

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0002.008

具有非单调传染率与连续干扰的 SIQR 模型的稳定性研究*

马艳丽, 聂东明, 于 萍

(安徽新华学院 通识教育部, 合肥 230088)

摘 要:将连续方式的接种、剔除和隔离干扰引入模型,建立了一类具有非单调传染率的 SIQR 传染病模型;首先,通过计算得到了疾病流行的阈值 R_0 及无病平衡点和地方病平衡点存在的条件;其次,当 $R_0 < 1$ 时,采用 Routh-Hurwitz 判据和极限方程理论证明了无病平衡点具有全局渐近稳定性,当 $R_0 > 1$ 时,运用 Liapunov 函数和 LaSalle 不变集原理证明了地方病平衡点 E^* 也具有全局渐近稳定性;接着,为了进一步说明理论研究的正确性,利用 Matlab 软件进行了计算机模拟;最后,借助阈值 R_0 的偏导数,对连续方式的接种、剔除和隔离策略进行了比较和分析。

关键词:基本再生数;平衡点;稳定性;非单调传染率

中图分类号:O175

文献标志码:A

文章编号:1672-058X(2021)02-0048-08

0 引 言

传染病是危害人类身体健康的大敌,传染病的防治一直受到高度重视。世界各国政府和研究机构采取了一系列的预防和控制措施,已取得辉煌的成果。但是,随着经济发展的全球化,生态环境的变化及病原体抗药性的增强,一些已被灭绝或治愈的传染病和一些新出现的传染病呈现出全球化传播和发展的趋势。因此,不管是国内还是国外对传染病进行有效的预防和控制都是刻不容缓的。

在传染病动力学性态的研究中,有一项非常重要且是必不可少的,把它定义为疾病的发生率,其一

般表达式为 $\beta C(N) \frac{S(t)}{N(t)} I(t)$, 其中, $\beta C(N)$ 被称之为有效接触率。在经典的传染病模型中,发生率

$\beta S(t) I(t)$ 和 $\beta \frac{S(t)}{N(t)} I(t)$ 被大量使用,它们分别被称

为双线性发生率和标准发生率^[1-6]。近 20 年来,随着传染病模型的不断深入,又有一些能更好反映疾

病传播特点的发生率被提出,如 $\beta f'(S) I$, $\beta S^q I^q$,

$\frac{\beta SI}{1+\alpha N}$, $\frac{\beta SI^q}{1+\alpha I^q}$, $\frac{bSI}{1+aI^2}$ ^[7] 等,这些发生率的引入使传染

病模型得出了一些新的结果。

此外,为了有效地预防和控制传染病的发生和

发展,通常采取相应的预防和控制策略,并且同样的

收稿日期:2020-04-07;修回日期:2020-05-12.

* 基金项目:安徽省教育厅自然科学重点研究项目(KJ2019A0875, KJ2019A0876);安徽新华学院自然科学重点研究项目(2019ZR005);安徽新华学院自然科学一般研究项目(2019ZR018).

作者简介:马艳丽(1983—),女,安徽宿州人,副教授,硕士,从事传染病动力学研究.

防控策略可以用不同的方式来体现,如有连续接种与脉冲接种、连续剔除与脉冲剔除等^[8]。目前已有大量的文献^[9-13]研究了连续方式的预防和控制策略对传染病流行的影响,但关于不同预防和控制措施的混合且对各种防控措施进行比较的文献还不多见。针对上述情况,本文将连续方式的接种、剔除和隔离干扰引入模型,建立了一类具有非单调传染率的 SIQR 传染病模型,从理论研究和计算机模拟方面分析了无病平衡点和地方病平衡点的存在性以及全局稳定性。

1 模型的假设及建立

将所研究的种群分为 4 类:易感者类 (Susceptible)、染病者类 (Infected)、隔离者类 (Quarantined) 和移出者类 (Recovered)。 $S(t)$ 表示 t 时刻易感者的数; $I(t)$ 表示 t 时刻染病者的数量; $Q(t)$ 表示 t 时刻隔离者的数量; $R(t)$ 表示 t 时刻移出者的数量; A 表示种群的输入常数,并假设新生儿均为易感者; $\frac{bSI}{1+aI^2}$ 为疾病的非单调传染率; d 为种群的正常死亡率; q_1 和 q_2 分别为染病者和隔离者的因病死亡率; p 为对易感群体的接种率; k 为对染病群体的剔除率; γ 为染病者的恢复系数; δ 表示从染病者被隔离的比例,反映了隔离的强度; ε 为隔离者的恢复系数。假设 $A, a, b, d, p_1, p_2, p, k, \delta, \varepsilon$ 和 γ 均为正数。

