doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0006.011

综合区间数 Spearman 秩相关系数及其应用*

连 强

(郑州市财贸学校 会计系,郑州 450015)

摘 要:针对属性值为区间数,属性权重完全未知的区间多属性决策问题,提出了一种综合考虑方案与正理想、负理想方案之间的 Spearman 秩相关系数的决策方法。分析了相关文献中仅考虑方案到正理想方案的 Spearman 秩相关系数的局限性,在逼近理想点方法(TOPSIS)的启发下,定义了方案与负理想方案的 Spearman 秩相关系数;然后,在方案与正负理想方案 Spearman 秩相关系数的基础上,定义了方案的综合 Spearman 秩相关系数,并证明了其相关性质;最后,提出了基于综合区间数 Spearman 秩相关系数的多属性决策方法,并通过一个高校二级院系财务管理评价的实例,验证了所提出方法的是可行和有效的。

关键词:区间数;Spearman 秩相关系数;理想方案;决策

中图分类号:C934 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2020)06-0071-05

0 引 言

相关性[1]作为概率论和数理统计中的一个重要概念,其在经济管理、工程科学等领域发挥着非常重要的作用。随着研究的不断深入,研究对象呈现出越来越复杂的态势,其不确定性和模糊性也日益增强。为此,许多学者尝试将统计学中的相关性推广到不确定性领域,并取得了一些研究成果。比如,文献[2-5]将相关性推广到了模糊集[6],建立了模糊集的相关系数,为研究模糊决策提供了非常具有建设性的参考。再如,一些学者研究了直觉模糊集[7]的相关性,建立不同的直觉模糊集的相关系数[8-12]。事实上,这些相关系数大致可以分为两类,一类取值范围为[0,1],仅能反映出研究对象之间的相关强度,不能反映出相关的正负性;另一类取值范围为[-1,1],不仅能反映出研究对象的相关强度,而且还能反映出它们之间是正相关还是负相关,此类相关系数与统计学中的相关系数非常类似。

Spearman 秩相关是统计学中常用的一种相关性[13],其通过两组观测值的秩差来定义它们的相关性,为人们研究相关性提供了一种可行的方法。2010 年,Szmidt 等[14]将 Spearman 秩相关推广到了直觉模糊集,定义了直觉模糊 Spearman 秩相关系数,为人们研究模糊领域的 Spearman 秩相关系数提供了一个很有意义的参考。最近,苏丽敏等[15]将 Spearman 秩相关应用到区间数决策中,定义了方案与正理想方案之间的 Spearman 秩相关系数,并根据 Spearman 秩相关系数的大小实现方案的排序择优。但是,该方法也具有一定的局限性,即仅考虑到每个方案与正理想方案的 Spearman 秩相关性,而没有考虑到每个方案与负理想方案的 Spearman 秩相关性。为了消除这种局限性,提出了一种综合考虑方案与正负理想方案之间的 Spearman 秩相关系数的决策方法,即在 TOPSIS 方法[16]的启发下,首先,定义了方案与负理想方案的 Spearman 秩相关系数;然后,在方案与正负理想方案 Spearman 秩相关系数的基础上,定义了方案的综合 Spearman 秩相关系数,并证明了其相关性质;最后,提出了基于综合 Spearman 秩相关系数的区间数多属性决策方法,并通过一个实例说明了所提出方法的可行性。

收稿日期:2020-02-09;**修回日期**:2020-04-06.

* **基金项目**:河南省高等学校重点科研项目(18A110032).

作者简介:连强(1983—),男,河南郑州人,讲师,从事会计学、决策理论研究.

1 相关概念

下面回顾相关的一些概念,为研究工作做好铺垫。

定义 1[1] 设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$分别为来自总体 X,Y 的样本,令 $R(x_j)$,$R(y_j)$分别表示 x_j,y_j 在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$中的秩,则 X 与 Y 的 Spearman 秩相关系数定义为

$$r(X,Y)=1-\frac{6\sum_{j=1}^{n}d_j^2}{n(n^2-1)}$$

其中 $d_j=R(x_j)-R(y_j)$,$j=1,2,\cdots,n$。

定理 1[1] 设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$分别为来自总体 X,Y 的样本,则 X 与 Y 的 Spearman 秩相关系数 $r(X,Y)$具有以下性质:

(1) $r(X,Y)=r(Y,X)$。

(2) 若 $X=Y$,$r(X,Y)=1$。

(3) $|r(X,Y)|\leqslant 1$。

定义 2[15] 设 $A=([x_1^L,x_1^U],[x_2^L,x_2^U],\cdots,[x_n^L,x_n^U])$和 $B=([y_1^L,y_1^U],[y_2^L,y_2^U],\cdots,[y_n^L,y_n^U])$分别为来自总体 X 的两组区间数样本,则 A 与 B 的 Spearman 秩相关系数定义为

$$r_s(A,B)=\frac{1}{2}(r_{s1}+r_{s2})$$

其中:

$$r_{sk}=1-\frac{6\sum_{j=1}^{n}d_{kj}^2}{n(n^2-1)},k=1,2$$

$$d_{1j}=R(x_j^L)-R(y_j^L),d_{2j}=R(x_j^U)-R(y_j^U)$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

定理 2[15] 设 $A=([x_1^L,x_1^U],[x_2^L,x_2^U],\cdots,[x_n^L,x_n^U])$和 $B=([y_1^L,y_1^U],[y_2^L,y_2^U],\cdots,[y_n^L,y_n^U])$分别为来自总体 X 的两组区间数样本,则 A 与 B 的 Spearman 秩相关系数 $r_s(A,B)$具有以下性质:

(1) $r_s(A,B)=r_s(B,A)$。

(2) 若 $A=B$,$r_s(A,B)=1$。

(3) $|r_s(A,B)|\leqslant 1$。

2 基于正负理想方案的区间数 Spearman 秩相关系数

设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$为方案集,属性集为 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$。决策者给出方案 A_i 在属性 c_j 下的属性值为 x_{ij},其中 $x_{ij}=[x_{ij}^L,x_{ij}^U]$为区间数,$i=1,2,\cdots,m$,$j=1,2,\cdots,n$,于是形成了一个区间数决策矩阵 $\boldsymbol{M}=(x_{ij})_{m\times n}$。

定义 3[15] 称 $A^+=\{[x_1^{L+},x_1^{U+}],[x_2^{L+},x_2^{U+}],\cdots,[x_n^{L+},x_n^{U+}]\}$为正理想方案,其中 $x_j^{L+}=\max_i\{x_{ij}^L\}$,$x_j^{U+}=\max_i\{x_{ij}^U\}$,$j=1,2,\cdots,n$。

苏丽萍等求出了每个方案 A_i 与正理想方案 A^+ 的 Spearman 秩相关系数 $r(A_i,A^+)$,然后按照 $r(A_i,A^+)$的大小对方案排序择优。

定理 3[15] 设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$为方案集,其中 $A_i=([x_{i1}^L,x_{i1}^U],[x_{i2}^L,x_{i2}^U],\cdots,[x_{in}^L,x_{in}^U])$ $(i=1,2,\cdots,m)$,$A^+=\{[x_1^{L+},x_1^{U+}],[x_2^{L+},x_2^{U+}],\cdots,[x_n^{L+},x_n^{U+}]\}$为正理想方案,则 A_i 与 A^+的 Spearman 秩相关系数为

$$r_s(A_i,A^+)=\frac{1}{2}(r_{s1}^++r_{s2}^+)$$

其中

$$r_{sk}^+=1-\frac{6\sum_{j=1}^{n}(d_{kj}^+)^2}{n(n^2-1)},k=1,2$$

$$d_{1j}^+=R(x_{ij}^L)-R(x_j^{L+});d_{2j}^+=R(x_{ij}^U)-R(x_j^{U+})$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

显然,方案 A_i 与正理想方案 A^+的 Spearman 秩相关系数越大,表明方案 A_i 越优。这与 TOPSIS 方法中,方案 A_i 与正理想方案 A^+的距离越近,其排序越优极为相似。但是,在 TOPSIS 方法中,不仅考虑到了每个方案与正理想方案 A^+的距离,同时也考虑到了每个方案与正理想方案的距离,即 TOPSIS 方法综合考虑了每个方案与正负理想方案的距离,也即要求不仅每个方案与正理想方案的距离越近越优,而且同时要求每个方案与负理想方案的距离越远越优。

在 TOPSIS 方法的启发下,下面给出每个方案与负理想方案的 Spearman 秩相关系数,然后,定义每个方案与正负理想方案的综合 Spearman 秩相关系数。

定义 4 称 $A^-=\{[x_1^{L-},x_1^{U-}],[x_2^{L-},x_2^{U-}],\cdots,[x_n^{L-},x_n^{U-}]\}$为负理想方案,其中 $x_j^{L-}=\min_i\{x_{ij}^L\}$,$x_j^{U-}=\min_i\{x_{ij}^U\}$,$j=1,2,\cdots,n$。

