doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0006.013

求解带约束投资组合模型的量子粒子群算法*

何 光, 李高西
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:针对量子粒子群算法(QPSO)在迭代后期出现种群多样性缺失和容易陷入局部最优的问题,提出了一种基于交叉操作的改进算法;在改进算法中,考虑了粒子的历史最优位置和次优位置,用以扩大粒子的搜索范围;同时,将遗传算法的交叉操作运用到位置的更新中,以增加种群的多样性,进而提高算法的收敛性;在性能测试中,将改进算法与原始的量子粒子群算法、基于差分进化的 QPSO 和基于黑洞探索的 QPSO 在收敛精度和鲁棒性方面进行了比较;最后,运用改进算法对一类具有投资数量限制的投资组合问题进行了求解,并与遗传算法、粒子群算法和标准的量子粒子群算法的寻优结果进行了对比。

关键词:量子粒子群优化算法;交叉操作;多样性;投资组合

中图分类号:TP301.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2020)06-0083-05

0 引 言

Clerc[1] 在分析粒子群优化(Particle Swarm Optimization,PSO)算法时提出粒子运动场中存在着吸引点,而粒子在迭代过程中会聚集到该点。随后 Sun 等[2] 在 Clerc 的研究基础上,从量子力学的角度提出了量子粒子群优化(Quantum-behaved Particle Swarm Optimization,QPSO)算法。由于粒子在量子空间中没有特定的轨道,具有更高的随机性,因而其智能性相比标准的 PSO 算法要高,收敛性能更好。尽管 QPSO 算法在一定程度上提升了算法的性能,但是在实际计算时,粒子的搜索只是在可行解的空间进行,使得在算法迭代的后期依旧会出现群体的多样性缺失等现象,因此算法仍有很大的改进空间。

针对 QPSO 算法的不足,先后有学者提出了各种搜索策略和改进方法,以增加粒子的探索能力,避免算法陷入局部最优的困境。Mohadeseh 等[3] 提出了基于广义局部搜索的 QPSO 算法,以增强粒子脱离局部最优的能力。赵吉和程成[4] 在演化搜索的基础上改善了 QPSO 算法,提升了算法的收敛速度。章国勇等[5] 在算法中考虑了精英学习策略,增强了粒子的全局搜索能力。周頔等[6] 提出了协同 QPSO 算法,避免了算法的早熟。张兰[7-8] 分别融合了差分进化和黑洞搜索的优点,提出了改进的 QPSO 算法,拓展了粒子的空间探索范围。在算法的参数修正和丰富种群多样性方面,也有一些学者提出了不错的改良性结果[9-14]。在已有研究的基础上,准备从两个方面对 QPSO 算法进行改进:第一,在粒子的历史位置更新公式中,将粒子的历史最优和次优位置综合考虑,以扩大粒子的搜索范围,增

收稿日期:2019-12-23;**修回日期**:2020-02-20.
* **基金项目**:国家自然科学基金(11901068);重庆市基础与前沿研究计划项目(CSTC2016JCYJA0564);重庆工商大学博士科研启动项目(2015-56-08);重庆工商大学青年项目(1552004).
作者简介:何光(1981-),男,重庆人,博士,副教授,从事金融建模及优化算法研究.

加粒子的探索能力;第二,借助遗传算法的交叉操作,提高种群的多样性,避免算法进入早熟。然后,将改进后的 QPSO 算法应用到证券投资组合问题中。

1 改进的 QPSO 算法

标准的 QPSO 算法是在 PSO 算法的基础上进化而来,借助了 PSO 算法的粒子速度公式:

$$v_i(t+1)=wv_i(t)+c_1r_1(p_i(t)-x_i(t))+c_2r_2(p_g(t)-x_i(t)) \tag{1}$$

其中,$x_i(t)$ 和 $v_i(t)$ 分别表示第 i 个粒子的位置以及速度,第 i 个粒子的个体极值以及全局极值分别为 $p_i(t)$ 和 $p_g(t)$。w 表示惯性权重,c_1 和 c_2 表示加速因子,r_1 和 r_2 表示 0 到 1 之间均匀分布的随机数。在 QPSO 算法的更新公式中,没有粒子的速度公式,而采用蒙特卡罗法模拟粒子的运动状态,进行迭代。在迭代过程中,每个粒子会聚集到一个局部吸引点 $P_i(t)$,从而式(1)将转化为吸引点的位置公式:

$$P_i(t+1)=\varphi p_i(t)+(1-\varphi)p_g(t) \tag{2}$$

其中,$\varphi=c_1r_1/(c_1r_1+c_2r_2)$。粒子的位置更新公式如下:

$$x_i(t+1)=P_i(t)\pm\beta\,|m_i(t)-x_i(t)|\,|\ln[u_i(t)]^{-1} \tag{3}$$

其中,β 称为收缩-扩张系数,用来调节粒子的速度。$m_i(t)$ 表示粒子历史最优位置的平均值,称为平均最好位置。$u_i(t)$ 表示 0~1 之间均匀分布的随机数,当 $u_i(t)$ 大于 0.5 时,式(3)中取“+”,否则取“-”。

在更新粒子个体最优位置时,除了考虑它的历史最好位置外,还将粒子的历史次优位置也包括进去,这样能够增强粒子的搜索范围,避免陷入局部最优。另外,借鉴遗传算法的交叉操作,对粒子的历史最优和次优位置进行交叉处理,用新的位置作为粒子当前的最优位置,用于迭代后期增强种群的多样性,提高算法的收敛精度。

由于算法中选用了交叉操作,将改进的算法记为 CR-QPSO。CR-QPSO 算法中,粒子的历史最优位置和次优位置分别为 $p_{1i}(t)$ 和 $p_{2i}(t)$,经过交叉操作后得到的新位置仍记为 $p_i(t)$。收缩-扩张系数选择文献[13]的线性递减方法,如下:

$$\beta=(\beta_1-\beta_2)\frac{T-t}{T}+\beta_2$$

其中,β_1,β_2 为 β 的最小值和最大值,T 为最大迭代次数。CR-QPSO 算法的流程如下:

Step 1 设定搜索维数 D、种群规模 N 和最大迭代次数 T,初始化种群中粒子的位置;

Step 2 计算每个粒子的适应度,以适应度最优的粒子位置作为种群的全局最优位置 $p_g(t)$;

Step 3 根据式(2)计算局部吸引点 $P_i(t)$;

Step 4 根据式(3)更新当前粒子的位置;

Step 5 通过粒子适应度的比较,确定当前粒子的历史最优位置 $p_{1i}(t)$ 和次优位置 $p_{2i}(t)$,运用交叉操作,得到粒子的个体最优位置 $p_i(t)$;

Step 6 当粒子适应度优于种群最优点的适应度时,则用当前粒子的位置更新 $p_g(t)$;

Step 7 $t=t+1$,若满足迭代终止条件,输出最优解,否则,转入 Step 2。

2 性能测试

在性能测试中,将 CR-QPSO 算法与标准的 QPOS 算法、DE-QPSO 算法[7]和 BH-QPSO 算法[8]进行比较。基准测试函数的计算结果来源于文献[8],其中 f_1 为高维单模函数,f_2-f_5 为高维多模函数,f_6 为低维多模函数。

在所有的 QPSO 算法中,加速因子分别取 1.5 和 2,粒子总数为 10 个,搜索空间为 20 维,最大迭代次数为 1 000 次。在 DE-QPSO 算法中变异概率为 0.5,交叉参数为 0.9;在 BH-QPSO 算法中,黑洞理论阈值为 0.8,黑洞半径为 0.8;每个实例取 50 次结果的平均值和标准差。

在表 1 中,展示了 4 种算法在不同测试函数下的计算结果。在 Sphere 函数和 Griewank 函数的测试中,BH-QPSO 算法和 DE-QPSO 算法取得了较好的寻优结果,相比而言 CR-QPSO 算法在最优解均值和解的稳定性方面则具有更好的表现,能够有效地跳出局部最优,探索到函数的全局最优点。对于 Rosenbrock 函数而言,BH-QPSO 算法在函数均值方

