相似使函数 f 与 g 满足 $f=h^{-1}\circ g\circ h$,将二次分式函数转化二次函数,根据二次函数已有的 n 次迭代的结论,并利用 $f^n=h^{-1}\circ g^n\circ h$ 这一性质,进而求得原二次分式函数的 n 次迭代式。共轭相似法的关键在于寻找可逆桥函数 $h(x)$,但这没有一个固定的方法。针对每一类特殊情形,将寻找不同的桥函数,用共轭相似法求解得出结论。

参考文献(References):

[1] 张伟年. 动力系统基础[M]. 北京:高等教育出版社,施普林格出版社, 2001

ZHANG W N. Dynamic System Foundation [M]. Beijing: Higher Education Press, Springer Press, 2001 (in Chinese)

[2] 石生润. 线性分式函数的矩阵迭代法[J]. 甘肃教育学院学报:自然科学版, 1993(2):5—8

SHI S R. Matrix Iteration of Linear Fraction Function [J]. Journal of Gansu Institute of Education (Naturnal Science Edition), 2011, 1993(2):5—8(in Chinese)

[3] 许璐, 许绍元. 关于线性分式函数的 n 次迭代及其应用[J]. 数学实践与认识, 2006(6):225—228

XU L, XU S Y. On the Ntimes Iteration of Linear Fraction Function and its Application[J]. Mathematics Practice and Cognition, 2006 (6): 225—228 (in Chinese)

[4] 张景中, 熊金城. 函数迭代与一维动力系统[M]. 成都:四川教育出版社, 1992

ZHANG J Z, XIONG J C. Function Iteration and One Dimensional Danamical System[M]. Chengdu: Sichuan Education Press, 1992(in Chinese)

[5] 余瑶. 几类函数的迭代与一类迭代方程解的研究[D]. 重庆:重庆师范大学, 2013

YU Y. Study on Several Kinds of Function Iteration and the Solution of One Kind of Iterative Equation [D]. Chongqing: Chongqing Normal University, 2013 (in Chinese)

[6] 霍瑞丽. 拓扑空间中几类函数迭代问题的研究[D]. 重庆:重庆师范大学, 2011

HUO R L. Study on Several Kinds of Function Iteration Problems in Topological Space[D]. Chongqing:Chongqing Normal University, 2011(in Chinese)

[7] 向静婧. 拓扑空间中几类函数迭代问题的研究[D]. 重庆:重庆师范大学, 2016

XIANG J J. Study on Several Kinds of Function Iteration Problems in Topological Space[D]. Chongqing: Chongqing Normal University, 2016(in Chinese)

[8] 孙利霞, 尚传福. 桥函数在函数迭代中的应用[J]. 重庆教育学院学报, 2006(5):14—16

SUN L X, SHANG C F. Application of Bridge Function in Function Iteration[J]. Journal of Chongqinng Institute of Education, 2006(5):14—16(in Chinese)

[9] 刘晓华. 关于三类函数的迭代[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2013(6):16—20

LIU X H. On the Iteration of Three Kinds of Functions [J]. Journal of Southwest University (Naturnal Science Edition), 2013(6):16—20(in Chinese)

The Problem of n-th Iteration of Quadratic Fractional Functions

WEI Xiao-qin

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract:The discrete dynamical system is obtained by discretizing the solution cluster of ordinary differential equations. Due to the simple form and easy way of reflecting the nature of the problem, it has flourished since the 1960s under the initiative of Smale and other famous mathematicians. The study on n-th iteration of functions can help us understand long-term behaviors of the orbits of the discrete dynamical systems. There have been plentiful results on n-th iteration of the quadratic fractional functions. In this paper, based on the previous results, three kinds of unsolved cases are investigated by using the conjugation similarity method, i. e. , (I) $b_1=0$ and $a_1c_1=0$; (II) $b_1\neq 0$ and $a_1c_1=0$; (III) $a_1b_1c_1\neq 0$ and $a_1=a_2+1, b_2=b_1+2, c_1=c_2+1$. The principle of conjugation similarity method is to find reversible bridge function to convert the quadratic fractional functions into quadratic functions, then, according to the existing n-th iteration results on quadratic functions, we can solve the problem. The key point of this method is to find bridge functions, but there is no general method. Thus, for every case, we will find different bridge functions.

Key words:iteration of function; bridge function; conjugation similarity method

责任编辑:田　静

引用本文/Cite this paper:

魏小琴. 二次分式函数的 n 次迭代问题[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(4):63—67

WEI X Q. The Problem of n-th Iteration of Quadratic Fractional Functions[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2021,38(4):63—67