doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0002.020

基于商空间的语言型 Z-number 多准则决策方法*

郭海艳[1], 苏静文[2], 李燕飞[1], 吴　涛[1,3]

(1. 安徽大学 数学科学学院,合肥 230601;2. 安徽大学 经济学院,合肥 230601;
3. 安徽大学 计算机智能与信号处理教育部重点实验室,合肥 230039)

摘　要:针对 Z-number 多准则决策中计算复杂度高,计算量大等问题,提出了一种较为简单且行之有效的基于粒度的多准则决策方法;将语言型 Z-number 决策信息转化为经典模糊数,用提出的可能度公式来两两比较方案的优劣程度,并且根据定义的模糊度公式计算出各准则的权重,继而得到最终的决策矩阵;然后,基于商空间的基本理论对 QUALIFLEX 排序方法进行改进,根据方案间的优势关系以及保假原理,可以将问题的最优解确定在较小的粒度空间内,在这个较小的粒度空间内搜索出综合一致性最大的最优排列,得到问题的最优解;最后通过实例分析可验证提出方法的可行性和有效性,且方法有效降低了计算的复杂度。

关键词:Z-number;多准则决策;可能度;商空间;QUALIFLEX

中图分类号:C934　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2021)02-0122-07

0　引　言

在现实生活中,大多数的信息都是不确定的,在不精确、不确定的环境下进行决策不可避免,故 Zadeh[1] 在模糊集的概念上,提出了一种新的模糊集理论——Z-number 来描述不确定问题,Z-number 是一对有序模糊数,记作 $Z=(A,B)$,其中第一部分 A 是实值不确定变量 X 取值的限制,第二部分 B 是对 A 的可靠性度量。Z-number 反应了变量的模糊性和随机性,基于语言型 Z-number 对变量的描述,更符合人类的表达习惯,因为它具有可以描述感知信息模糊性和可靠性的优越性,所以被越来越多的用于评估信息。但在基于 Z-number 语言环境的多准则决策问题中,通常伴随着计算量大,计算复杂度高等问题,Kang 等[2] 提出了将 Z-number 转化为经典模糊数的方法,方法将第二部分可靠性 B 转化为一个确切数 α,Z-number 转化后的模糊数可通过第一部分 A 和 α 结合可得,有效减小了处理 Z-number 问题中的计算量。

QUALIFLEX 决策方法利用了序数和基的信息,是一种灵活有用的决策方法,因此被用于处理各种语言环境下的决策问题,Shuyang Song 等[3] 在区间粗糙数的环境下利用上、下近似使用 QUALIFLEX 方法决策,Zhang 等[4] 在犹豫模糊集的环境下基于符号距离比较使用 QUALIFLEX 方法进行多准则决策。QUALIFLEX 方法对处理准则数较大的问题时颇具优越性,但是不适用于方案集较大的决策问题。将 QUALIFLEX 方法与商空间理论结合,有效降低计算复杂性,减少计算量,使得在语言型 Z-number 决策环境下,QUALIFLEX 方法在方案集较大的决策问题中也变得可行。

在 Z-number 转化为经典模糊数[2] 方法的基础上,构建了一种基于商空间的 Z-number 多准则决策问题的方法。首先,通过定义的模糊度公式计算出各准则的权重,然后,通过提出的两两比较方案的可能度公式得出方案与方案之间的优劣程度,将其结果与所得权重集结,得出最终的决策矩阵。最后,根据商空间的保假原理,选择合适的粒度空间搜索最优排列,改进了 QUALIFLEX 排序方法,得到方案的

收稿日期:2020-05-12;**修回日期**:2020-06-21.

* **基金项目**:国家自然基金面上项目(71871001);国家自然基金青年项目(618006001).

作者简介:郭海艳(1994—),女,安徽阜阳人,硕士研究生,从事智能计算与统计决策研究.

最优排列,并用案例分析验证该方法的可行性与有效性。

1　基本理论

令$S=\{s_i \mid i=0,1,2,\cdots,2t,t\in N\}$为有限的语言型语集[6],其中 s_i 为语言变量的可能取值,对 $\forall s_i$, $s_j\in S$,需满足两个条件:

(1) 有序性:若 $i<j$,则 $s_i<s_j$;

(2) 若 $i+j=2t$,则$-s_i=s_j$。

定义 1[5]:给定论域 U 上的一个模糊集 A,存在隶属函数$\mu_A:U\to[0,1]$,若μ_A 满足:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0,x\in(-\infty,a_1)\\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1},x\in[a_1,a_2]\\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2},x\in[a_2,a_3]\\ 0,x\in(a_3,+\infty)\end{cases}$$

