第 37 卷第 5 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2020 年 10 月
Vol. 37 No. 5 J Chongqing Technol & Business Univ(Nat Sci Ed) Oct. 2020

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0005.008

一个包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程的解*

阿克木·优力达西, 麦麦提明·阿不都克力木

(喀什大学 数学与统计学院,新疆 喀什 844008)

摘　要:针对 Euler 函数 $\varphi(n)$ 与函数 $\omega(n)$ 混合的形如 $\varphi(n)=2^{\omega(n)}q_1^{\omega(n)}q_2^{\omega(n)}\cdots q_k^{\omega(n)}$ 的方程的可解性,其中 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 为互异的奇素数,提出了方程 $\varphi(n)=2^{\omega(n)}5^{\omega(n)}$ 的可解问题,利用 Euler 函数 $\varphi(n)$ 与函数 $\omega(n)$ 的有关性质以及初等方法,得到了该方程的全部 13 组整数解 $n=1$, 11, 202, 250, 2 222, 2 510, 2 750, 3 012, 3 750, 27 610, 37 650, 41 250, 414 150.

关键词:欧拉函数 $\varphi(n)$;函数 $\omega(n)$;正整数解

中图分类号:O156　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2020)05-0047-05

0 引　言

数论函数是一类重要的函数,研究数论函数方程的可解性是数论研究的一类重要课题[1]. 对于任一正整数 n,令 $\varphi(n)$ 为欧拉函数,它是数论中一个重要的函数之一[2]. 对于包含欧拉函数的方程研究内容十分丰富,如文献[3-7]. 令 $\omega(n)$ 表示正整数 n 的相异质因数个数函数. 对于包含函数 $\varphi(n)$ 与 $\omega(n)$ 的方程的可解性问题研究有着不少的成果. 文献[8]给出了方程 $\varphi(n)=2^{\omega(n)}$ 的全部整数解;文献[9]讨论了方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}$ 的可解性,并给出了其全部整数解;文献[10]讨论了方程 $\varphi(\varphi(\varphi(n)))=2^{\omega(n)}$ 的可解性,并给出了全部整数解;文献[11]给出了方程 $\varphi(n)=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$ 的全部整数解;文献[12]讨论了方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$ 的奇数解的情况;文献[13]讨论了方程 $\varphi(n)=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}5^{\omega(n)}$ 的可解性问题. 本文将讨论方程:

$$\varphi(n)=2^{\omega(n)}5^{\omega(n)} \tag{1}$$

的可解性,利用欧拉函数的有关性质以及初等方法,给出了该方程的一切整数解.

1 主要结论及其证明

定理 1　式(1)有正整数解 $n=1,11,202,250$, 2 222, 2 510, 2 750, 3 012, 3 750, 27 610, 37 650, 41 250, 414 150.

证明　显而易见,$n=1$ 是式(1)的整数解;当 $n\geqslant 2$,设 $n=2^{\delta}P_1^{\delta_1}P_2^{\delta_2}\cdots P_k^{\delta_k}$ 是正整数 n 的标准分解式,其中 δ 是一非负整数,δ_i 是正整数,P_i 是互不相同的奇素数,$i=1,2,\cdots,k$.

如若 $\delta=0$,则 $\omega(n)=k$,由式(1)有 $\prod_{i=1}^{k}P_i^{\delta_i-1}(P_i-1)=2^k5^k$;若 $\delta\neq 0$,则 $\omega(n)=k+1$,由式

收稿日期:2019-09-25;**修回日期**:2019-11-11.

* **基金项目**:新疆维吾尔自治区自然科学基金项目资助(2017D01A13).

作者简介:阿克木·优力达西(1962—),男,维吾尔族,新疆喀什人,副教授,从事基础数学研究.

(1)有 $2^{\delta-1}\prod_{i=1}^{k}P_i^{\delta_i-1}(P_i-1)=2^{k+1}5^{k+1}$，从而有

$$2^{\delta-1}\prod_{i=1}^{k}P_i^{\delta_i-1}\frac{P_i-1}{2}=2\times5^{k+1}\qquad(2)$$

对于式(2)，若 $\delta\geqslant3$，则 $4\left|2^{\delta-1}\prod_{i=1}^{k}P_i^{\delta_i-1}\frac{P_i-1}{2}\right.$，而 $4\nmid 2\times5^{k+1}$. 因此，结合 $\delta=0$ 与 $\delta\neq0$ 的情况，此时只需考虑 $0\leqslant\delta\leqslant2$.