定理 4 设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$为方案集,其中 $A_i=([x_{i1}^L,x_{i1}^U],[x_{i2}^L,x_{i2}^U],\cdots,[x_{in}^L,x_{in}^U])$ $(i=1,2,\cdots,m)$,$A^-=\{[x_1^{L-},x_1^{U-}],[x_2^{L-},x_2^{U-}],\cdots,[x_n^{L-},x_n^{U-}]\}$为负理想方案,则 A_i 与 A^-的 Spearman 秩相关系数为

$$r_s(A_i,A^-)=\frac{1}{2}(r_{s1}^-+r_{s2}^-)$$

其中:

$$r_{sk}^-=1-\frac{6\sum_{j=1}^{n}(d_{kj}^-)^2}{n(n^2-1)},k=1,2$$

$$d_{1j}^-=R(x_{ij}^L)-R(x_j^{L-}),d_{2j}^-=R(x_{ij}^U)-R(x_j^{U-})$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

定义 5　称

$$r_s(A_i,A^\pm)=\frac{r_s(A_i,A^+)-r_s(A_i,A^-)}{2}$$

为方案 A_i 的综合区间数 Spearman 秩相关系数,其中 $r_s(A_i,A^+)$ 为方案 A_i 与正理想方案 A^+ 的 Spearman 秩相关系数,$r_s(A_i,A^-)$ 为方案 A_i 与负理想方案 A^- 的 Spearman 秩相关系数。

综合区间数 Spearman 秩相关系数具有以下性质:

定理 5

(1) $r_s(A_i,A^\pm)\in[-1,1]$。

(2) 若 $A_i=A_k$,即 $[x_{ij}^L,x_{ij}^U]=[x_{kj}^L,x_{kj}^U]$ $(j=1,2,\cdots,n)$,则 $r_s(A_i,A^\pm)=r_s(A_k,A^\pm)$。

证明

(1) 由于 $r_s(A_i,A^+)\in[-1,1]$,$r_s(A_i,A^-)\in[-1,1]$,故而

$$r_s(A_i,A^\pm)=\frac{r_s(A_i,A^+)-r_s(A_i,A^-)}{2}\in[-1,1]$$

(2) 由于 $A_i=A_k$,即 $[x_{ij}^L,x_{ij}^U]=[x_{kj}^L,x_{kj}^U]$ $(j=1,2,\cdots,n)$,故 $r_s(A_i,A^+)=r_s(A_k,A^+)$,$r_s(A_i,A^-)=r_s(A_k,A^-)$,从而有

$$r_s(A_i,A^\pm)=\frac{r_s(A_i,A^+)-r_s(A_i,A^-)}{2}=\frac{r_s(A_k,A^+)-r_s(A_k,A^-)}{2}=r_s(A_k,A^\pm)$$

3　决策应用

3.1　决策方法

下面给出利用区间数综合 Spearman 秩相关系数进行决策的具体计算步骤。

设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为方案集,属性集为 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$,决策者给出的方案 A_i 在属性 c_j 下的属性值为 x_{ij},其中 $x_{ij}=[x_{ij}^L,x_{ij}^U]$ 为区间数,$i=1,2,\cdots,m$,$j=1,2,\cdots,n$。

步骤 1　构造区间数决策矩阵 $\boldsymbol{N}=(x_{ij})_{m\times n}$,其中 $x_{ij}=[x_{ij}^L,x_{ij}^U]$ 为决策者给出的方案 A_i 在属性 c_j 下的属性值。

步骤 2　根据属性的类型,将区间数决策矩阵标准化,具体方法为

(1) 效益型属性:

$$u_{ij}^L=\frac{x_{ij}^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}^U)^2}},u_{ij}^U=\frac{x_{ij}^U}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_{ij}^L)^2}}$$

(2) 成本型属性:

$$u_{ij}^L=\frac{1/x_{ij}^U}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(1/x_{ij}^L)^2}},u_{ij}^U=\frac{1/x_{ij}^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(1/x_{ij}^U)^2}}$$

步骤 3　从标准化区间数矩阵 $\boldsymbol{M}=(u_{ij})_{m\times n}$ 中求出正负理想方案,其中

正理想方案:

$$A^+=\{[u_1^{L+},u_1^{U+}],[u_2^{L+},u_2^{U+}],\cdots,[u_n^{L+},u_n^{U+}]\}$$

其中:

$$[u_j^{L+},u_j^{U+}]=[\max_i\{u_{ij}^L\},\max_i\{u_{ij}^U\}],j=1,2,\cdots,n$$

负理想方案:

$$A^-=\{[u_1^{L-},u_1^{U-}],[u_2^{L-},u_2^{U-}],\cdots,[u_n^{L-},u_n^{U-}]\}$$

其中

$$[u_j^{L-},u_j^{U-}]=[\min_i\{u_{ij}^L\},\min_i\{u_{ij}^U\}],j=1,2,\cdots,n$$

步骤 4　求出每个方案 A_i 与正负理想方案 A^+,A^- 的 Spearman 秩相关系数 $r_s(A_i,A^+)$,$r_s(A_i,A^-)$。

步骤 5　求出方案 A_i 的综合 Spearman 秩相关系数:

$$r_s(A_i,A^\pm)=\frac{r_s(A_i,A^+)-r_s(A_i,A^-)}{2},i=1,2,\cdots,m$$

步骤 6　根据综合 Spearman 秩相关系数 $r_s(A_i,A^\pm)$,$i=1,2,\cdots,m$ 的大小对方案进行排序。

3.2　应用实例

例 1[15,17]　某高校要对 4 个二级院系 A_1,A_2,A_3,A_4 的财务管理情况进行评价,并制定了 5 项考核评价指标:二级财务管理制度(c_1)、二级财务预算和执行(c_2)、二级财务管理的经济责任(c_3)、二级财务监督管理(c_4)、二级院系财务人员素质(c_5)。首先专家使用百分制区间数对各二级院系的财务管理情况进行了打分,然后将区间数属性值进行标准化处理,如表 1 所示。下面利用本文提出的方法对 4 个二级院系的财务情况进行评价。

步骤 1–2　专家使用百分制区间数构造区间数决策矩阵 $\boldsymbol{N}=(x_{ij})_{4\times5}$,然后将区间数决策矩阵 $\boldsymbol{N}$ 标准化,得到标准化区间数决策矩阵 $\boldsymbol{M}=(u_{ij})_{m\times n}$,见表 1。

表 1 标准化区间数决策矩阵

Table 1 Normalized interval number decision making matrix

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
A_1	[0.240,0.295]	[0.298,0.943]	[0.431,0.477]	[0.538,0.721]	[0.571,0.663]
A_2	[0.554,0.765]	[0.447,0.943]	[0.383,0.426]	[0.231,0.361]	[0.326,0.368]
A_3	[0.462,0.656]	[0.298,0.707]	[0.359,0.401]	[0.538,0.721]	[0.351,0.414]
A_4	[0.359,0.546]	[0.149,0.471]	[0.670,0.728]	[0.308,0.451]	[0.537,0.663]

步骤 3 正负理想方案分别为

$$A^+=\{[0.554,0.765],[0.447,0.943],[0.670,0.728],[0.538,0.721],[0.571,0.663]\}$$

$$A^-=\{[0.240,0.295],[0.149,0.471],[0.359,0.401],[0.231,0.361],[0.326,0.368]\}$$

步骤 4 方案 A_i 与正理想方案 A^+、负理想方案 A^- 的 Spearman 秩相关系数分别为

$$r_s(A_1,A^+)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{6\times14}{5\times24}+1-\frac{6\times12}{5\times24}\right)=\frac{7}{20}$$

$$r_s(A_2,A^+)=0.25,r(A_3,A^+)=0.4$$

$$r(A_4,A^+)=0.15$$

$$r_s(A_1,A^-)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{6\times14}{5\times24}+1-\frac{6\times4}{5\times24}\right)=\frac{11}{20}$$

$$r_s(A_2,A^-)=\frac{3}{20},r(A_3,A^-)=0,r(A_4,A^-)=\frac{12}{20}$$

步骤 5 方案 A_i 的综合 Spearman 秩相关系数分别为

$$r_s(A_1,A^\pm)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{20}-\frac{11}{20}\right)=-0.1$$

$$r_s(A_2,A^\pm)=0.05,r_s(A_3,A^\pm)=0.2$$

$$r_s(A_4,A^\pm)=-0.225$$

步骤 6 由 $r_s(A_i,A^\pm)$ 的值的大小知,方案排序为 $A_3>A_2>A_1>A_4$。

若使用仅考虑正理想方案的 Spearman 秩相关系数方法计算,可得

$$r_s(A_1,A^+)=0.35,r_s(A_2,A^+)=0.25$$

$$r(A_3,A^+)=0.4,r(A_4,A^+)=0.15$$

于是方案排序为 $A_3>A_1>A_2>A_4$。

由上面计算可以看到,若仅考虑正理想方案,则得到的方案排序为 $A_3>A_1>A_2>A_4$;而综合考虑正负理想方案得到方案排序为 $A_3>A_2>A_1>A_4$。由此可知,仅考虑正理想方案与综合考虑正负理想方案得到排序是不同的。由于综合考虑正负理想方案的 Spearman 秩相关系数方法,既考虑到了每个方案与正理想方案的相关性,同时也考虑到了每个方案与负理想方案的相关性,因此得到的排序结果将会更加符合实际情况。