则称 A 为三角模糊数,记为(a_1,a_2,a_3),图像如图 1 所示。

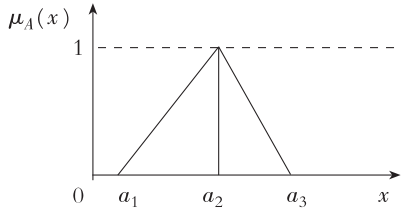

图 1　三角模糊数

Fig. 1　Triangular fuzzy number

定义 2[6]:令语言型语集 $S=\{s_0,s_1,\cdots,s_{2l},l\in N\}$,$S'=\{s'_0,s'_1,\cdots,s'_{2r},r\in N\}$,其中,$S,S'$代表着不同的语义。令 $Z_i=(s_i,s'_i)$,$Z_j=(s_j,s'_j)$,其中 s_i, $s_j\in S$,$s'_i,s'_j\in S'$,则 Z_i,Z_j 关系如下:

(1) 强优势:若 $s_i>s_j$ 且 $s'_i>s'_j$,则 Z_i 强优于 Z_j,记 $Z_i>_sZ_j$(或 $Z_j<_sZ_i$)。

(2) 弱优势:若 $s_i=s_j$ 且 $s'_i>s'_j$ 或者 $s_i>s_j$ 且 $s'_i=s'_j$,则 Z_i 弱优于 Z_j,记 $Z_i>_wZ_j$(或 $Z_j<_wZ_i$)。

(3) 等价:若 $s_i=s_j$ 且 $s'_i=s'_j$,则 Z_i 等价于 Z_j,记 $Z_i\sim Z_j$。

(4) 不可比较关系:若 Z_i,Z_j 不存在上述 3 种关系,则称 Z_i,Z_j 不可比较,记 $Z_i\perp Z_j$。

商空间理论是张钹等在 1990 年提出的问题求解理论,该理论将问题放在各种不同的粒度空间上进行分析和研究,然后综合得出对原问题的解。在商空间理论中,用三元组(X,f,T)描述一个问题,其中 X 表示问题的论域;f 表示论域的属性,$f:X\to Y$;T 是论域的结构,指论域 X 中各元素的相互关系。

定义 3[7]:给定(X,f,T)和一个等价关系 R 之后,称$([X],[f],[T])$为问题(X,f,T)对应于等价关系 R 的商空间(其中 R 对应于一定的粒度),若满足:

(1) $[X]$是对应于等价关系 R 的商集。

(2) $[T]:\{u\mid p^{-1}(u)\in T,u\in[X]\}$,$p:X\to[X]$是自然投影。

(3) $[f]:[X]\to Y$。

定义 4[7]:设 $R_1,R_2\in\Re$,若 $x,y\in X$,$xR_1y\to xR_2y$,则称 R_1 比 R_2 细,记 $R_1<R_2$。

不同粒度世界之间存在的"保真""保假"原理,为粒度推理提供了理论依据。

保假原理[8]:若一个命题在粗粒度空间为假,则命题在细粒度空间中也为假。

保真原理[8]:若一个命题在两个粗粒度空间为真,则在一定条件下在其合成的商空间中的命题也为真。

在商空间理论中,选取适当的商空间对问题的解决至关重要。一般可以从 3 个方面进行粒度的划分,一直接对论域 X 进行颗粒化,将较小的粒度合成为新的粒度,二是通过属性的粒度对论域 X 进行划分,三是对结构进行划分,都得到粗粒度的结构。

2　基于商空间的 QUALIFLEX 改进方法

可能度是描述一个方案不差于另一个方案的程度,构造由 Z-number 转化后的三角模糊数两两比较的可能度公式如下:

定义 5:令 $Z'_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})$,$Z'_j=(a_{j1},a_{j2},a_{j3})$为对应方案转化后的三角模糊数,则 Z'_i 优于 Z'_j 的可能度为

$$L(Z'_i>Z'_j)=\frac{(a_{i1}-a_{j1})+(a_{i2}-a_{j2})+(a_{i3}-a_{j3})}{\max(a_{i1},a_{j1})+\max(a_{i2},a_{j2})+\max(a_{i3},a_{j3})}\quad(1)$$

可能度 $L(Z'_i>Z'_j)$满足性质:

(1) $-1\leqslant L(Z'_i>Z'_j)\leqslant 1$;

(2) $L(Z'_i>Z'_j)+L(Z'_j>Z'_i)=0$;

(3) $L(Z'_i>Z'_i)=0$;