根据上述假设和说明,可以得到如下 SIQR 仓室结构,如图 1 所示。

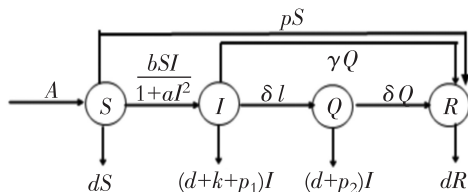


图 1 SIQR 传染病模型框图

Fig. 1 Compartment structure of SIQR epidemic model

得到相应的 SIQR 微分方程模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \frac{bSI}{1+aI^2} - (d+p)S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{bSI}{1+aI^2} - (d+p_1+\gamma+\delta+k)I \\ \frac{dQ}{dt} = \delta I - (\varepsilon+d+p_2)Q \\ \frac{dR}{dt} = pS + \gamma I + \varepsilon Q - dR \end{cases} \quad (1)$$

2 平衡点的存在性分析

对于式(1),令 $d+p_1+\gamma+\delta+k=m, \varepsilon+d+p_2=n$, 则可以得到如下系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \frac{bSI}{1+aI^2} - (d+p)S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{bSI}{1+aI^2} - mI \\ \frac{dQ}{dt} = \delta I - nQ \\ \frac{dR}{dt} = pS + \gamma I + \varepsilon Q - dR \end{cases} \quad (2)$$

对式(2)作尺度变换,先令 $\frac{b}{n}S=x, \frac{b}{n}I=y, \frac{b}{n}Q=\omega, \frac{b}{n}R=z, \frac{\tau}{n}=t$, 然后用 S, I, Q, R, t 替代 x, y, ω, z, τ , 从而得到如下系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A_0 - \frac{SI}{1+\rho I^2} - (d_0+p_0)S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{SI}{1+\rho I^2} - m_0 I \\ \frac{dQ}{dt} = \delta_0 I - Q \\ \frac{dR}{dt} = p_0 S + \gamma_0 I + \varepsilon_0 Q - d_0 R \end{cases} \quad (3)$$

这里, $A_0 = \frac{bA}{n^2}, \rho = \frac{an^2}{b}, d_0 = \frac{d}{n}, p_0 = \frac{p}{n}, m_0 = \frac{m}{n}, \delta_0 = \frac{\delta}{n}, \gamma_0 = \frac{\gamma}{n}, \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{n}$ 。

总人群令为 $N(t), N(t) = S(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ 。由式(3)可得到总人群方程:

$$\frac{dN}{dt} = A_0 - d_0 N - (1-\varepsilon_0-d_0)Q - (m_0-\gamma_0-\delta_0-d_0)$$

$$I = A_0 - d_0 N - \frac{p_2}{n} Q - \frac{p_1}{n} I \leq A_0 - d_0 N$$

从而得到:

$$N(t) \leq N(0) e^{-d_0 t} + \frac{A_0}{d_0} (1 - e^{-d_0 t})$$

进而得到 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} (N(t)) = \frac{A_0}{d_0}$, 因此式(3)的可
行域为闭集:

$$D = \left\{ (S, I, Q, R) \in R_+^4 \mid S + I + Q + R \leq \frac{A_0}{d_0} \right\}$$

且 D 是式(3)的一个最大正向不变集。

令式(3)中各个方程的右端项等于零:

$$\begin{cases} A_0 - \frac{SI}{1+\rho I^2} - (d_0 + p_0)S = 0 \\ \frac{SI}{1+\rho I^2} - m_0 I = 0 \\ \delta_0 I - Q = 0 \\ p_0 S + \gamma_0 I + \varepsilon_0 Q - d_0 R = 0 \end{cases} \quad (4)$$

通过计算得到式(3)的无病平衡点:

$$E_0 \left(\frac{A_0}{d_0 + p_0}, 0, 0, \frac{A_0 p_0}{d_0(d_0 + p_0)} \right) = (S_0, I_0, Q_0, R_0)$$

当 $S = m_0(1 + \rho I^2)$ 时, 得到:

$$m_0(d_0 + p_0)\rho I^2 + m_0 I + m_0(d_0 + p_0) - A_0 = 0 \quad (5)$$

定义疾病流行与否的阈值-基本再生数:

$$R_0 = \frac{bA}{(d+p)(d+p_1+\gamma+\delta+k)} = \frac{bA}{m(d+p)} = \frac{A_0}{m_0(d_0+p_0)}$$