4 结 语

通过分析现有区间数 Spearman 秩相关系数的不足,在 TOPSIS 方法的启发下,综合考虑方案与正负理想方案之间的 Speanrman 秩相关系数,定义了区间数综合 Spearman 秩相关系数,并证明了其相关的性质;然后,提出基于区间数综合 Spearman 秩相关系数的多属性决策方法,并通过高校二级院系财务管理的实例说明了所提方法的可行性。区间数综合 Spearman 秩相关系数的提出促进了相关系数在不确定决策中的发展,同时对于相关系数在其他不确定决策领域的推广也具有一定的启发意义。

参考文献(References):

[1] MYERS J J, WELL A D. Research Design and Statistical Analysis[M]. Milton Park: Lawrence Erlbaum, 2003

[2] MURTHY C A, PAL S K, MAJUMDER D D. Correlation between Two Fuzzy Membership Functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985,17(1): 23—38

[3] CHIANG D A, LIN N P. Correlation of Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1999,102(2): 221— 226

[4] CHAUDHURI B B, BHATTACHARYA A. On Correlation between Two Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001,118(3): 447—456

[5] YU C H. Correlation of Fuzzy Numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems,1993,55(3):303—307

[6] ZADEH L A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control, 1965,8(3):338—353

[7] ATANASSOV K. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,1986,20(1):87—96

[8] GERSTENKORN T, MANKO J. Correlation of Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991,44(1):39—43

[9] BUSTINCE H, BURILLO P. Correlation of Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1995,74(2): 237—244

[10] HONG D H, HWANG S Y. Correlation of Intuitionistic Fuzzy Sets in Probability Spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems,1995,75(1):77—81

[11] HUNG W, WU J W. Correlation of Intuitionistic Fuzzy Sets by Centroid Method [J]. Information Sciences, 2002, 144(1):219—225

[12] MITCHELL H B. A Correlation Coefficient for Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2004,19(5):483—490

[13] MYERS J J, WELL A D. Research Design and Statistical Analysis[M]. Milton Park: Lawrence Erlbaum, 2003

[14] SZMIDT E, KACPRZYK J. The Spearman Rank Correlation Coefficient between Intuitionistic Fuzzy Sets [C]//2010 IEEE International Conference on Intelligent Systems (IEEE IS 2010). London:2010:276—280

[15] 苏丽敏, 何慧爽. 基于区间数的 Spearman 秩相关系数的多属性决策方法[J]. 统计与决策,2019(6):51—53
SU L M, HE H S. Multiple Attribute Decision Making Based on the Spearman Rank Correlation Coefficient of Interval Numbers[J]. Statistics and Decision, 2019(6): 51—53(in Chinese)

[16] HWANG C L, YOON K. Multiple Attribute Decision Making Methods and Applications: A State of the Art Survey[M]. New York: Springer- Verlag,1981

[17] 连强. 基于语言多属性决策的高校二级院系财务管理评价[J]. 财会学习,2016(7):17—18
LIAN Q. Evaluation on Financial Management of Subordinate Colleges in University Based on Linguistic Variable Multiple Attribute Decision Making [J]. Accounting Learning,2016(7):17—18(in Chinese)

The Synthetic Spearman Rank Correlation Coefficient of Interval Numbers and Its Application

LIAN Qiang

(Department of Accounting, Zhengzhou Finance and Trade School, Henan Zhengzhou 450015, China)

Abstract: For the multi-attribute decision making in which the attribute values are interval numbers, and the attribute weights are unknown, we propose a decision making method based on the Spearman rank correlation coefficient between the alternative and the positive, negative ideal alternatives. First, we analyze the limitation of the Spearman rank correlation coefficient between the alternative and the positive ideal alternative. Then, inspired by the TOPSIS method, we define the Spearman rank correlation coefficient between the alternative and the negative ideal alternative. On the basis of the Spearman rank correlation coefficient between the alternative and the positive, negative ideal alternatives, we propose the synthetic Spearman rank correlation coefficient of interval numbers for alternative, and discuss their some properties. Finally, a multiple attribute decision making method based on the synthetic Spearman rank correlation coefficient of interval numbers is proposed, and an example about the evaluation on financial management of subordinate colleges in a university is used to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: interval number; Spearman rank correlation coefficient; ideal alternative; decision making

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

连强. 综合区间数 Spearman 秩相关系数及其应用[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(6):71—75

LIAN Q. The Synthetic Spearman Rank Correlation Coefficient of Interval Numbers and Its Application[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(6):71—75