doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0004.006

多目标优化问题近似解的一类组合标量化方法*

刘佳星, 张 琦
(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘 要:根据多目标优化问题近似解的定义,对它的性质进行讨论;借助 Ehrgott 和 Ruzika 基于传统的标量化方法结合剩余变量提出的一类改进的 ε-约束法组合标量化模型对多目标优化问题的近似解性质进行了研究;建立了多目标优化问题的近似有效解与标量化问题的最优解之间的关系,得到了近似真有效解与对应标量优化问题最优解的等价关系,并提出反例对部分结论进行了解释说明,指出若不满足所给定的条件,其结论不一定成立;所提出的主要结果是对一些已有标量化结果的改进与推广,为设计和求解多目标优化问题近似解的最优算法提供理论与方法基础。

关键词:多目标优化;组合标量化;ε-弱有效解;ε-有效解;ε-真有效解

中图分类号:O221.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2020)04-0034-05

0 引 言

多目标优化理论与方法是数学规划与最优化领域中的重要分支,在工程管理、航空航天、交通安全等诸多领域都具有十分广泛的应用。对于多目标优化问题的研究已有大量的研究成果[1-5],其中关于多目标优化问题解的定义是至关重要的。早期的研究主要集中于精确解的类型。而在实际的工作生产和生活实践中,多目标优化问题的(弱)有效解的集合可能是空集,但近似解在很弱的条件下都可能存在。因此,对于多目标优化问题近似解的研究是具有十分重要的理论价值和实际意义的。近年来,关于多目标优化问题近似解的相关研究已有大量的成果出现[6-12]。到目前为止,一些学者相继提出了多目标优化问题 ε-弱有效解、ε-有效解和 ε-真有效解的定义,并对其性质展开了比较深入的研究。

在求解多目标优化问题时,一个重要的途径是对多目标优化问题进行标量化刻画。特别地,1983 年,Haimes[13] 提出了著名的 ε-约束法,并建立了多目标优化问题(弱)有效解的标量化结果。2008 年,Ehrgott 和 Ruzika[14] 进一步对 Haimes 提出的标量化方法进行了改进,获得了 G-真有效解的线性标量化结果。

受文献[9,13,14]等研究工作的启发,本文利用改进的 ε-约束法标量化模型进一步建立了多目标优化问题 ε-弱有效解、ε-有效解和 ε-真有效解的一类线性标量化结果。所得到的主要结果将多目标优化中关于精确解的一些线性标量化结果推广到了近似解的情形。

收稿日期:2019-12-26;**修回日期**:2020-01-20.
* **基金项目**:重庆市基础与前沿研究计划项目(CSTC2015JCYJA00027);重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500303).
作者简介:刘佳星(1994—),男,重庆云阳人,硕士研究生,从事多目标优化理论与方法研究.

1 预备知识

考虑如下多目标优化问题:

$$(\mathrm{MOP})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))$$
$$\text{s.t. } x\in\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{R}^n$$

假定$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$有界。对于任意的 $y,z\in\boldsymbol{R}^m$,考虑如下的序关系:$y<z\Leftrightarrow y_i<z_i$, $\forall i=1,2,\cdots,m$;$y\leqq z\Leftrightarrow y_i\leqq z_i$, $\forall i=1,2,\cdots,m$;$y\leqslant z\Leftrightarrow y_i\leqslant z_i,y\neq z$。

令 $\boldsymbol{R}^m$ 为 m 维欧氏空间,定义$\boldsymbol{R}^m_{\geqq}=\{y\in\boldsymbol{R}^m:y\geqq 0\}$,$\boldsymbol{R}^m_{\geqslant}=\{y\in\boldsymbol{R}^m:y\geqslant 0\}$ 和 $\boldsymbol{R}^m_{>}=\{y\in\boldsymbol{R}^m:y>0\}$ 。

定义 1[7]　设 $\varepsilon\in\boldsymbol{R}^m_{\geqq}$,称一个可行解 $\hat{x}\in X$ 为关于(MOP)的 1)ε-弱有效解,如果不存在 $x\in X$ 使得 $f(x)<f(\hat{x})-\varepsilon$;2)$\varepsilon$-有效解,如果不存在 $\hat{x}\in X$ 使得 $f(x)\leqslant f(\hat{x})-\varepsilon$;3)$\varepsilon$-严有效解,如果不存在 $\hat{x}\in X$ 使得 $f(x)\leqq f(\hat{x})-\varepsilon$。