由于 $P_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是互不相同的单质数，当 $\omega(n)\geqslant1$ 时正整数 $2^{\omega(n)}5^{\omega(n)}$ 只有这 5 个单质因数，因此 δ_i 中有且只有 1 个可能满足 $\delta_i\geqslant2$. 便于讨论，不妨假定 δ_1 可满足 $\delta_1\geqslant2$，且 $\delta_i=1,i=2,\cdots,k$，则 $n=2^{\delta}P_1^{\delta_1}P_2\cdots P_k$. 因此，如若 $\delta=0$，根据式(1)有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{k}(P_i-1)=2^k5^k$；如若 $\delta\neq0$，根据式(1)有 $2^{\delta-1}P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{k}(P_i-1)=2^{k+1}5^{k+1}$.

情况 1 $\delta=0$.

当 $k=1$，有 $P_1^{\delta_1-1}(P_1-1)=2\times5$. 当 $\delta_1=1$，有 $P_1=11$，因此 $n=11$ 是式(1)的 1 个整数解；当 $\delta_1\geqslant2$，此时式(1)无解.

当 $k=2$，有 $P_1^{\delta_1-1}(P_1-1)(P_2-1)=2^2\times5^2$. 如若 $\delta_1=1$，有 $(P_1-1)(P_2-1)=2^2\times5^2$，此时式(1)无解；如若 $\delta_1\geqslant2$，则 $P_1=5$，此时式(1)无解.

当 $k=3$，有 $P_1^{\delta_1-1}(P_1-1)(P_2-1)(P_3-1)=2^35^3$. 如若 $\delta_1=1$，则 $\frac{P_1-1}{2}\frac{P_2-1}{2}\frac{P_3-1}{2}=5^3$；由于 P_1,P_2,P_3 是 3 个互不相同的单质数，因此 $\frac{P_1-1}{2},\frac{P_2-1}{2},\frac{P_3-1}{2}$ 是 3 个不同的正整数，并且 $\frac{P_1-1}{2},\frac{P_2-1}{2},\frac{P_3-1}{2}$ 都是 5^β 的形式，其中 β 是一非负整数，经计算可得，此时式(1)无解；同理可得，当 $\delta_1\geqslant2$ 时，式(1)也是无解的.

当 $k\geqslant4$，有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{k}(P_i-1)=2^k5^k$. 如若 $\delta_1=1$，则 $\prod_{i=1}^{k}\frac{P_i-1}{2}=5^k$；由于 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 是 k 个互不相同的单质数，因而 $\frac{P_1-1}{2},\frac{P_2-1}{2},\cdots,\frac{P_k-1}{2}$ 是 k 个不同的正整数，并且 $\frac{P_i-1}{2}$ 是 5^β 的形式，其中 β 是一非负整数，因此

$$5^{0+1+2+\cdots+(k-1)}=5^0\times5^1\times5^2\times\cdots\times5^{k-1}=\prod_{i=1}^{k}\frac{P_i-1}{2}=5^k$$

而当 $k\geqslant4$ 时，有 $5^{0+1+\cdots+(k-1)}=5^0\times5^1\times\cdots\times5^{k-1}>5^k$，此时式(1)无解；同理可得，当 $\delta_1\geqslant2$ 时式(1)也是无解的.

情况 2 $\delta\neq0$.

情况 2.1 $\delta=1$，则 $n=2P_1^{\delta_1}P_2\cdots P_k$.

情况 2.1.1 当 $k=1$，有 $P_1^{\delta_1-1}(P_1-1)=2^25^2$. 如若 $\delta_1=1$，则 $P_1-1=2^2\times5^2$，因而 $P_1=101$，则 $n=2\times101=202$ 是式(1)的 1 个整数解；如若 $\delta_1=2$，则 $P_1(P_1-1)=2^2\times5^2$，显然，不存在单质数满足 $P_1(P_1-1)=2^2\times5^2$，因而此时式(1)无解；如若 $\delta_1=3$，则 $P_1^2(P_1-1)=2^2\times5^2$，因而 $P_1=5$，则 $n=2\times5^3=250$ 是式(1)的 1 个整数解；而当 $\delta_1\geqslant4$ 时，式(1)是无解的.

情况 2.1.2 当 $k=2$，有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{2}(P_i-1)=2^35^3$.