(4) 若 $L(Z'_i>Z'_j)=L(Z'_j>Z'_i)$,

则 $L(Z'_i>Z'_j)=L(Z'_j>Z'_i)=0$。

通过定义的可能度公式,可以在每个准则下两两比较方案的优劣程度。若 $L(Z'_i>Z'_j)>0$,则说明在准则下,方案 Z_i 是优于方案 Z_j 的;若 $L(Z'_i>Z'_j)=0$,则说明在准则下,方案 Z_i 是等价于方案 Z_j

的;若 $L(Z'_i > Z'_j) < 0$,则说明在准则下,方案 Z_i 是劣于方案 Z_j 的。

模糊度是衡量一个模糊集的模糊程度,模糊度数值越大,则模糊集的不确定性越大。模糊度的定义如下:

定义 6[9]:若映射 $d:F(A)\to[0,1]$ 满足条件:

(1) 当且仅当 $A\in P(X)$ 时,$d(A)=0$;

(2) 当且仅当 $\mu_A(x)\equiv\frac{1}{2}$ 时,$d(A)=1$;

$\forall x\in U$,当 $\mu_B(x)\leqslant\mu_A(x)\leqslant 0.5$,

则 $d(B)\leqslant d(A)$;

$\forall x\in F(X)$,$d(A)=d(A^C)$。

称映射 d 为 $F(A)$ 上的一个模糊度,称 $d(A)$ 为模糊集 A 的模糊度。

定义 7:设有映射 $d:F(A)\to[0,1]$,$x\in[0,1]$ 令

$$d(A)=\int -4\mu_A^2(x)+4\mu_A(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

则 $d(A)$ 为 A 的模糊度。

证明:(1) 当 A 是清晰集时,即 $\mu_A(x)=0$ 或 1,此时 $d(A)=0$;当 $d(A)=0\Rightarrow\mu_A(x)=0$ 或 1,此时,A 是清晰集。

(2) $\mu_A(x)=0.5\Leftrightarrow d(A)=1$,此时,模糊集 A 的模糊度最大。

(3) 若对 $\forall x\in U$,有 $\mu_B(x)\leqslant\mu_A(x)\leqslant 0.5$,又因为 $0\leqslant\mu_B(x)$,$\mu_A(x)\leqslant 1$,所以有 $0\leqslant -4\mu_B^2(x)+4\mu_B(x)\leqslant -4\mu_A^2(x)+4\mu_A(x)\leqslant 1$,所以有 $\int -4\mu_B^2(x)+4\mu_B(x)\mathrm{d}x\leqslant\int -4\mu_A^2(x)+4\mu_A(x)\mathrm{d}x$,所以 $d(B)\leqslant d(A)$。

同理可得 $\mu_B(x)\geqslant\mu_A(x)\geqslant 0.5$ 时,

有 $d(B)\leqslant d(A)$。

(4) $d(A^C)=\int -4(1-\mu_A(x))^2+4(1-\mu_A(x))\mathrm{d}x=\int -4(1-2\mu_A(x)+\mu_A^2(x))+4(1-\mu_A(x))\mathrm{d}x=$

$\int -4+8\mu_A(x)-4\mu_A^2(x)+4-4\mu_A(x)\mathrm{d}x=$

$\int -4\mu_A^2(x)+4\mu_A(x)\mathrm{d}x=d(A)$

故 $d(A)$ 为模糊集 A 的模糊度。

2.1 经典 QUALIFLEX 决策方法

QUALIFLEX 决策方法通过上述定义的可能度大小作为一致性指标,然后找到综合一致性最大的排列来确定最优排列,进而找出决策的最优解。假设方案集 A 包含 n 个备选方案,则 n 种方案共存在 $n!$ 种序关系。令 P_l 是所有排序中的第 l 种序关系。

$$P_l=(\cdots,A_\rho,\cdots,A_\beta,\cdots),l=1,2,\cdots,n!$$

(1) 若 $L(A_\rho>A_\beta)>0$,即备选方案 A_ρ 优于备选方案 A_β,则在该预次序中,一致性存在。

(2) 若 $L(A_\rho>A_\beta)=0$,即备选方案 A_ρ 等价于备选方案 A_β,则在该预次序中,称他们等价。

(3) 若 $L(A_\rho>A_\beta)<0$,即备选方案 A_ρ 劣于备选方案 A_β,则在预次序中,不一致性存在。

通过计算 $n!$ 种序关系的综合一致性指标找到最优排列,综合一致性越大,则排列越优。例:P_l 的综合一致性指标计算如下:$\varphi_l=\sum_{A_\rho,A_\beta\in P_l}(L(A_\rho>A_\beta))$.