面取得了最佳的表现,然而稳定性不够理想;QPSO 算法和 DE-QPSO 算法在求解过程中明显偏离了有效的寻优路径,寻优结果较差;CR-QPSO 算法的综合效果较好,最优解的均值不如 BH-QPSO 算法,但是解的稳定性方面有更好的表现。就 Rastrigin 函数而言,4 种算法都无一例外地陷入了局部最优的困境。其中 BH-QPSO 算法和 DE-QPSO 算法的改进效果不如原始的 QPSO 算法,寻优能力较弱;相比之下 CR-QPSO 算法具有较好的探索能力,经过变异操作之后的粒子能够比较有效地接近函数的全局最优点。在其余两个函数的测试中,CR-QPSO 算法相比其他 3 种算法表现更突出,无论在函数的最优值还是鲁棒性上都取得了最理想的结果。

表 1　4 种算法的测试结果

Table 1　Test results of four algorithms

测试函数	算　法	均　值	方　差
f_1-Sphere	QPSO	0.234 5	3.245 0e-03
	BH-QPSO	0.003 0	4.039 5e-04
	DE-QPSO	0.248 6	1.267 6e-21
	CR-QPSO	1.756 9e-20	6.001 1e-40
f_2-Rosenbrock	QPSO	80.614 6	15.887 6
	BH-QPSO	0.1113	2.025 4e+02
	DE-QPSO	7.983 9e+03	274.226 1
	CR-QPSO	5.088 2	1.299 5
f_3-Rastrigin	QPSO	13.410 8	65.154 0
	BH-QPSO	23.527 6	26.299 9
	DE-QPSO	1.314 2e+02	2.742 2e+02
	CR-QPSO	2.984 9	1.451 9
f_4-Griewank	QPSO	1.056 2	0.015 4
	BH-QPSO	0.334 4	0.075 3
	DE-QPSO	0.546 6	7.412 7e-04
	CR-QPSO	3.921 5e-05	2.460 5e-08
f_5-Ackley	QPSO	0.574 3	0.874 5
	BH-QPSO	0.768 2	1.118 0
	DE-QPSO	0.005 4	0
	CR-QPSO	1.656 5e-11	9.534 9e-22
f_6-Schaffer	QPSO	0.112 4	5.124 2e-05
	BH-QPSO	0.026 2	4.039 5e-04
	DE-QPSO	0.037 2	1.540 8e-33
	CR-QPSO	0	0

总之,通过测试函数的检验结果,CR-QPSO 算法在其中 5 个函数的测试中均表现出最佳的寻优能力,取得的最优解拥有更好的鲁棒性。

3　应用实例

经典的 Markowitz 均值-方差模型为一类多目标优化问题,其有效前沿即多目标优化问题的 Pareto 最优解。这里将多目标优化问题转换为单目标优化问题,并用改进的量子粒子群算法进行求解。在证券交易中,投资者和管理机构往往基于各种考虑会对证券的交易数量作出限制,于是这里讨论一类投资占比有上限的投资组合问题。具体模型如下:

$$\begin{aligned} &\min\ \sigma_p^2 = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \sum \boldsymbol{X} \\ &\mathrm{s.t.}\ \ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = e_i \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,0 \leqslant x_i \leqslant 0.5 \end{aligned} \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{R}$ 为资产的收益矩阵,$\boldsymbol{X}$ 为投资组合的权重向量,$\sum$ 表示各种资产间的协方差矩阵,e_i 表示资产的预期收益率,设定所有股票的投资比不能超过总资金的 50%。

数值实验中,从深圳证券交易所选取了 A 股市场中的 20 只股票,收集了这些股票从 2017 年 9 月 18 日到 2018 年 9 月 20 日共计 250 个交易日的收盘价格。每只股票以日收益率的历史平均值作为其预期收益率。在改进的量子粒子群优化算法 CR-QPSO 中,加速因子分别取 1.5 和 2,粒子总数为 40 个,搜索空间为 20 维,最大迭代次数为 1 500 次,求解结果取 50 次实验的平均值。

表 2 给出了在不同预期收益率下的模型。式(1)的最优解,通过给定的 e_i(在最小与最大预期收益率之间均匀选取,由小到大逐渐增加)可以计算出相应风险最小的组合。从表 2 中数据可知,随着预期收益率的增大,投资组合的风险也在逐步变大。当收益率从 0.081 2 增加到 0.193 9 时,第 1、第 11、第 17 和第 19 这 4 只股票的投资占比逐渐减小;同时第 4 和第 9 这两只股票的比例分别从 2.01% 和 5.66% 增加到 3.98% 和 19.87%。