当 $R_0 > 1$ 时, 由式(4)和(5)得到式(3)的唯一
地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, Q^*, R^*)$, 其中:

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{\sqrt{1-4(d_0+p_0)^2(1-R_0)}-1}{2\rho(d_0+p_0)} \\ S^* &= m_0(1+\rho I^{*2}), Q^* = \delta_0 I^* \\ R^* &= \frac{p_0 \rho I^{*2} + (\gamma_0 + \varepsilon_0 \delta_0) p_0 S^* + p_0 m_0}{d_0} \end{aligned}$$

综上所述可以得到如下定理:

定理 1 式(3)总存在无病平衡点 E_0 ; 当 $R_0 > 1$
时, 式(3)还存在唯一的地方病平衡点 E^* 。

3 无病平衡点的稳定性分析

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时, 式(3)的无病平衡点 E_0 是

局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 E_0 是不
稳定的。

证明 当基本再生数 $R_0 < 1$ 时, 在无病平衡点
 E_0 处, 式(3)的雅可比矩阵是

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -d_0 - p_0 & -\frac{A_0}{d_0 + p_0} & 0 & 0 \\ 0 & -m_0(1 - R_0) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_0 & -1 & 0 \\ p_0 & \gamma_0 & \varepsilon_0 & -d_0 \end{pmatrix}$$

矩阵 $J(E_0)$ 的特征方程为

$$(\lambda + d_0 + p_0)(\lambda + m_0(1 - R_0))(\lambda + 1)(\lambda + d_0) = 0$$

可得 4 个特征值分别为

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(d_0 + p_0), \lambda_2 = m_0(R_0 - 1) \\ \lambda_3 &= -1, \lambda_4 = -d_0 \end{aligned}$$

当 $R_0 < 1$ 时, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$, 即矩阵
 $J(E_0)$ 的一切特征值的实部都是负数, 所以, 式(3)
的无病平衡点 E_0 具有局部渐近稳定性; 当 $R_0 > 1$
时, 特征值 $\lambda_2 > 0$, 即矩阵 $J(E_0)$ 至少存在一个特征
值, 它的实部是正数。因此, 无病平衡点 E_0 在闭集
 D 内是不稳定的。

定理 3 当 $R_0 < 1$ 时, 式(3)的无病平衡点 E_0 是
全局渐近稳定的。

证明 根据式(3)的第一个表达式可以得到

$$\frac{dS}{dt} \leq A_0 - (d_0 + p_0)S$$

依据比较原理得到, 存在常数 $T > 0$, 当 $t > T$ 时,

有 $S(t) \leq \frac{A_0}{d_0 + p_0}$, 进而推出:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{SI}{1+\rho I^2} - m_0 I \leq I(S - m_0) = m_0 I_0 (R_0 - 1)$$

当 $R_0 < 1$ 时, 有 $\frac{dI}{dt} = m_0 I_0 (R_0 - 1) \leq 0$, 从而得出

$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ 。当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 式(3)的极限方程为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A_0 - (d_0 + p_0)S \\ \frac{dQ}{dt} = -Q \\ \frac{dR}{dt} = p_0 S + \varepsilon_0 Q - d_0 R \end{cases} \quad (6)$$

解式(6)中的第一个和第二个方程可以得到:

$$S(t) = \frac{A_0}{d_0+p_0} + C_1 e^{-d_0 t}, Q(t) = C_2 e^{-t}$$

从而得到:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) &= \frac{A_0}{d_0+p_0} = S_0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) &= 0 = Q_0 \end{aligned} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)中的第 3 个表达式得到如下结果:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \frac{p_0}{d_0} S_0 = \frac{p_0 A_0}{d_0(d_0+p_0)} = R_0$$

所以,式(6)的平衡点是全局渐近稳定的,再根据极限方程理论可知,当 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ 时,式(3)的任意解 E ,都有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} E = E_0$ 。所以,当 $R_0 < 1$ 时,式(3)的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