2.2 QUALIFLEX 改进方法

Z-number 的直接计算是复杂的,其优劣比较通常需要经过大量复杂的计算,但是在基于 Z-number 的多准则决策中,通过定义 2 叙述的 Z-number 的优势关系下,可以直接比较两个方案的优劣。若在每个准则下,方案 A_ρ 都不差于(强优势、弱优势、等价)方案 A_β,即 $A_{\rho j}>_s A_{\beta j}$、$A_{\rho j}>_w A_{\beta j}$ 或 $A_{\rho j}\sim A_{\beta j}$,$(j=1,2,\cdots,m)$,此时,就可以说方案 A_ρ 是不差于方案 A_β 的。由此可知,在基于 QUALIFLEX 的多准则决策方法找到的最优排列中,方案 A_ρ 的排列次序肯定是先于方案 A_β 的。

在处理多准则决策问题时,根据属性对论域 X 进行划分。用商空间理论中的三元组 (X,f,T) 描述一个基于 Z-number 的 QUALIFLEX 多准则决策问题的决策方法,其中,X 表示论域中最细的粒度,即 QUALIFLEX 方法中存在的 $n!$ 种序关系,这里 $f:X\to Y$ 是属性函数,T 为所有优序构成的半序结构。

假设观察原始信息表,能够得到 k 条基于定义 2 的 Z-number 的优势关系,将每个优势关系作为一个划分论域的属性函数,得到一个满足该优势关系的粒度空间 $X_{q1}(q=1,2,\cdots,k)$ 和一个不满足优势关系的粒度空间 $X_{q2}(q=1,2,\cdots,k)$,则原问题转化为一个较粗的粒度上的问题([X],[f],[T])。且由上述分析,QUALIFLEX 决策方法得到的最优排列需同时满足 k 条优势关系,在粗粒度空间 X_{q2} 中第 $q(q=1,2,\cdots,k)$ 条优势关系为假,故由保假原理,因粒度空间 $X_{q2}(q=1,2,\cdots,k)$ 内的所有序关系均为假,所以粒度空间 $X_{q2}(q=1,2,\cdots,k)$ 中不存在最优排列,所以不需要在 X_{q2} 中搜索最优排列。通过不断划分粒度空间 $X_{q1}(q=1,2,\cdots,k)$,并且结合保假原理,排除掉不满足优势关系的粒度空间,不断缩小搜

索最优排列的粒度空间,并在最终得到的粒度空间上使用 QUALIFLEX 排序方法搜寻综合一致性指标最大的最优排列,得到所求的最优排列。如图 2 所示。

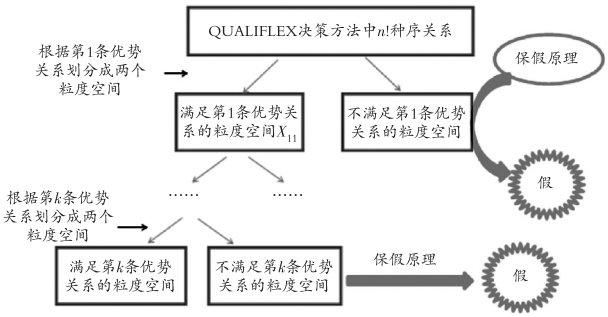

图 2　根据优势关系划分的粒度空间

Fig. 2　Granularity space divided according to dominance relation

若方案集 A 包含 n 个备选方案,且已知一条优序关系,则计算复杂度变为原来的$\frac{1}{2}$,因为由保假原理排除掉了粒度空间 X_{12}内的所有排列,只需计算粒度空间 X_{11}内的$\frac{1}{2}A_n^n$ 种排列的综合一致性指标,继而得到最优解。

由于商空间的规模比原空间小,所以在经典的 QUALIFLEX 决策方法中运用方案之间的优序关系,就可以在较小的粒度空间内求解多准则决策问题,有效减少计算量。优序关系越多,则存在最优排列的粒度空间越细,搜索范围越小,QUALIFLEX 决策方法越高效。

3　基于粒度的语言型 Z-number 决策方法

基于上述基本知识,提出的多准则决策方法如下:

(1) 标准化评估信息。对于收益型准则,$\tilde{Z}_{ij}=Z_{ij}=(A_{ij},B_{ij})$;对于成本型准则,$\tilde{Z}_{ij}=-Z_{ij}=(-A_{ij},-B_{ij})$。

