第 37 卷第 5 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2020 年 10 月
Vol. 37 No. 5 J Chongqing Technol & Business Univ(Nat Sci Ed) Oct. 2020

doi:10. 16055/j. issn. 1672-058X. 2020. 0005. 007

优越扩张下 G_C-投射模*

周 珺,胡 月,葛茂荣**

(安徽大学 数学科学学院,合肥 230601)

摘 要:在半对偶模的基础上,针对一个模的 G_C-投射性在环的优越扩张下是保持的,在已知结论正确的情况下采用不同于以往的证明方法,利用模的 G_C-投射性的等价命题证明主要结论,即对于环的优越扩张 $R\to S$ 和 S-模$_SM$,R-模$_RM$ 是一个 G_C-投射模当且仅当$_SM$ 是一个 $G_{S\otimes_R C}$-投射模。使用等价命题后采用的新证明方法逻辑清晰,形式统一,便于模的具体相关性质的推广与应用。

关键词:半对偶模;G_C-投射模;优越扩张

中图分类号:O154. 2 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2020)05-0043-04

0 引 言

Auslander 和 Bridger[1] 在诺特环上的有限生成模上首先定义了 G-维数为零的模;紧接着作为 G-维数为零的模的推广,Enochs 和 Jenda[2] 对一般环上的任意模定义了 Gorenstein 投射模。一个 R-模 M 被称为 Gorenstein 投射模,指的是如果下列存在投射 R-模的正合列:

$$P:=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$$

此时 $M\cong \mathrm{Im}(P_1\to P_0)$,且对任意的投射 R-模 Q,$\mathrm{Hom}_R(-,Q)$ 作用在上述正合列上仍保持正合性,此正合列 P 称为 R-模 M 的一个完全投射分解。之后也相继出现了 Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模。利用这些模类,类似于经典的同调维数定义了各种 Gorenstein 同调维数。经过半个多世纪的发展,Gorenstein 同调代数已经发展到很高的水平。

对于半对偶模的研究可以回溯到上世纪 70 年代,Vasconcelos 首先在文献[3]中开始研究诺特环上的半对偶模;Golod[4] 对于有限生成模定义了 G_C-维数,这一概念后被 Holm 和 Jorgensen 推广到诺特环的一般模上,定义了 G_C-投射模;White[5] 对任意交换环上的 G_C-投射模做了一般性的研究,证明了 G_C-投射模与 Gorenstein 投射模一样具有很多很好的性质;刘增凤等[6] 给出了关于 G_C-投射模的一种等价刻画,从而给出了 G_C-投射模更“接近”于 Gorenstein 投射模的一种等价定义;在文献[7]中,Huang 证明了在环的优越扩张下,一个模的 G_C-投射性是保持的,并给出了 G_C-内射模、G_C-平坦模的一些性质。

本文主要利用文献[6]中对 G_C-投射模的等价描述,证明了一个模相对于半对偶模的 Gorenstein 投射性在优越扩张下是保持的,即对于环的优越扩张 $R\to S$ 和 S-模$_SM$,$_RM$ 是一个 G_C-投射 R-模当且仅当$_SM$ 是一个 $G_{S\otimes_R C}$-投射 S-模。文中的大部分结论是已知的,可见文献[7]。如此采用新的方法,使其结果更便于推广与运用。设文中 R 与 S 均为含单位元的交换环,一般用$_RM$,$_SM$ 表示左 R-模、左 S-模,而文中 C 指半对偶模,这里采用 P,C,T 表示各类长正合列。

收稿日期:2019-12-13;**修回日期**:2020-03-27.

* **基金项目**:安徽省高校自然科学研究重点项目资助(KJ2019A0007).

作者简介:周珺(1995—),女,安徽亳州人,硕士研究生,从事代数表示论研究.