表 2　不同预期收益率下的最优投资组合

Table 2　Optimal portfolios under different expected rate of return

e_i	0.081 2	0.118 8	0.156 3	0.193 9
x_1	7.01%	5.05%	4.28%	3.74%
x_2	5.15%	3.78%	2.05%	2.49%
x_3	4.07%	3.02%	4.13%	1.53%
x_4	2.01%	2.86%	3.50%	3.98%
x_5	3.01%	2.75%	2.83%	3.67%
x_6	7.34%	5.38%	5.78%	6.58%
x_7	3.55%	4.50%	3.36%	3.56%
x_8	3.91%	1.80%	2.45%	1.83%
x_9	5.66%	12.36%	15.02%	19.87%
x_{10}	4.89%	2.90%	2.79%	2.86%
x_{11}	7.01%	5.68%	5.17%	3.88%
x_{12}	2.42%	4.78%	3.55%	3.58%
x_{13}	3.41%	4.01%	4.04%	3.91%
x_{14}	4.05%	3.88%	3.47%	4.02%
x_{15}	4.71%	6.79%	8.04%	6.20%
x_{16}	4.22%	6.93%	4.83%	3.85%
x_{17}	7.63%	7.26%	6.51%	5.94%
x_{18}	7.31%	5.08%	7.57%	6.78%
x_{19}	7.23%	6.31%	5.59%	5.13%
x_{20}	5.41%	4.88%	5.04%	6.60%
风险	0.019 8	0.024 5	0.028 6	0.032 3

进一步,为了说明改进算法求解模型(1)的有效性,接下来将 CR-QPSO 与 PSO、QPSO 和 GA 等算法从最差值、最好值、均值和方差等 4 个方面进行比较。在对比实验中,选取预期收益率为 0.193 9,具体结果见表 3。

表 3　不同算法的优化结果比较

Table 3　Comparison of optimization results of different algorithms

算　法	最差值	最好值	均　值	方　差
GA	0.091 5	0.002 5	0.042 1	2.113 1e-04
PSO	0.104 5	0.019 7	0.038 8	9.610 1e-04
QPSO	0.094 6	0.009 8	0.033 0	1.926 3e-04
CR-QPSO	0.090 7	0.019 8	0.032 3	1.295 5e-04

由表 3 可知:改进算法在 4 个指标下均取得了比其余 3 种算法更好的结果,表明 CR-QPSO 算法具有更强的寻优能力,获得的最优解更精确、更稳定。

4　结束语

为了提高量子粒子群算法(QPSO)的粒子探索能力和算法的计算精度,在原始的 QPSO 算法的基础上,对粒子的位置公式进行了改良处理。在改进算法中,一方面考虑了粒子的历史最优和次优位置的共同影响,用以拓展粒子的搜索范围;另一方面,采用了遗传算法中的交叉操作,用以增加粒子的多样性。通过与几种已有算法的对比,改进的量子粒子群算法(CR-QPSO)表现出更好的收敛性和鲁棒性。随后,将 CR-QPSO 算法应用于寻找 Markowitz 均值-方差模型的资产最优组合。借助证券市场中股票的历史数据,对一类具有投资数量限制的投资组合模型进行了求解,计算结果表明改进算法具有更好的性能。

参考文献(References):

[1] CLERC M. The Swarm and Queen: Towards a Deterministic and Adaptive Particle Swarm Optimization[C]//IEEE Conf Evolutionary Computation, Washington, USA, IEEE Conference Publications,1999:1951—1957

[2] SUN J, FENG B, XU W B. Particle Swarm Optimization with Particles Having Quantum Behavior[C]//Congress on Evolutionary Computation, Oregon, Portland, IEEE Conference Publications, 2004: 325—331

[3] MOHADESEH S, HOSSEIN N, MALIHE M A. Quantum Behaved Gravitational Search Algorithm[J]. Intelligent Information Management, 2012(4): 390—395