(2) 将 Z-number 评估信息表转化为经典模糊数评估信息表。Z-number 的直接比较和计算是复杂的,采用文献[2]的方法将 Z-number 转化为经典模糊数。首先,将第二部分可靠性 B 转化为确切数 $\alpha=\frac{\int x\mu_B(x)\mathrm{d}x}{\int\mu_B(x)\mathrm{d}x}$, 然后转化后的 $Z^\alpha=\{\langle x,\mu_{A^\alpha}(x)\rangle \mid \mu_{A^\alpha}(x)=\alpha\mu_A(x)\}$,将其转变为常规模糊数,即为 $Z'=\left\{\langle x,\mu_{Z'}(x)\rangle \,\middle|\, \mu_{Z'}(x)=\mu_{A^\alpha}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right),x\in[0,1]\right\}=(\sqrt{\alpha}a_1,\sqrt{\alpha}a_2,\sqrt{\alpha}a_3;1)$,记为 $Z'=(\sqrt{\alpha}a_1,\sqrt{\alpha}a_2,\sqrt{\alpha}a_3)$。

(3) 在每个准则下构建可能度矩阵。由上述可能度式(1)计算每个准则下方案与方案的优劣度 $H_j=(l_{ij})_{n\times n},(j=1,2,\cdots,m)$。

(4) 计算各准则的权重。因为模糊度值越大,所包含的信息就越不确定,即各准则的权重与模糊度值成反比。首先标准化转化后的三角模糊数,$Z''=\left(\frac{\sqrt{\alpha}a_1}{A^*},\frac{\sqrt{\alpha}a_2}{A^*},\frac{\sqrt{\alpha}a_3}{A^*},\right)$, $A^*=\max(\sqrt{\alpha}a_1,\sqrt{\alpha}a_2,\sqrt{\alpha}a_3)$,然后用式(2)分别计算 n 个方案,m 个准则下的模糊度 d_{ij},即:

$$d'_j=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}d_{ij}}\qquad(j=1,2,\cdots,m)\tag{3}$$

$$\omega_j=\frac{d'_j}{\sum_{j=1}^{m}d'_j}\qquad(j=1,2,\cdots,m)\tag{4}$$

(5) 得出最终的决策表。基于前面得到的权重与可能度公式,计算最终的决策矩阵:

$$\boldsymbol{Q}=\sum_{j=1}^{m}\omega_jH_j\tag{5}$$

(6) 基于商空间粒度的 QUALIFLEX 方法,得到最优方案。运用改进的 QUALIFLEX 决策方法选择合适的粒度空间并计算粒度空间中所有可能的排列的综合一致性指标

$$\varphi_l=\sum\nolimits_{A_\alpha,A_\beta\in P_l}(Q_{\alpha\beta})\tag{6}$$

4　实例分析

工作满意度是员工对当前工作的积极感受的心理状态,影响企业运行效率与活力。ABC 公司为了调查企业现状及提高员工工作质量,现对 4 个部门 $A=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$的员工进行工作满意度评估。由一个个人管理专家、一个社会学家和一个心理学家组成的专业团队帮助评估,考虑影响工作满意度的 4 个准则:c_1:工作环境;c_2:人际关系;c_3:社会公益服务;c_4:福利。4 个准则的权重 $\omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$是未知的。专家通过对每个部门提交的问卷进行评估,部门 a_i 在准则 c_j 下的评估信息用 Z-number 表示,并且使用了如表 1 所示的两个连续的语言尺度函数,在激烈的讨论之后,产生了 4 个部门的工作满意度评估信息表,见表 2。

表 1 不同语义下的连续型语言集

Table 1 Continuous linguistic sets under different semantics

语言集 S		语言集 S'	
非常差 S_0	(0,1,2)	强烈不确定 S'_0	(0,0.12,0.24)
差 S_1	(1,2,3)	不确定 S'_1	(0.12,0.24,0.36)
较差 S_2	(2,3,4)	一些不确定 S'_2	(0.24,0.36,0.48)
一般 S_3	(3,4,5)	中立 S'_3	(0.36,0.48,0.60)
较好 S_4	(4,5,6)	一些确定 S'_4	(0.48,0.60,0.72)
好 S_5	(5,6,7)	确定 S'_5	(0.60,0.72,0.84)
很好 S_6	(6,7,8)	强烈确定 S'_6	(0.72,0.84,0.96)

表 2 工作满意度评估信息

Table 2 Job satisfaction assessment information

	c_1	c_2	c_3	c_4
A_1	(s_5,s'_4)	(s_5,s'_5)	(s_5,s'_3)	(s_6,s'_6)
A_2	(s_3,s'_5)	(s_6,s'_5)	(s_3,s'_5)	(s_4,s'_5)
A_3	(s_5,s'_6)	(s_4,s'_3)	(s_4,s'_2)	(s_3,s'_4)
A_4	(s_6,s'_6)	(s_4,s'_6)	(s_6,s'_3)	(s_5,s'_6)