4 地方病平衡点的稳定性分析

定理 4 当 $R_0 > 1$ 时,式(3)的地方病平衡点 E^* 局部渐近稳定。

证明 在地方病平衡点 E^* 处,系统式(3)的雅可比矩阵是

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -d_0 - p_0 - \frac{I^*}{1+\rho I^{*2}} & -\frac{m_0(1-\rho I^{*2})}{1+\rho I^{*2}} & 0 & 0 \\ \frac{I^*}{1+\rho I^{*2}} & -\frac{2m_0\rho I^{*2}}{1+\rho I^{*2}} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_0 & -1 & 0 \\ p_0 & \gamma_0 & \varepsilon_0 & -d_0 \end{pmatrix}$$

则矩阵 $J(E^*)$ 的 4 个特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = -1 < 0, \lambda_4 = -d_0 < 0$,其中特征值 λ_1 和 λ_2 也是二阶矩阵

$$J^*(E^*) = \begin{pmatrix} -d_0 - p_0 - \frac{I^*}{1+\rho I^{*2}} & -\frac{m_0(1-\rho I^{*2})}{1+\rho I^{*2}} \\ \frac{I^*}{1+\rho I^{*2}} & -\frac{2m_0\rho I^{*2}}{1+\rho I^{*2}} \end{pmatrix}$$

的特征根,即是方程 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ 的两个根,其中,

$$a_1 = d_0 + p_0 + \frac{I^*}{1+\rho I^{*2}} + \frac{2m_0\rho I^{*2}}{1+\rho I^{*2}}$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} -d_0 - p_0 - \frac{I^*}{1+\rho I^{*2}} & -\frac{m_0(1-\rho I^{*2})}{1+\rho I^{*2}} \\ \frac{I^*}{1+\rho I^{*2}} & -\frac{2m_0\rho I^{*2}}{1+\rho I^{*2}} \end{vmatrix}$$

由 Hurwitz 判据,在方程 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ 时,有

$$H_1 = a_1 = d_0 + p_0 + \frac{I^*}{1+\rho I^{*2}} + \frac{2m_0\rho I^{*2}}{1+\rho I^{*2}} > 0$$

$$H_2 = a_1 a_2 =$$

$$\frac{m_0 I^* (2\rho^2 (d_0 + p_0) I^{*3} + \rho I^{*2} + 2\rho (d_0 + p_0) I^* + 1)}{(1 + \rho I^{*2})^2} > 0$$

即特征值 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ 。又由于特征值 $\lambda_3 = -1 < 0, \lambda_4 = -d_0 < 0$,从而得到矩阵 $J(E^*)$ 的一切特征值的实部都是负的。所以,当 $R_0 > 1$ 时,式(3)的地方病平衡点 E^* 局部渐近稳定。

定理 5 当 $R_0 > 1$ 时,式(3)的地方病平衡点 E^* 全局渐近稳定。

证明 因为式(3)的前两个式子不含有 Q 和 R ,故研究式(3)的子系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A_0 - \frac{SI}{1+\rho I^2} - (d_0 + p_0)S \\ \frac{dI}{dt} = \frac{SI}{1+\rho I^2} - m_0 I \end{cases} \quad (8)$$

对于式(8),构造 Liapunov 函数:

$$V(t) = S^* \int_{S^*}^S \frac{\tau - S^*}{\tau} d\tau + \frac{S^*}{m_0} \int_{I^*}^I \frac{S^* \tau}{1 + \rho \tau^2} + (d_0 + p_0) S^* - A_0 \tau d\tau$$

则 $V(t)$ 是正定函数,因为 $V(t)$ 沿着式(8)的导数有:

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{S^*(S-S^*)(A_0 - \frac{SI}{1+\rho I^2} - (d_0+p_0)S)}{S} + \\ &\frac{S^* I}{m_0} \frac{S^* I + (d_0+p_0)S^* - A_0}{I} - \left(\frac{SI}{1+\rho I^2} - m_0 I \right) = \\ &\frac{S-S^*}{S} (A_0 S^* - \frac{SIS^*}{1+\rho I^2} - (d_0+p_0)SS^*) + \\ &\frac{S^*}{m_0} \left(\frac{S^* I}{1+\rho I^2} + (d_0+p_0)S^* - A_0 \right) \left(\frac{m_0 S}{S^*} - m_0 \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{A_0(S-S^*)^2}{S} \leq 0$$

容易得到,当且仅当 $S=S^*$ 时有 $V'(t)=0$, 从而有 $V'(t)=0$ 的正向最大不变子集是 $\{(S^*, I^*)\}$ 。根据 LaSalle 不变集原理可知 (S^*, I^*) 在 R_+^2 上是全局渐近稳定的, 从而进一步得到: 当 $R_0 > 1$ 时, 式(8)的任意解都接近于 (S^*, I^*) , 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S^*, \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = I^*$$