如若 $\delta_1=1$，则 $(P_1-1)(P_2-1)=2^3\times5^3$，$P_1=5$，$P_2=251$ 或 $P_1=11$，$P_2=101$，因而 $n=2\times5\times251=2\ 510$ 与 $n=2\times11\times101=2\ 222$ 是式(1)的 2 个整数解；如若 $\delta_1=2$，则 $P_1=5$，$P_2=51$，但 $P_2=51$ 不是质数，因而此时式(1)无解；如若 $\delta_1=3$，则 $P_1=5$，$P_2=11$，因而 $n=2\times5^3\times11=2\ 750$ 是式(1)的 1 个整数解；如若 $\delta_1=4$，则 $P_1=5$，$P_2=3$，因而 $n=2\times5^4\times3=3\ 750$ 是式(1)的 1 个整数解；如若 $\delta_1\geqslant5$，则方程 $P_1^{\delta_1-1}(P_1-1)(P_2-1)=2^35^3$ 无解，因而此时式(1)无解.

情况 2.1.3 当 $k=3$，有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{3}(P_i-1)=2^45^4$.

当 $\delta_1=1$ 时，有 $\prod_{i=1}^{3}(P_i-1)=2^45^4$，因此有 $P_1=5$，$P_2=11$，$P_3=251$，则 $n=2\times5\times11\times251=27\ 610$ 是

式(1)的 1 个整数解;当 $\delta_1=2$ 时,有 $P_1\prod_{i=1}^{3}(P_i-1)=2^4 5^4$,则有 $P_1=5$, $P_2=3$, $P_3=251$,则 $n=2\times3\times5^2\times251=37\ 650$ 是式(1)的 1 个整数解;当 $\delta_1=3$ 时,有 $P_1^2\prod_{i=1}^{3}(P_i-1)=2^4 5^4$,此时式(1)无解;当 $\delta_1=4$ 时,有 $P_1^3\prod_{i=1}^{3}(P_i-1)=2^4 5^4$,因此有 $P_1=5$, $P_2=3$, $P_3=11$,则 $n=2\times3\times5^4\times11=41\ 250$ 是式(1)的 1 个整数解;当 $\delta_1\geqslant5$ 时,有 $5^{\delta_1-5}\prod_{i=2}^{3}(P_i-1)=2^2$,显然,不存在单质数 P 满足 $5^{\delta_1-5}\prod_{i=2}^{3}(P_i-1)=2^2$,因而此时式(1)无解.

情况 2.1.4　当 $k=4$,有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{4}(P_i-1)=2^5 5^5$.

当 $\delta_1=1$ 时,有 $\prod_{i=1}^{4}(P_i-1)=2^5 5^5$,此时式(1)无解;当 $\delta_1=2$ 时,有 $P_1\prod_{i=1}^{4}(P_i-1)=2^5 5^5$,则有 $P_1=5$, $P_2=3$, $P_3=11$, $P_4=251$,则 $n=2\times3\times5^2\times11\times251=414\ 150$ 是式(1)的 1 个整数解;当 $\delta_1\geqslant3$ 时,有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{4}(P_i-1)=2^5 5^5$,此时式(1)无解.

情况 2.1.5　当 $k=5$,有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{5}(P_i-1)=2^6 5^6$.

当 $\delta_1=1$ 时,有 $\prod_{i=1}^{5}(P_i-1)=2^6 5^6$,此时式(1)无解;类似地,可得当 $\delta_1\geqslant2$ 时式(1)也无解.

情况 2.1.6　当 $k\geqslant6$,有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{k}(P_i-1)=2^{k+1}5^{k+1}$.

当 $\delta_1=1$ 时,有 $\prod_{i=1}^{k}\frac{P_i-1}{2}=2\times5^{k+1}$. 由于 P_1, P_2, $\cdots$, P_k 的对称与差异性,则

$$\frac{P_1-1}{2}\frac{P_2-1}{2}\cdots\frac{P_k-1}{2}\geqslant1\times2\times5\times5^2\times\cdots\times5^{k-2}=2\times5^{\frac{(k-2)(k-1)}{2}}$$

而当 $k\geqslant6$ 时,有 $\frac{(k-2)(k-1)}{2}>k+1$,因此可得此时式(1)无解;类似地,可得到当 $\delta_1\geqslant2$ 时,式(1)也无解.

情况 2.2　当 $\delta=2$,则 $n=2^2P_1^{\delta_1}P_2\cdots P_k$.

情况 2.2.1　当 $k=1$,有 $P_1^{\delta_1-1}(P_1-1)=2\times5^2$.

当 $\delta_1=1$ 时,有 $P_1-1=2\times5^2$,则 $P_1=51$. 由于 51 不是质数,此时式(1)无解;当 $\delta_1=2$ 时,有 $P_1(P_1-1)=2\times5^2$,不存在单质数 P 满足 $P_1(P_1-1)=2\times5^2$,此时式(1)无解;当 $\delta_1\geqslant3$ 时,有 $P_1^2(P_1-1)=2\times5^2$,可得此时式(1)无解.