步骤一:标准化评估信息。上例中的评估信息不需要进行标准化,因为每一个准则都是收益型的,故 $\tilde{Z}_{ij}=Z_{ij}=(A_{ij},B_{ij})$。

步骤二:将 Z 数评估信息表转化为经典模糊数评估信息表,结果如表 3 所示。

表 3 将 Z-number 转化为经典模糊数

Table 3 Converting Z-number into classical fuzzy number

	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	(2.771 3,3.464 1,4.156 9)	(3.098 4,3.873 0,4.647 6)	(2.4,3,3.6)	(4.242 6,5.091 2,5.939 7)
a_2	(1.549 2,2.323 8,3.098 4)	(3.873 0,4.647 6,5.422 2)	(1.549 2,2.323 8,3.098 4)	(2.323 8,3.098 4,3.873 0)
a_3	(3.394 1,4.242 6,5.091 2)	(1.8,2.4,3)	(1.469 7,1.959 6,2.449 5)	(1.385 6,2.078 5,2.771 3)
a_4	(4.242 6,5.091 2,5.939 7)	(2.545 6,3.394 1,4.242 6)	(3,3.6,4.2)	(3.394 1,4.242 6,5.091 2)

步骤三: 构建可能度矩阵。由式(1)在每个准则下两两比较部门与部门工作满意度优劣的可能度。得到 $\boldsymbol{H}_j,(i=1,2,\cdots,m)$,结果如下:

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}0 & 0.329\,2 & -0.183\,5 & -0.319\,6\\ -0.329\,2 & 0 & -0.452\,3 & -0.543\,6\\ 0.183\,5 & 0.452\,3 & 0 & -0.166\,7\\ 0.319\,6 & 0.543\,6 & 0.166\,7 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}0 & -0.166\,7 & 0.380\,3 & 0.123\,7\\ 0.166\,7 & 0 & 0.483\,6 & 0.269\,7\\ -0.380\,3 & -0.483\,6 & 0 & -0.292\,9\\ -0.123\,7 & -0.269\,7 & 0.292\,9 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_3=\begin{pmatrix}0 & 0.225\,4 & 0.346\,8 & -0.166\,7\\ -0.225\,4 & 0 & 0.156\,7 & -0.354\,5\\ -0.346\,8 & -0.156\,7 & 0 & -0.455\,7\\ 0.166\,7 & 0.354\,5 & 0.455\,7 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_4=\begin{pmatrix}0 & 0.391\,4 & 0.591\,8 & 0.166\,7\\ -0.391\,4 & 0 & 0.329\,2 & -0.269\,7\\ -0.591\,8 & -0.329\,2 & 0 & -0.510\,1\\ -0.166\,7 & 0.269\,7 & 0.510\,1 & 0\end{pmatrix}$$

步骤四:计算权重。标准化表 3 中的数据,并且根据式(2)计算信息表中每个模糊数的模糊度,再由式(3)、式(4)计算得出各准则权重。计算得:

$$\omega=(0.254\,1,0.260\,1,0.242\,9,0.242\,9)$$

步骤五:最终决策矩阵。由式(5)得最终决策矩阵:

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0 & 0.190\,1 & 0.280\,3 & -0.049\,0\\ -0.190\,1 & 0 & 0.128\,9 & -0.219\,6\\ -0.280\,3 & -0.128\,9 & 0 & -0.353\,1\\ 0.049\,0 & 0.219\,6 & 0.353\,1 & 0\end{pmatrix}$$

步骤六:基于商空间的 QUALIFLEX 方法。由最初的决策信息表可知 $A_{4j}\succ A_{3j},(j=1,2,3,4)$,故 $A_4\succ A_3$,所以由上述讨论,利用这个优势关系,对有 $4!=24$ 种序关系的空间进行划分,并且在拥有属性 $A_4\succ A_3$ 的粒度空间 X_1 中寻找最优排列。下面列出 X_1 空间中的所有序关系,并利用上述最终决策矩阵找到最优排列。