** **通讯作者**:葛茂荣(1968—),女,安徽合肥人,副教授,从事代数表示论研究. Email:ge1968@162. com.

1 预备知识

优越扩张作为一类重要的环扩张,一直是环扩张理论的重要研究对象[8-9]。

定义 1[5] 设环 R 是 S 的子环,且 R 与 S 具有相同的单位元。

(1) 若存在 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 为 S 的有限子集,使得 $a_1=1$,$S=Ra_1+Ra_2+Ra_3+\cdots+Ra_n$,称 S 是 R 的有限正规扩张。

(2) 若 S 是 R 的有限正规扩张,且 S 是以 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 为基的自由 R-模,则称 S 是 R 的自由正规扩张。

(3) 若 S 是 R 的自由正规扩张,且 S 是 R-投射的,即设 ${}_SN$ 是 ${}_SM$ 的子模,则由 ${}_RN\mid{}_RM$ 可推出 ${}_SN\mid{}_SM$(这里 $N\mid M$ 表示 N 是 M 的直和项),则此时称 S 是 R 的优越扩张。

注 1 在环扩张下,所有的 S-模均为 R-模,所有投射 S-模也均是投射 R-模。若 S 是 R 的优越扩张,则 S 为自由 R-模,$S\cong R^{(n)}$,由此可以推出 ${}_SS\otimes_R-$ 必与 ${}_S\mathrm{Hom}_R({}_RS,-)$ 是等价函子。

回顾半对偶模的定义,对偶模一定是半对偶模。实际上,这里给出的 G_C-投射 R-模与 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模,均是以 C,$S\otimes_RC$ 半对偶模为基础的。有如下定义:

定义 2[7] 设 C 为 R-模,称 C 为半对偶 R-模,如果满足以下条件:

(1) R-模 C 存在有限投射分解,即存在正合列 $\cdots\to P_1\to P_0\to C\to 0$,其中 P_i 均为投射 R-模。

(2) 存在自然同构 $R\cong\mathrm{Hom}_R(C,C)$。

(3) 对任意的 $i\geqslant 1$,都有 $\mathrm{Ext}_R^i(C,C)=0$。

根据文献[7]中命题 2.3,有下面的结论:

命题 1 设 R 和 S 均为交换,θ 是 $R\to S$ 的环同态,且 S 为平坦 R-模,若 ${}_RC$ 是半对偶 R-模,则 ${}_SS\otimes_RC$ 是半对偶 S-模。

由优越扩张的定义及命题 1 可得如下推论:

推论 1 设 S 是 R 的优越扩张,若 ${}_RC$ 是半对偶 R-模,则 ${}_SS\otimes_RC$ 是半对偶 S-模。

首先给出 G_C-投射模的具体定义:

定义 3[7] 设 M 为 R-模,若存在 R-模正合列:

$$\cdots\to P_1\to P_0\to C\otimes_RQ^0\to C\otimes_RQ^1\to\cdots$$

其中的 P_i 和 Q^i 均是投射 R-模,且此时 $M\cong\mathrm{Im}(P_0\to C\otimes_RQ^0)$,对任意的投射 R-模 Q,$\mathrm{Hom}_R(-,C\otimes_RQ)$ 作用在这个正合列上仍保持正合性,则称 M 是 G_C-投射 R-模。

在文献[6]中,作者给出了 G_C-投射模的一个等价刻画,使得 G_C-投射模有了"类似于" Gorenstein 投射模的定义。

命题 2 设 M 为 R-模,则 M 是 G_C-投射模的充要条件是存在 R-模正合列:

$$\cdots\to C_1\to C_0\to C^0\to C^1\to\cdots$$

且 $C_i,C^i\in\overline{\mathrm{Add}_RC}$,$M\cong\mathrm{Im}(C_0\to C^0)$,对任意的 $X\in\mathrm{Add}_RC$,$\mathrm{Hom}_R(-,{}_RX)$ 作用在这个正合列上仍保持正合性,其中 $X\in\mathrm{Add}_RC$ 指的是 X 为 R-模 ${}_RC$ 的直和的直和项,而 $\overline{\mathrm{Add}_RC}=\mathrm{Add}_RC\cup\mathrm{Add}_RR$。

注 2 G_C-投射模类是一个投射预解类,且在直和与直和项下封闭[5]。

2 主要结论

这一节,主要讨论在优越扩张下 G_C-投射 R-模的保持性,其中大部分结论是已知的,利用上述命题 2,采用了不同于文献[7]的新的方法。

根据环扩张的相关性质,可得以下结论:

引理 1 设 θ 是 $R\to S$ 的环同态,且 S 为有限生成投射 R-模,则有下列结论成立:

(1) ${}_SS\otimes_R\mathrm{Add}_RC\subseteq\mathrm{Add}_SS\otimes_RC$。

(2) 对任意的 ${}_SX\in\mathrm{Add}_SS\otimes_RC$,有 ${}_RX\in\mathrm{Add}_RC$。

证明 (1) 已知 θ 是 $R\to S$ 的环同态,因为在环扩张下对任意的 R-模 Q,均有 $S\otimes_R(C\otimes_RQ)\cong(S\otimes_RC)\otimes_S(S\otimes_RQ)$,由此可得结果。

(2) 对任意的 ${}_SX\in\mathrm{Add}_SS\otimes_RC$,即 ${}_SX$ 为 ${}_SS\otimes_RC$ 的直和的直和项。又因为张量函子保持直和与直和项,所以 ${}_RS\otimes_RX$ 为 ${}_RS\otimes({}_SS\otimes_RQ)$ 的直和的直和项,且 ${}_RS\otimes({}_SS\otimes_RQ)\cong{}_RS\otimes_RC$,${}_RS\otimes_RX\cong{}_RX$;又因为 ${}_RS\otimes({}_SS\otimes_RQ)\cong{}_RS\otimes_RC$,则 ${}_RX$ 为 ${}_RS\otimes_RC$ 的直和的直和项;由 S 是有限投射 R-模可知 ${}_RS\otimes_RC$ 是 ${}_RC$ 的直和的直和项;故 ${}_RX$ 为 ${}_RC$ 的直和的直和项,即 ${}_RX\in\mathrm{Add}_RC$。

引理 2[9] 设 S 是 R 的环扩张且 S 是 R-投射的,若 M 是 S-模,则 ${}_SM$ 是 ${}_SS\otimes_RM$ 和 ${}_S\mathrm{Hom}_R(S,M)$ 的直和项。

根据预备知识及上述引理,开始采用新的方法来证明下述已知的结论。

命题 3 设 θ 是 $R\to S$ 的环同态,且 ${}_RS$ 为投射 R-模,若 ${}_RM$ 是 G_C-投射 R-模,则 ${}_SS\otimes_RM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模。

证明 若 ${}_RM$ 是 G_C-投射 R-模,由命题 2 可知,

存在如下 R-模正合列:

$$_RC:=\cdots\to C_1\to C_0\to C^0\to C^1\to\cdots$$

且 $C_i,C^i\in\overline{\mathrm{Add}_RC}$,$M\cong\mathrm{Im}(C_0\to C^0)$,对任意的 $X\in\mathrm{Add}_RC$,$\mathrm{Hom}_R({}_RC,{}_RX)$是正合的。又知$_RS$ 是投射 R-模,因此$_SS\otimes_RC$ 是 S-模正合列:

$$_SS\otimes_RC:=\cdots\to S\otimes_RC_1\to S\otimes_RC_0\to S\otimes_RC^0\to S\otimes_RC^1\to\cdots$$

由引理 1 (1)及对任意的投射 R-模 P,$_SS\otimes_RP$ 均为投射 S-模,即$_SS\otimes_RP\in\mathrm{Add}_SS$,可知$_SS\otimes_RC_i$,$_SS\otimes_RC^i\in\overline{\mathrm{Add}_SS\otimes_RC}$,且 $S\otimes_RM\cong\mathrm{Im}(S\otimes_RC_0\to S\otimes_RC^0)$。

下面只需证明对任意的$_SX\in\mathrm{Add}_SS\otimes_RC$,$\mathrm{Hom}_R({}_SS\otimes_RC,{}_SX)$是正合的即可。

由 S-模均为 R-模和引理 1(2)可推出$_RX\in\mathrm{Add}_RC$。又由伴随同构定理可知:

$$\mathrm{Hom}_S({}_SS\otimes_RC,{}_SX)\cong\mathrm{Hom}_R({}_RC,{}_R\mathrm{Hom}_S({}_SS,{}_SX))\cong\mathrm{Hom}_R({}_RC,{}_RX)$$

再由$_RM$ 是 G_C-投射 R-模可知$\mathrm{Hom}_R({}_RC,{}_RX)$是正合的,则对任意的$_SX\in\mathrm{Add}_SS\otimes_RC$,$\mathrm{Hom}_R({}_SS\otimes_RC,{}_SX)$是正合的,即证$_SS\otimes_RM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模。

命题 4　设 S 是环 R 的优越扩张,则$_RM$ 是 G_C-投射 R-模的充分必要条件是$_SS\otimes_RM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模。