考虑式(3)的第三个方程, 可以得到其极限方程为

$$Q(t) = [Q_0 + \int_{t_0}^t \delta_0 I(\tau) \exp(\tau - t_0) d\tau] \cdot \exp(\tau - t_0)$$

借助洛必达法则得到:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \delta_0 I(t) = \delta_0 I^* = Q^*$$

同理, 可以计算出:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = \frac{p_0 S^* + \gamma_0 I^* + \varepsilon_0 Q^*}{d_0} = R^*$$

所以, 在区域 D 上, 式(3)的地方病平衡点 E^*

具有全局吸引性, 结合定理 4, 故则当 $R_0 > 1$ 时, 式(3)的地方病平衡点 E^* 是全局渐近稳定的。

5 计算机模拟

在式(3)中, 选取参数 $A_0=0.2, \rho=3, d_0=0.4, p_0=0.2, m_0=0.5, \gamma_0=0.1, \delta_0=0.2, \varepsilon_0=0.4$ 。取 6 组不同的初值分别为 $S(0)=0.15, I(0)=0.03, Q(0)=0.2, R(0)=0.3; S(0)=0.075, I(0)=0.025, Q(0)=0.1, R(0)=0.05; S(0)=0.2, I(0)=0.05, Q(0)=0.03, R(0)=0.1; S(0)=0.25, I(0)=0.05, Q(0)=0.16, R(0)=0.2; S(0)=0.4, I(0)=0.1, Q(0)=0.08, R(0)=0.12; S(0)=0.1, I(0)=0.2, Q(0)=0.05, R(0)=0.15$ 。通过计算可得 $R_0 = 0.6667 < 1$, 无病平衡点 $E_0 = (0.333, 0, 0, 0.167)$, 利用 Matlab 软件对式(3)进行数值模拟可以得到图 2。

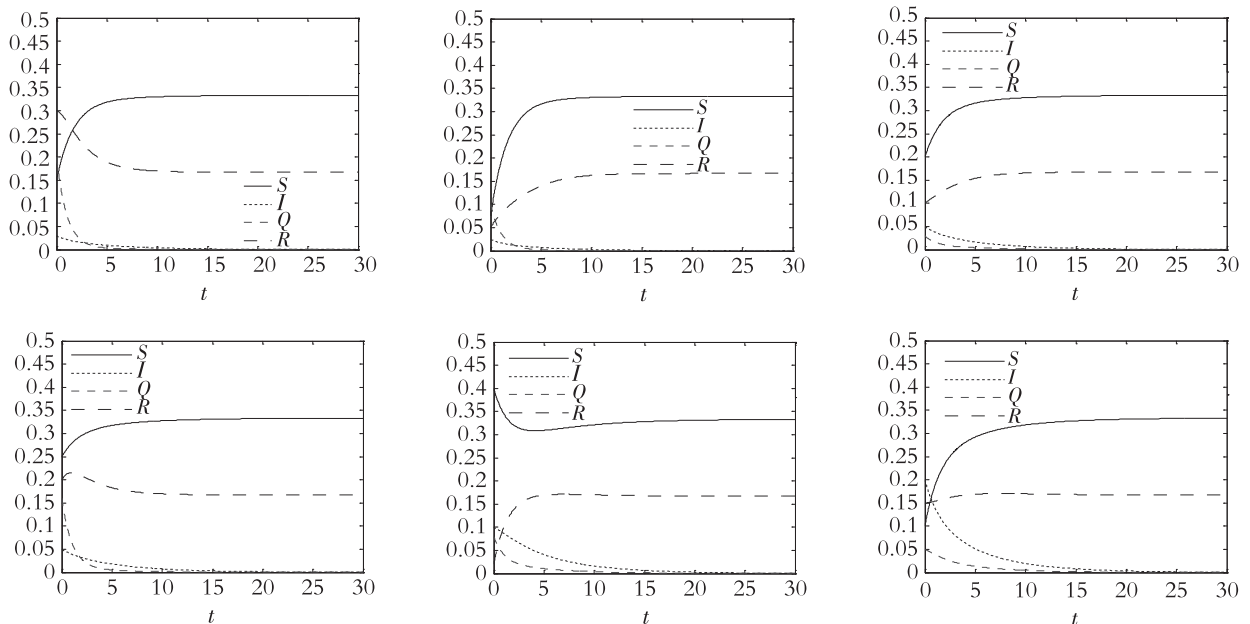


图 2 $R_0=0.6667$ 时, 6 组不同初值时的无病平衡点的全局稳定性示图

Fig. 2 Global stability of the disease-free equilibrium point in six different initial values when $R_0=0.6667$