比较表 4 中粒度空间 X_1 内各个排列的综合一致性指标,数值越大,则一致性越强,排列越优,由公式(6)可得:$\varphi_1=0.683\,8$,$\varphi_2=1.123\,0$,$\varphi_3=0.865\,2$,$\varphi_4=0.303\,6$,$\varphi_5=0.401\,6$,$\varphi_6=-0.159\,0$,$\varphi_7=1.221\,0$,$\varphi_8=0.840\,8$,$\varphi_9=0.280\,2$,$\varphi_{10}=0.402\,6$,$\varphi_{11}=0.022\,4$,$\varphi_{12}=0.963\,2$,容易得到,第 7 种排列的综合一致性指数最大,故 $P_7=(A_4,A_1,A_2,A_3)$ 为最优排列。所以部门 A_4 的工作满意度最高。

表 4　粒度空间 X_1 的排列

Table 4　Arrangement in granularity space X_1

$P_1=(A_1,A_2,A_4,A_3)$	$P_2=(A_1,A_4,A_2,A_3)$
$P_3=(A_1,A_4,A_3,A_2)$	$P_4=(A_2,A_1,A_4,A_3)$
$P_5=(A_2,A_4,A_1,A_3)$	$P_6=(A_2,A_4,A_3,A_1)$
$P_7=(A_4,A_1,A_2,A_3)$	$P_8=(A_4,A_2,A_1,A_3)$
$P_9=(A_4,A_2,A_3,A_1)$	$P_{10}=(A_4,A_3,A_1,A_2)$
$P_{11}=(A_4,A_3,A_2,A_1)$	$P_{12}=(A_4,A_1,A_3,A_2)$

5　方法比较

为了更好的表明提出方法的有效性,用文献[6,16,17]中的方法与方法比较,结果如表 5 所示。

表 5　不同方法排序结果比较

Table 5　Comparison of sorting results of different methods

方　法	排序结果
文献[6]	$A_4>A_1>A_2>A_3$
文献[16]	$A_4>A_3>A_1>A_2$
文献[17]	$A_4>A_2>A_3>A_1$
方法	$A_4>A_1>A_2>A_3$

文献[5]定义了直接比较 Z-number 的优势度,计算繁琐,将 ELECTRE 与 QUALIFLEX 结合,比较了 $n!$ 种排列的综合一致性指标,得到最优排列,对 QUALIFLEX 决策方法基于粒度做出改进,大大细化了搜索最优解的粒度空间。文献[16]将 Z-number 转化为梯形模糊数,并使用修正的 TOPSIS 方法决策,文中的准则权重是根据转化后模糊数的不确定程度——模糊度提出的,模糊程度越大,则权重越小,相较于文献[16]中基于所得梯形模糊数的简单平均更为有效。文献[17]用语言尺度函数来定义 Z-number 中的语言变量之间的距离,用拓展的 TODIM 来进行决策。

提出的方法的决策结果与文献[6,16,17]相同,说明了方法的可行性与有效性。QUALIFLEX 作为决策中使用最为广泛的方法之一,通过改进,不仅可以应用在准则数较多的情形,也可以应用于方案数较大的多准则决策之中,在多条优势关系的划分下,不断缩小搜索最优排列的粒度空间。

6　总　结

提出的基于商空间的语言型 Z-number 多准则决策方法有效减少了计算复杂度和计算量,且由上述分析,说明了方法的有效性。QUALIFLEX 方法灵活利用了序数信息,评估所有准则对不同方案的支持程度,是一种灵活、有效的多准则决策方法,但随着方案集的增大,$n!$ 急剧增大,QUALIFLEX 方法也就不再适用,因为要计算 $n!$ 种排列的综合一致性指标,故而可操作性不强。提出的方法对原始信息表进行分析,确定优势关系后,对 $n!$ 种排列进行划分,由保假原理,排除掉包含所有不可能为最优排列的粒度空间,减小了计算复杂度,在尽可能小的粒度空间内搜索多准则决策的最优解,有效减少了计算量,克服了 QUALIFLEX 方法在方案集较大时不可行这一缺点,使得 QUALIFLEX 决策方法可以更为广泛的应用。

参考文献(References):

[1] ZADEH L A. A Note on Z-numbers[J]. Lnf Sci,2011,181(12):2923—2932

[2] KANG B D,WEI Y, LI Y. A Method of Converting Z-number to Classical Fuzzy Number[J]. Inform Computational Science, 2012,9(3):703—709

[3] SONG S Y, ZHOU H, SONG W Y, Sustainable Shelter-site Selection under Uncertainty: A Rough QUALIFLEX Method[J]. Computers & Industrial Engineering,2019,128(9): 371—386

[4] ZHANG X L, XU Z S, Hesitant Fuzzy QUALIFLEX Approach with A Signed Distance-based Comparison Method for Multiple Criteria Decision Analysis [J]. Expert Systems with Applications 2015,42(11):873—884