情况 2.2.2　当 $k=2$ 有 $P_1^{\delta_1-1}(P_1-1)(P_2-1)=2^2 5^3$.

当 $\delta_1=1$ 时,有 $(P_1-1)(P_2-1)=2^2 5^3$,有 $P_1=3$, $P_2=251$,则 $n=2^2\times3\times251=3\ 012$ 是式(1)的 1 个整数解;当 $\delta_1\geqslant2$ 时,有 $P_1^{\delta_1-1}(P_1-1)(P_2-1)=2^2 5^3$,可得此时式(1)无解.

情况 2.2.3　当 $k=3$,有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{3}(P_i-1)=2^3 5^4$.

当 $\delta_1=1$ 时,有 $\prod_{i=1}^{3}(P_i-1)=2^3 5^4$,可得式(1)无解;当 $\delta_1=2$ 时,有 $P_1=5$ 和 $\prod_{i=2}^{3}(P_i-1)=2\times5^3$,可得此时式(1)无解;当 $\delta_1\geqslant3$ 时,有 $P_1=5$ 和 $5^{\delta_1-1}\prod_{i=2}^{3}(P_i-1)=2\times5^4$,显然, $4\mid5^{\delta_1-1}\prod_{i=2}^{3}(P_i-1)$,而 $4\nmid2\times5^4$,因而此时式(1)无解.

情况 2.2.4　当 $k\geqslant4$ 有 $P_1^{\delta_1-1}\prod_{i=1}^{k}(P_i-1)=2^k 5^{k+1}$.

当 $\delta_1=1$ 时,有 $\frac{P_1-1}{2}\frac{P_2-1}{2}\cdots\frac{P_k-1}{2}=5^{k+1}$,由于当 $k\geqslant4$ 时,有

$$\frac{P_1-1}{2}\frac{P_2-1}{2}\cdots\frac{P_k-1}{2}\geqslant1\times5\times5^2\times\cdots\times5^{k-1}=5^{\frac{k(k-1)}{2}}>5^{k+1}$$

可得此时式(1)无解;类似地,可得到当 $\delta_1\geqslant2$ 时,式(1)也无解.

综合以上的讨论,可得本文的定理 1. 证毕.

2 结束语

对于包含函数 $\varphi(n)$ 和函数 $\omega(n)$ 的形如 $\phi(n) = 2^{\omega(n)}q_1^{\omega(n)}q_2^{\omega(n)}\cdots q_k^{\omega(n)}$ 的可解性问题,其中 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 为互异的奇素数,本文利用 Euler 函数 $\varphi(n)$ 与 $\omega(n)$ 的有关性质以及初等方法,给出了当 $k=1$, $q_1=5$ 时方程的所有正整数解,而对于 k 与 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 取其他任意正整数时,也可利用本文的方式与方法进行讨论.

参考文献(References):

[1] 谢自珍,蒋卓玲,何海霞,等.一类 Euler 函数方程的解的上界[J].北华大学学报(自然科学版),2016,17(5):577—580

XIE Z Z, JIANG Z L, HE H X. Upper Bounds of the Solutions of a Class of Euler' Functional Equation[J]. Journal of Beihua University (Natural Science Edition), 2016,17(5):577—580(in Chinese)

[2] 申江红,高丽,惠佳豪.一个包含勾股数的三元变系数 Euler 函数方程的可解性[J].延安大学学报(自然科学版),2019,38(1):5—8

SHEN J H, GAO L, HUI J H. Solvability of A Ternary Variable Conefficient Euler Function Equation with Constant Terms[J]. Journal of Yan'an University(Natural Science Edition),2019,38(1):5—8(in Chinese)

[3] 张四保,杨燕妮,席小忠.有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的几个非线性方程[J].河南大学学报(自然科学版),2019,49(1):122—126

ZHANG S B, YANG Y N, XI X Z. Several Nonlinear Equations on Euler Function $\varphi(n)$ [J]. Journal of Henan University(Natural Science Edition),2019,49(1):122—126(in Chinese)

[4] 姜莲霞.包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的一个非线性方程的正整数解[J].北华大学学报(自然科学版),2018,19(6):719—723

JIANG L X. Positive Integer Solutions of a Nonlinear Equation Containing Euler Function $\varphi(n)$ [J]. Journal of Beihua University (Natural Science Edition), 2018, 19(6):719—723(in Chinese)