选取参数 $A_0=4, \rho=0.02, d_0=0.5, p_0=0.2, m_0=0.8, \gamma_0=0.1, \delta_0=0.1, \varepsilon_0=0.25$ 。取 6 组不同的初值分别为 $S(0)=0.6, I(0)=3.4, Q(0)=2.2, R(0)=4.5; S(0)=1.5, I(0)=3, Q(0)=2.4, R(0)=4; S(0)=3.5, I(0)=0.5, Q(0)=1.8, R(0)=2; S(0)=2.5, I(0)=1.6, Q(0)=0.9,$

$R(0) = 3.4; S(0) = 3, I(0) = 1.2, Q(0) = 4, R(0) = (1.065, 4.068, 0.408, 1.446)$, 利用 Matlab 软件对 $2.6; S(0) = 2, I(0) = 2.6, Q(0) = 0.5, R(0) = 1.5$ 。式(3)进行数值模拟可以得到图 3。
通过计算可得 $R_0 = 7.1429 > 1$, 地方病平衡点 $E^* =$

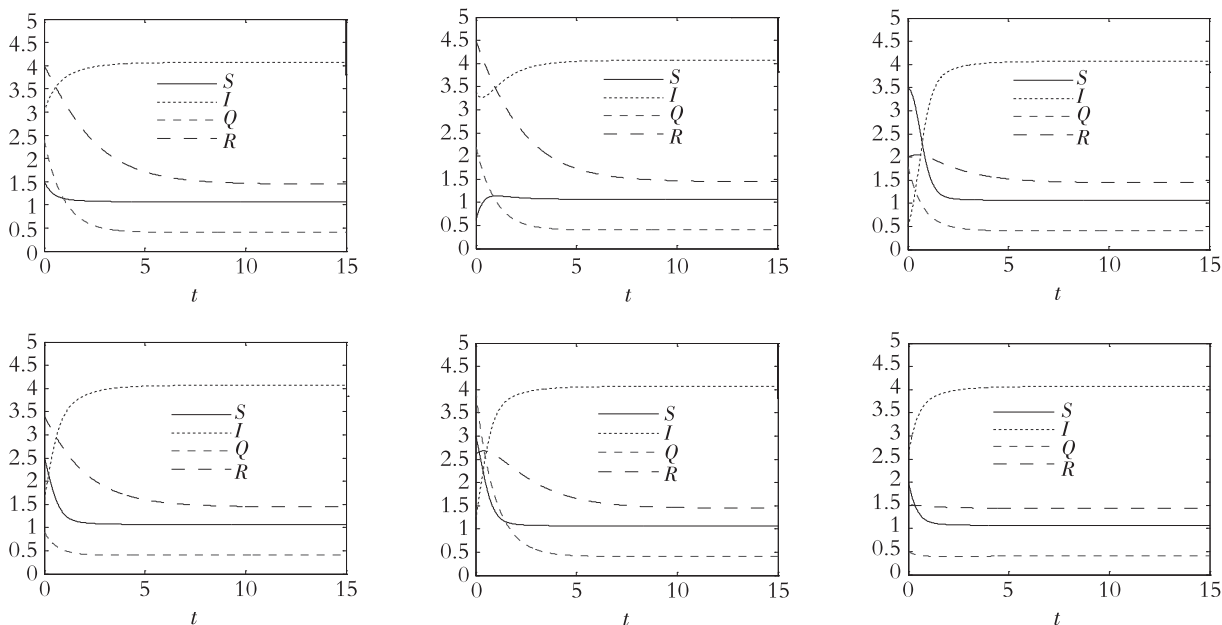


图 3 $R_0 = 7.1429$ 时, 6 组不同初值时地方病平衡点的全局稳定性示图

Fig. 3 Global stability of the disease-free equilibrium point in six different initial values when $R_0 = 7.1429$

由图 2 和图 3 可以看出, 对于选定的初值, 当 $R_0 < 1$ 时, 对于式(3)的解 (S, I, Q, R) 都趋向于无病平衡点 E_0 , 从而证实定理 3 是正确的; 当 $R_0 > 1$ 时, 式(3)的解 (S, I, Q, R) 都稳定于地方病平衡点 E^* , 从而说明定理 5 的准确性。