证明　必要性由命题 3 可得。

充分性:由 S 是 R 的优越扩张,可知 $S\cong R^{(n)}$。因为 G_C-投射模在直和项下封闭,要证$_RM$ 是 G_C-投射 R-模,只需证明$_RM^{(n)}$是 G_C-投射 R-模。

对任意的$_RX\in\mathrm{Add}_RC$,有

$$\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant1}({}_RM^{(n)},{}_RX)\cong\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant1}({}_RM^{(n)},{}_RR\otimes_RX)\cong\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant1}({}_RM,{}_RS\otimes_RX)\cong\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant1}({}_RM,{}_R\mathrm{Hom}_S({}_SS,{}_SS\otimes_RX))\cong\mathrm{Ext}_S^{i\geqslant1}({}_SS\otimes_RM,{}_SS\otimes_RX)$$

又因为$_SS\otimes_RX\in{}_SS\otimes_R\mathrm{Add}_RC$,此时由引理 1(1)知$_SS\otimes_RX\in\mathrm{Add}_SS\otimes_RC$。

且由$_SS\otimes_RM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模知 $\mathrm{Ext}_S^{i\geqslant1}({}_SS\otimes_RM,{}_SS\otimes_RX)=0$。从而对任意的$_RX\in\mathrm{Add}_RC$,$\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant1}({}_RM^{(n)},{}_RX)=0$。

由$_SS\otimes_RM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模可知,存在下列 S-模正合列:

$$_ST:=0\to S\otimes_RM\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^i\to\cdots$$

其中$_SC^i\in\overline{\mathrm{Add}_SS\otimes_RC}$。且对任意的$_SY\in\mathrm{Add}_SS\otimes_RC$,$\mathrm{Hom}_S({}_ST,{}_SY)$是正合的。由引理 1 (2)可知,有 R-模正合列:

$$_RT:=0\to M^{(n)}\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^i\to\cdots$$

其中$_RC^i\in\overline{\mathrm{Add}_RC}$。且对任意的$_RX\in\mathrm{Add}_RC$,由伴随同构定理及优越扩张下函子等价可得:

$$S\otimes_R\mathrm{Hom}_R({}_RT,{}_RX)\cong\bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Hom}_R({}_RT,{}_RX)\cong\mathrm{Hom}_R({}_RT,{}_RS\otimes_RX)\cong\mathrm{Hom}_R({}_RS\otimes_ST,{}_RS\otimes_RX)\cong\mathrm{Hom}_S({}_ST,\mathrm{Hom}_R({}_RS,{}_SS\otimes_RX))\cong\bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Hom}_S({}_ST,{}_SS\otimes_RX)$$

同理由$_SS\otimes_RM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模可知$\mathrm{Hom}_S({}_ST,{}_SS\otimes_RX)$正合,经上述同构可得对任意的$_RX\in\mathrm{Add}_RC$,$\mathrm{Hom}_R({}_RT,{}_RX)$是正合的,故$_RM^{(n)}$ 是 G_C-投射 R-模。综上所述,$_RM$ 是 G_C-投射 R-模。

利用上述的相关引理与命题,可以得到一个模相对于半对偶模的 Gorenstein 投射性在优越扩张下是保持的。

定理 1　设 S 是 R 的优越扩张,M 是 S-模,$_RM$ 是 G_C-投射 R-模的充分必要条件是$_SM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模。

证明　必要性:若$_RM$ 是 G_C-投射 R-模,由命题 3 知$_SS\otimes_RM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模,又由引理 2 知在优越扩张下$_SM$ 是$_SS\otimes_RM$ 的直和项,所以$_SM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模。

充分性:若$_SM$ 是 $G_{S\otimes_RC}$-投射 S-模,则存在下述 S-模正合列:

$$_SC:=\cdots\to{}_SC_1\to{}_SC_0\to{}_SC^0\to{}_SC^1\to\cdots$$

其中$_SC_i$,$_SC^i\in\overline{\mathrm{Add}_SS\otimes_RC}$,$_SM\cong\mathrm{Im}({}_SC_0\to{}_SC^0)$,从而有 R-模正合列:

$$_RC:=\cdots\to{}_RC_1\to{}_RC_0\to{}_RC^0\to{}_RC^1\to\cdots$$

由投射 S-模是投射 R-模和引理 1(2),知$_RC_i$,$_RC^i\in\overline{\mathrm{Add}_RC}$,$_RM\cong\mathrm{Im}({}_RC_0\to{}_RC^0)$且对任意的$_RX\in\mathrm{Add}_RC$,有

$$\mathrm{Hom}_R({}_RC,{}_RX)\cong\mathrm{Hom}_R({}_RS\otimes_SC,{}_RX)\cong\mathrm{Hom}_S({}_SC,\mathrm{Hom}_R({}_RS,{}_RX))\cong\mathrm{Hom}_S({}_SC,\mathrm{Hom}_R({}_RS,{}_RX))\cong\mathrm{Hom}_S({}_SC,{}_SS\otimes_RX)$$

因为$_SS\otimes_RX\in\mathrm{Add}_SS\otimes_RC$,所以由$\mathrm{Hom}_S({}_SC,{}_SS\otimes_RX)$的正合性可得$\mathrm{Hom}_R({}_RC,{}_RX)$是正合的。

综上所述,$_RM$ 是 G_C-投射 R-模。

3　讨　论

在文献[7]中,由于 G_C-投射模定义中的长正合列中各类模的表达形式不统一,使得其相关性质

的证明往往需要分开讨论,证明过程显得繁复和杂乱。本文是基于文献[7]中已知的相关结论利用文献[6]中 G_C-投射模的等价命题去重新证明,不同点是利用其等价命题后,可将长正合列中的各类模改写为统一形式,从而利用此形式再证明对于环的优越扩张 $R\to S$ 和 S-模${}_SM$,${}_RM$ 是一个 G_C-投射 R-模当且仅当${}_SM$ 是一个 $G_{S\otimes_R C}$-投射 S-模,采用的证明形式统一,内容充实简便。

文章此时只探究了 G_C-投射模的一些重要性质,后续将进一步探究 G_C-内射模、G_C-平坦模的对偶的等价命题,再进一步对相关性质进行探究证明,便于模的 G_C-投射性、内射性、平坦性的推广与应用。

参考文献(References):

[1] AUSLANDER M, BRIGER M. Stable Module Theory[M]. American Mathematical Society: Providence R Z, 1969

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules[J]. Math Z, 1995, 220(1): 611—633

[3] VASCONCELOS W V. Divisor Theory in Module Categories[M]. North-Holland American Elsevier, 1974

[4] GOLOD E S. G-Dimension and Generalized Perfect Ideals[J]. Trudy Mat Inst Steklov, 1984, 165(10): 62—66

[5] WHITE D. Gorenstein Projective Dimension with Respect to a Semidualizing Module[J]. Journal of Commutative Algebra, 2010, 2(1): 111—137

[6] LIU Z F, HUANG Z, XU A. Gorenstein Projective Dimension Relative to a Semidualizing Bimodule[J]. Communications in Algebra, 2013, 41(1): 1—18

[7] HUANG C, TRLIFAJ J. G_C-Projective, Injective and Flat Modules Under Change of Rings[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2012, 11(2): 1—16

[8] HUANG Z, SUN J. Invariant Properties of Representations under Excellent Extensions[J]. Journal of Algebra, 2012, 358(5): 87—101

[9] XUE W. On Almost Excellent Extensions[J]. Algebra Colloq, 1996, 3(2): 125—134

[10] BENNIS D, MAHDOU N. Gorensten Global Dimension[J]. Pro Amer Math Soc, 2010, 138(11): 461—465

G_C-projective Modules under Excellence Extension

ZHOU Jun, HU Yue, GE Mao-rong

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: We know that the Gorenstein projectivity relative to a semidualizing module is preserved under excellent extensions. A new method of proof is adopted when the conclusion is known to be correct. Using the equivalent proposition of the definition to prove that for an excellent extension $R\to S$ and an S-module${}_SM$, ${}_RM$is G_C-projective module if and only if ${}_SM$ is $G_{S\otimes_R C}$- projective module. The form of the new method after using equivalent proposition is uniform. It is convenient to generalize and apply the related properties of modules.

Key words: semidualizing modules; G_C- projective modules; excellent extensions

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

周珺,胡月,葛茂荣. 优越扩张下 G_C-投射模[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(5):43—46

ZHOU J, HU Y, GE M R. G_C-projective Modules under Excellence Extension[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020, 37(5): 43—46