[4] 赵吉, 程成. 基于演化搜索信息的量子行为粒子群优化算法[J]. 计算机工程与应用, 2017, 53(9): 41—46,126
ZHAO J, CHENG C. Improved QPSO Algorithm Based on Search History[J]. Computer Engineering and Applications, 2017,53(9):41—46,126(in Chinese)

[5] 章国勇, 伍永刚, 顾巍. 基于精英学习的量子行为粒子群算法[J]. 控制与决策, 2013, 28(9): 1341—1348
ZHANG G Y, WU Y G, GU W. Quantum-behaved Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Elitist Learning[J]. Control and Decision, 2013, 28(9): 1341—1348(in Chinese)

[6] 周頔, 孙俊, 须文波. 具有量子行为的协同粒子群优化算法[J]. 控制与决策, 2011, 26(4): 582—586
ZHOU D, SUN J, XU W B. Quantum-behaved Particle Swarm Optimization Algorithm with Cooperative Approach[J]. Control and Decision, 2011, 26(4): 582—586(in Chinese)

[7] 张兰,聂玉峰. 一种融合差分进化的量子粒子群优化算法[J]. 计算机仿真, 2016, 33(2):313—316
ZHANG L, NIE Y F. Quantum Behaved Particle Swarm

Optimization Algorithm Merging Differential Evolution [J]. Computer Simulation, 2016, 33(2):313—316(in Chinese)

[8] 张兰. 单目标和多目标量子粒子群优化算法的研究及应用[D]. 西安:西北工业大学,2019
ZHANG L. Research on Quantum Behaved Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Applications for Single-objective and Multi-objective Optimization Problems[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2019 (in Chinese)

[9] TIAN N, LAI C, PERICLEOUS K. Contraction-Expansion Coefficient Learning in Quantum Behaved Particle Swarm Optimization[C]//The 10th International Sym Distributed Computing and Applications to Business, Engineering and Science, Wuxi, China: IEEE Conference Publications, 2011: 303—308

[10] SUN J, XU W B, FENG B. Adaptive Parameter Control for Quantum-behaved Particle Swarm Optimization on Individual Level[C]//International Conference on Systems, Man and Cybernetics. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Waikoloa, USA: IEEE Conference Publications, 2005: 3049—3054

[11] COELHO L S. Novel Gaussian Quantum Behaved Particle Swarm Optimizer Applied to Electromagnetic Design[J]. Science Measurement & Technology, 2007, 11(5): 290—294

[12] COELHO L S, NEDJAH N, MOURELLE L M. Gaussian Quantum-behaved Particle Swarm Optimization Applied to Fuzzy PID Controller Design[J]. Quantum Inspired Intelligent Systems, 2008,121(7):1—15

[13] SUN J, XU W B, LIU J. Parameter Selection Quantum Behaved Particle Swarm Optimization[C]//The 1st International Conference on Natural Computation, San Diego, USA: Springer Berlin Heidelberg, 2005: 543—552

Quantum Behaved Particle Swarm Optimization Algorithm for Solving Portfolio Model with Constraints

HE Guang, LI Gao-xi

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing, 400067, China)

Abstract: According to the shortcomings of quantum behaved particle swarm optimization algorithm (QPSO), for instance, the lack of population diversity and getting trapped in local optima easily during the later stage of iteration, an improved algorithm based on cross operation is proposed. In the improved algorithm, particle's history best position and suboptimal position are considered to expand its search space. Moreover, cross operation in genetic algorithm is used to renew particle's position for enhancing population diversity and algorithm's convergence. Through performance test, the improved algorithm is compared with the original quantum behaved particle swarm optimization algorithm, QPSO with differential evolution and QPSO based on black hole exploration in convergence accuracy and robustness. Finally, the improved algorithm is used to solve a kind of portfolio problems with quantity constraints, and the related optimization results are compared with genetic algorithm, particle swarm optimization algorithm and the standard quantum behaved particle swarm optimization algorithm.

Key words: quantum-behaved particle swarm optimization algorithm; cross operation; diversity; portfolio

责任编辑:罗姗姗

引用本文/Cite this paper:
何光, 李高西. 求解带约束投资组合模型的量子粒子群算法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(6):83—87
HE G, LI G X. Quantum Behaved Particle Swarm Optimization Algorithm for Solving Portfolio Model with Constraints[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(6):83—87