6 接种、剔除和隔离策略的比较和分析

根据式(1)的基本再生数 $R_0 = \frac{bA}{(d+p)(d+p_1+\gamma+\delta+k)}$, 对 R_0 中的参数 p, δ 及 k 分别求偏导, 得到:

$$\Delta p = -\frac{bA}{(d+p)^2(d+p_1+\gamma+\delta+k)} \quad (9)$$

$$\Delta \delta = -\frac{bA}{(d+p)(d+p_1+\gamma+\delta+k)^2} \quad (10)$$

$$\Delta k = -\frac{bA}{(d+p)(d+p_1+\gamma+\delta+k)^2} \quad (11)$$

由式(9)(10)和(11)可以得到, $\Delta p < 0, \Delta \delta < 0, \Delta k < 0$, 因此, 在对传染病进行预防接种、隔离和剔除

策略后, 都可以减少基本再生数 R_0 , 从而有利于控制传染病的发生和传播。

由式(10)(11)可以得到, $\Delta \delta = \Delta k$, 从而说明代表隔离强度的参数 δ , 与代表剔除强度的参数 k , 对于基本再生数的影响是相同的。在其他情况不变的情况下, 从基本再生数的角度来看, 隔离和剔除策略对于疾病流行性态的影响是相同的。但从实际角度来看, 隔离的种群需要花费很大的治疗成本, 而剔除则花费的成本较小。因此, 对于没有限制的如动物种群, 可以用剔除的方法来消除疾病, 但对某些种群, 剔除策略是不可行的, 而隔离无疑成了替代的方式。

由式(9)(10)可知, $\Delta p \neq \Delta \delta$, 即接种策略对于基本再生数的影响不同于隔离策略。将 Δp 与 $\Delta \delta$ 做比值, 得到:

$$\frac{\Delta p}{\Delta \delta} = \frac{\Delta p}{\Delta k} = \frac{\frac{bA}{(d+p)^2(d+p_1+\gamma+\delta+k)}}{\frac{bA}{(d+p)(d+p_1+\gamma+\delta+k)^2}} = \frac{d+p_1+\gamma+\delta+k}{d+p}$$

在 $p=k$ 的条件下, $\frac{\Delta p}{\Delta k} > 1$, 说明每单位比例的变化率 p 使基本再生数下降的幅度是大于 q 使基本再生数下降的幅度, 从而说明预防接种策略是优于隔离或者剔除策略的。

但是, 从实际的角度出发, 由于易感者 $S(t)$ 的数量通常大于染病者 $I(t)$ 的数量或隔离者 $Q(t)$ 的数量, 增加单位预防接种比例的成本远远高于改善单位隔离成本或剔除成本。因此, 在实施预防和控制传染病的实际策略时应考虑混合策略的情况, 使得成本和效益最佳。

7 结 论

将连续方式的接种、剔除和隔离干扰引入模型, 构建了一类具有非单调传染率的 SIQR 传染病模型。利用定义法给出了模型的基本再生数 R_0 , 通过计算得到了无病平衡点和地方病平衡点的存在性。从理论研究和计算机模拟方面证明了无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性, 并借助基本再生数 R_0 的偏导数, 对连续方式的接种、剔除和隔离策略进行了比较和分析。本文考虑的接种、剔除和隔离策略是连续方式的, 且隔离策略仅仅对染病者实施, 对于其他方式, 如考虑脉冲方式, 或对易感者隔离等问题是今后主要努力研究的方面。

参考文献 (References):

- [1] 徐文雄, 张仲华. 年龄结构 SIR 流行病传播数学模型渐近分析[J]. 西安交通大学学报, 2003, 37(10): 1086—1089
- XU W X, ZHANG Z H. Asymptotic Analysis of Age Structure SIR Epidemic Spread Mathematical Model[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2003, 37(10): 1086—1089 (in Chinese)
- [2] 周美涛. 一类具有双线性发生率和常数治疗函数的 SIRS 传染病模型的动力学行为[J]. 辽宁工业大学学报(自然科学版), 2015, 35(5): 344—350