[5] 郑璐,高丽,郭梦媛.包含完全数的非线性 Euler 函数方程的解[J].重庆理工大学学报(自然科学版),2018,32(9):186—189

ZHENG L, GAO L, GUO M Y. Solutions of Nonlinear Euler Function Equations with Perfect Numbers[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science Edition),2018,32(9):186—189(in Chinese)

[6] 杨张媛,赵西卿,白继文.一个包含 Euler 函数的方程[J].贵州师范大学学报(自然科学版),2018,36(4):80—88

YANG Z Y, ZHAO X Q, BAI J W. An Equation Involving Euler' Totient Function [J]. Journal of Guizhou Normal University (Natural Sciences Edition), 2018,36(4):80—88(in Chinese)

[7] 杨张媛,赵西卿.方程 $\varphi(xyz)=\varphi(x)+2\varphi(y)+3\varphi(z)$ 的正整数解[J].云南师范大学学报(自然科学版),2018,38(2):38—42

YANG Z Y, ZHAO X Q. The Positive Integer Solutions of Equation $\varphi(xyz)=\varphi(x)+2\varphi(y)+3\varphi(z)$ [J]. Journal of Yunnan Normal University(Natural Sciences Edition),2018,38(2):38—42(in Chinese)

[8] 吕志宏.两个数论函数及其方程[J].纯粹数学与应用数学,2006,22(3):303—306

LYU Z H. Two Number Theoretical Functions and the Equation Involving Them[J]. Pure and Applied Mathematics, 2006,22(3):303—306(in Chinese)

[9] 吕志宏.一个包含 Euler 函数的方程[J].西北大学学报(自然科学版),2006,36(1):17—20

LYU Z H. An Equation Involving the Euler Function[J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition),2006,36(1):17—20(in Chinese)

[10] 陈国慧.一个包含 Euler 函数的方程[J].纯粹数学与应用数学,2007,23(4):439—445

CHEN G H. An Equation Involving the Euler Function[J]. Pure and Applied Mathematics, 2007, 23(4):439—445

(in Chinese)

[11] 张四保,官春梅.一个包含两个数论函数方程的解[J].东北师大学报(自然科学版),2018,50(1):10—14
ZHANG S B, GUAN C M. Solutions of an Equation Involving Two Number Theoretical Functions[J]. Journal of Northeast Normal University(Natural Scinece Edtion),2018,50(1):10—14(in Chinese)

[12] 张四保.数论函数方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$ 的奇数解[J].西南师范大学学报(自然科学版),2017,42(2):1—4
ZHANG S B. On Odd Integer Solutions of Arithmetic Functional Equation $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}$[J]. Journal of Southwest China Normal University(Natural Science Edition),2017,42(2):1—4(in Chinese)

[13] 张四保. Euler 函数方程 $\varphi(n)=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}5^{\omega(n)}$ 的解[J].南昌大学学报(理科版),2019,43(2):114—119
ZHANG S B. Solutions on Euler Function Equation $\varphi(n)=2^{\omega(n)}3^{\omega(n)}5^{\omega(n)}$[J]. Journal of Nanchang University (Natural Science Edition),2019,43(2):114—119(in Chinese)

The Solutions of an Equation Involving Euler on Function φ(*n*) and Function ω(*n*)

AKIM Yoldax, MAMANTIMIN Adbikirim

(School of Mathematics and Statistics, Xinjiang Kashi University, Xinjiang Kashi 844008, China)

Abstract: Aiming at the solvability of the equation $\varpi(n)=2^{\omega(n)}q_1^{\omega(n)}q_2^{\omega(n)}\cdots q_k^{\omega(n)}$ in which Euler function $\varphi(n)$ and function $\omega(n)$ are mixed, where $q_1,q_2,\cdots,q_k$ are distinct odd prime numbers, the solvable problem of the equation $\varphi(n)=2^{\omega(n)}5^{\omega(n)}$ was put forward. By using the properties of Euler function and function $\omega(n)$, and by using the elementary methods, the all 13 positive integer solutions $n=1$, 11, 202, 250, 2 222, 2 510, 2 750, 3 012, 3 750, 27 610, 37 650, 41 250, 414 150 were obtained.

Key words: Euler function $\varphi(n)$; function $\omega(n)$; positive integer solution

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:
阿克木·优力达西,麦麦提明·阿不都克力木.一个包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程的解[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(5):47—51
AKIM Y, MAMANTIMIN A. The Solutions of an Equation Involving Euler on Function $\varphi(n)$ and Function $\omega(n)$[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(5):47—51