[5] ALIEVA R A, HUSEYNOV O H, ZEINALOVA L M. The Arithmetic of Continuous Z-numbers[J]. Iinformation Science,2016,373(7):441—460

[6] PENG H G, WANG J Q. Outranking Decision-Making Method with Z-Number Cognitive Information[J]. Cognitive Comption,2018(10):752—768

[7] 张铃,张钹. 问题求解理论及应用:商空间粒度计算理论及应用[M]. 北京:清华大学出版社,2007
ZHANG L, ZHANG B. Quotient Space Based Problem Solving: A Theoretical Foundation and Applications of Granular Computing[M]. BeiJing: Tsinghua University Press,2007(in Chinese)

[8] 高正龙,吴涛,陈小波,等. 图像滤波的商空间粒计算算法[J]. 计算机工程与应用,2013,49(24):182—185
GAO Z L, WU T, CHEN X B, et al. Image Filtering Algorithm Based on Granular Computing Theory of Quotientspace[J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(24): 182—185(in Chinese)

[9] 张振良,张金玲,殷允强,等. 模糊集理论与方法[M]. 武汉:武汉大学出版社,2010
ZHANG Z L, ZHANG J L, YIN Y Q, et al. Fuzzy Set Theory and Method [M]. Wuhan: Wuhan University

Press, 2010(in Chinese)

[10] WANG J C, CEHEN T Y. A Likelihood-based QUALIFLEX Method with Interval Type-2 Fuzzy Sets for Multiple Criteria Decision Analysis[J]. Soft Comput, 2015,19(2):2225—2243

[11] 张城,田晓飞,阚欢迎,等. 面向低碳认证的家电产品碳排放核算方法研究[J]. 合肥工业大学学报,2018,41(9):1158—1165
ZHANG C, TIAN X F, KAN H Y, et al. Study on Carbon Emission Accounting Method of Household Appliances for Low-carbon Certification[J]. Journal of Hefei University of Technology, 2018, 41(9): 1158—1165(in Chinese)

[12] KANG B Y,DENG Y, HEWAGE K,et al. A Method of Measuring Uncertainty for Z-Number[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Syetems,2019,27(4):731—738

[13] DONGGA J Y,CHEN Y,WAN S P, A Cosine Similarity Based QUALIFLEX Approach with Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Financial Performance Evaluation [J]. Applied Soft Computing, 2018,69(10):316—329

[14] RENATO A, KROHLING, ANDRE G C. et al. TODIM and TOPSIS with Z-numbers[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2019, 20(2): 283—291

[15] LI J,WANG J Q. Multi-criteria Outranking Methods with Hesitant Probabilistic Fuzzy Sets[J]. Cogn Comput, 2017(9):611—625

[16] YAAKOB A M, GEGOV A. Interactive TOPSIS Based Group Decision Making Methodology Using Z-numbers [J]. Int Comput Intell Syst, 2016,9(2):311—24

[17] WANG J Q, CAO Y X, ZHANG H Y. Multi-criteria Decision-making Method Based on Distance Measure and Choquet Integral for Linguistic Z-numbers[J]. Cogn Comput, 2017,9(6):827—831

Linguistic Z-number Multiple Criteria Decision-making Method Based on Quotient Space

GUO Hai-yan[1], SU Jing-wen[2], LI Yan-fei[1], WU Tao[1,3]

(1. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China;
2. School of Economics, Anhui University, Hefei 230601, China;
3. Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: In order to solve the problems of high computational complexity and a large amount of computation in Z-number multiple criterion decision-making, a simple and effective multi-criterion decision-making method based on granularity is proposed. The linguistic Z-number decision information is transformed into the classical fuzzy number, and the proposed likelihood degree formula is used to compare the pros and cons of the scheme in pairs, the weight of each criterion is calculated according to the defined fuzzy degree formula, and then the final decision matrix is obtained. Finally, based on the basic theory of quotient space, the QUALIFLEX sorting method is improved, according to the falsity preserving principle and the degree of dominance between schemes, the optimal solution of the problem can be determined in a small granularity space, and the optimal solution with the largest comprehensive consistency is obtained by searching in this smaller granularity space. Finally, the feasibility and validity of the proposed method can be verified by an example, and the computational complexity can be reduced effectively.

Key words: Z-number; multiple criteria decision-making; likelihood degree; quotient space; QUALIFLEX

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:

郭海艳, 苏静文, 李燕飞,等. 基于商空间的语言型 Z-number 多准则决策方法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2021,38(2):122—128

GUO H Y,SU J W,LI Y F, et al. Linguistic Z-number Multiple Criteria Decision-making Method Based on Quotient Space[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2021,38(2):122—128