- ZHOU M T. Dynamic Behavior of a SIRS Epidemic Model with Bilinear Incidence and Constant Treatment Function[J]. Journal of Liaoning University of Technology (Natural Science Edition), 2015, 35(5): 344—350 (in Chinese)
- [3] 马艳丽, 张仲华, 聂东明. 具有连续接种与剔除的 SIQR 流行病模型全局稳定性[J]. 应用数学, 2016, 29(4): 782—787
- MA Y L, ZHANG Z H, NIE D M. Global Stability of SIQR Epidemic Model with Vaccination Elimination Strategy[J]. Applied Mathematics, 2016, 29(4): 782—787 (in Chinese)
- [4] 徐金瑞, 王美娟, 张拥军. 一类具有标准发生率的 SIS 型传染病模型的全局稳定性[J]. 生物数学学报, 2010, 25(2): 249—256
- XU J R, WANG M J, ZHANG Y J. Global Stability of a SIS Epidemic Model with Standard Incidence[J]. Journal of Biomathematics, 2010, 25(2): 249—256 (in Chinese)
- [5] 马艳丽, 张仲华. 潜伏类和移出类具有传染性的 SEIR 模型的渐近分析[J]. 中国科学技术大学学报, 2016, 46(2): 953—103
- MA Y L, ZHANG Z H. Asymptotical Analysis of a SEIR Model with Infectious Force in Latent Period and Immune Period [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016, 46(2): 953—103 (in Chinese)
- [6] LI G H, JIN Z. Global Stability of a SEI Epidemic Model[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 21(1): 925—931
- [7] XIAO D M, RUAN S G. Global Analysis of an Epidemic Model with Nonmonotone Incidence Rate[J]. Mathematical Biosciences, 2007, 208(2): 419—429
- [8] 章培军, 李维德, 朱凌峰. SIRS 传染病模型的连续接种和脉冲接种的比较[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2011, 47(1): 82—86
- ZHANG P J, LI W D, ZHU L F. Comparison of Continuous Vaccination and Pulse Vaccination in SIRS Infectious Disease Model[J]. Journal of Lanzhou University (Natural Science Edition), 2011, 47(1): 82—86 (in Chinese)
- [9] MA Y L, LIU J B, LI H X. Global Dynamics of a SIQR Model with Vaccination and Elimination Hybrid Strategies[J].

- Mathematics, 2018, 6(12):328—339
- [10] 周艳丽,王贺桥. 具有隔离和接种策略的传染病模型稳定性分析[J]. 上海理工大学学报, 2010, 32(3): 249—252
- ZHOU Y L, WANG H Q. Stability Analysis of an Infectious Disease Model with Isolation and Vaccination Strategies [J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2010, 32(3): 249—252 (in Chinese)
- [11] TAN X X, LI S J, DAI Q W, et al. An Epidemic Model with Isolated Intervention Based on Cellular Automata[J]. Advanced Materials Research, 2014, 926(1): 1065—1068
- [12] ECKALBAR J C, ECKALBAR W L. Dynamics of a SIR Model with Vaccination Dependent on Past Prevalence with High-order Distributed Delay[J]. Biosystems, 2015, 129(1):50—65
- [13] LI J Q, YANG Y L. SIR-SVS Epidemic Models with Continuous and Impulsive Vaccination Strategies[J]. Journal of Theoretical Biology, 2011, 280(1):108—116

Stability Research of a SIQR Model with Nonmonotone Infection Rate and Continuous Perturbations

MA Yan-li, NIE Dong-ming, YU Ping

(Department of Common Courses, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China)

Abstract: Continuous vaccination, elimination and quarantine perturbations are introduced, and a SIQR epidemic model with nonmonotone infection rate is established. Firstly, the threshold R_0 which determines whether the disease is extinct or not and the conditions for the existence of equilibriums are obtained by the calculation. Secondly, the globally asymptotical stability of the disease-free equilibrium E_0 is proved when $R_0 < 1$ by means of Routh-Hurwitz criterion and limit equation theory. By Liapunov function and LaSalle invariance principle, the globally asymptotical stability of the unique endemic equilibrium E^* is also proved when $R_0 > 1$. Thirdly, computer simulation is carried out to illustrate the correctness of the theoretical research by Matlab software. Finally, the continuous vaccination, elimination and quarantine strategies are compared and analyzed with the partial derivative of the threshold R_0 .

Key words: basic reproductive number; equilibrium point; stability; nonmonotone infection rate

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

马艳丽, 聂东明, 于萍. 具有非单调传染率与连续干扰的 SIQR 模型的稳定性研究[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2021, 38(2):48—55

MA Y L, NIE D M, YU P. Stability Research of a SIQR Model with Nonmonotone Infection Rate and Continuous Perturbations[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2021, 38(2):48—55