定义 2[11]　设 $\varepsilon\in\boldsymbol{R}^m_{\geqq}$,称可行解 $\hat{x}\in X$ 为关于(MOP)的 ε-真有效解,如果 $\hat{x}$ 是有效解且存在 $M>0$,使得对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 及任意满足 $f_i(x)<f_i(\hat{x})-\varepsilon_i$ 的 $x\in X$,总存在 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $f_j(\hat{x})-\varepsilon_j<f_j(x)$ 且满足$\dfrac{f_i(\hat{x})-f_i(x)-\varepsilon_i}{f_j(x)-f_j(\hat{x})+\varepsilon_j}\leqslant M$。

关于(MOP)的 ε-弱有效解集,ε-有效解集和 ε-真有效解集分别表示为$X_{\varepsilon WE}$,$X_{\varepsilon E}$和$X_{\varepsilon PE}$。

考虑如下改进 ε-约束法标量化模型[14]:

$$(\mathrm{SOP_1})\min f_k(x)+\sum_{i\neq k}\mu_i s_i$$
$$\text{s.t. } f_i(x)-s_i\leqslant\sigma_i,i\neq k$$
$$s_i\geqslant 0,i\neq k$$
$$x\in X$$

其中,$\mu_i\geqslant 0$, $\forall i\neq k$ 是剩余变量 s_i 的权重;当 $\mu_i=0$ 时,($\mathrm{SOP_1}$)退化为 ε-约束法。

令 $\epsilon\geqslant 0$,称$(\hat{x},\hat{s})$是标量化问题($\mathrm{SOP_1}$)的 ϵ-最优解,若对任意的 $x\in\boldsymbol{S}$,$s_i\geqslant 0$,满足

$$f_k(x)+\sum_{i\neq k}\mu_i s_i+\epsilon\geqq f_k(\hat{x})+\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i$$

2 ε-近似解的标量化性质

下面利用改进的 ε-约束法标量化模型($\mathrm{SOP_1}$)建立(MOP)的 ε-(弱)有效解、ε-严有效解和 ε-真有效解的标量化结果。

定理 1　设 $\varepsilon\in\boldsymbol{R}^m_{\geqq}$,$\epsilon\leqq\varepsilon_k+\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i$,其中$\mu_i\geqq 0,i\neq k$. 若$(\hat{x},\hat{s})$是($\mathrm{SOP_1}$)的 ϵ-最优解,满足$\hat{s}_i\geqslant\varepsilon_i$,则 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε-弱有效解。

证明　假设 $\hat{x}\notin X_{\varepsilon WE}$,则存在 $x'\in X$,使得$f(x')<f(\hat{x})-\varepsilon$,从而有 $f_i(x')-\hat{s}_i+\varepsilon_i<f_i(\hat{x})-\hat{s}_i\leqslant\sigma_i,i\neq k$,令 $s'_j=\hat{s}_j-\varepsilon_j\geqslant 0,i\neq k$,因此$(x',s')$是($\mathrm{SOP_1}$)的一个可行解。从而$f_k(x')+\sum_{i\neq k}\mu_i s'_i=f_k(x')+\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i-\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i<f_k(\hat{x})-\varepsilon_k-\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i+\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i\leqq f_k(\hat{x})+\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i-\epsilon$, 这与$(\hat{x},\hat{s})$是($\mathrm{SOP_1}$)的 ϵ-最优解矛盾,定理得证。

证毕。

定理 2　设 $\varepsilon\in R^m_{\geqq}$,$\epsilon\leqq\varepsilon_k+\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i$,其中$\mu_i\geqq 0,i\neq k$ 。若$(\hat{x},\hat{s})$是($\mathrm{SOP_1}$)的 ϵ-最优解,满足$\hat{s}_i\geqslant\varepsilon_i$,且 $\hat{x}$ 唯一,则 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε-严有效解。

证明　与定理 1 类似,由 $\hat{x}$ 的唯一性可知 $x'=\hat{x}$,即 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε-严有效解。证毕。

定理 3　设 $\varepsilon\in\boldsymbol{R}^m_{\geqq}$,$\epsilon\leqq\varepsilon_k+\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i$,其中$\mu_i>0,i\neq k$. 若$(\hat{x},\hat{s})$是($\mathrm{SOP_1}$)的 ϵ-最优解,满足$\hat{s}_i\geqslant\varepsilon_i$,则 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε-有效解。

证明　假设 $\hat{x}$ 不是(MOP)的 ε-有效解,则存在 $x'\in X$,使得 $f(x')\leqslant f(\hat{x})-\varepsilon$。

考虑如下两种情况:

(i) $f_k(x')<f_k(\hat{x})-\varepsilon_k$ 成立,且对任意 $i\neq k$, $f_i(x')\leqq f_i(\hat{x})-\varepsilon_i$。从而 $f_i(x')-\hat{s}_i+\varepsilon_i\leqq f_i(\hat{x})-\hat{s}_i\leqslant\sigma_i,i\neq k$,令$s'_j=\hat{s}_j-\varepsilon_j\geqslant 0,i\neq k$,则$(x',s')$是($\mathrm{SOP_1}$)的可行解。因此 $f_k(x')+\sum_{i\neq k}\mu_i s'_i=f_k(x')+\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i-\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i<f_k(\hat{x})-\varepsilon_k-\sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i+\sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i\leqq f_k(\hat{x})+$

$\sum_{i \neq k} \mu_i \hat{s}_i - \epsilon$；

(ii) 存在 $j \neq k$，使得 $f_j(x') < f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j$，由于 $f(x') < f(\hat{x}) - \varepsilon$，因此 $f_i(x') - \hat{s}_i + \varepsilon_i \leqq f_i(\hat{x}) - \hat{s}_i \leqslant \sigma_i, i \neq k, j$；对于 $i \neq j$，令 $\nu = f_i(\hat{x}) - f_i(x') - \varepsilon_i > 0$，使得 $f_j(x') - \hat{s}_j + \varepsilon_j + v_j \leqq f_j(\hat{x}) - \hat{s}_j \leqslant \sigma_j$，可以证明 $\hat{s}_i - \varepsilon_i - \nu_i \geqslant 0$。因此，定义 $s'_i = \begin{cases} \hat{s}_i - \varepsilon_i, \forall i \neq k, j \\ \hat{s}_i - \varepsilon_i - \nu_i, i = j \end{cases}$。故 (x', s') 是 (SOP_1) 的一个可行解。与情况 1 证明类似，由于 $\mu_i > 0, i \neq k$，同理可得 $f_k(x') + \sum_{i \neq k} \mu_i s'_i < f_k(\hat{x}) + \sum_{i \neq k} \mu_i \hat{s}_i - \epsilon$。

两种情况都与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 (SOP_1) 的 ϵ-最优解矛盾，定理得证。

证毕。

定理 4 设 $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^m_{\geqq}$，$\epsilon \leqq \varepsilon_k + \sum_{i \neq k} \mu_i \varepsilon_i$，其中 $\mu_i > 0, i \neq k$. 若 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 (SOP_1) 的 ϵ-最优解，且满足 $\hat{s}_i \geqslant \varepsilon_i$，和 $f_i(\hat{x}) - \hat{s}_i < \sigma_i, \forall i \neq k$，则 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 ε-真有效解。

证明 由定理 3 可知 $\hat{x} \in X_{\varepsilon E}$，下证 $\hat{x}$ 是 ε-真有效解。假定 $\hat{x}$ 不是 ε-真有效解，考虑一正的实数序列 $\{M_\alpha\}$，满足 $\lim_{\alpha \to \infty} M_\alpha = \infty$，其中 α 是常数。那么对任意的 M_α 总存在 $x_\alpha \in X, i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 满足 $f_i(x_\alpha) < f_i(\hat{x}) - \varepsilon_i$ 和 $j \neq i$ 使得 $f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j < f_j(x_\alpha)$ 且满足

$$\frac{f_i(\hat{x}) - \varepsilon_i - f_i(x_\alpha)}{f_j(x_\alpha) - f_j(\hat{x}) + \varepsilon_j} > M_\alpha \quad (1)$$

不失一般性，假定 $\{M_\alpha\}$ 无界且 i 适应于每一个 α。此外，设 $Q = \{j : f_j(x_\alpha) < f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j\}$，考虑如下两种情况：

(i) 当 $k \notin Q$ 时，如果 $j \notin Q \cup \{k\}$，则有 $f_j(x_\alpha) \leqq f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j < \sigma_j + \hat{s}_j - \varepsilon_j$，即

$$f_j(x_\alpha) - \hat{s}_j + \varepsilon_j < \sigma_j, \forall j \notin Q \cup \{k\} \quad (2)$$

如果 $j \in Q$，则 $f_j(x_\alpha) > f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j$，结合不等式 (1)，又因为 $f(X)$ 有界，因此 $\lim_{\alpha \to \infty} f_j(x_\alpha) = f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j < \sigma_j + \hat{s}_j - \varepsilon_j$，由极限定义，则存在 $\alpha_0 > 0$ 使得

$$f_j(x_\alpha) - \hat{s}_j + \varepsilon_j < \sigma_j, \forall \alpha > \alpha_0 \quad (3)$$

因此取 $\hat{\alpha} > \alpha_0$，令 $\bar{x} = x_{\hat{\alpha}}$，$\bar{s}_j = \hat{s}_j - \varepsilon_j - \nu_j$，其中 $\nu_j \in \left(0, \frac{1}{2}(\sigma_j - f_j(\hat{x}) + \hat{s}_j)\right)$。由式 (2) 和式 (3) 可知，$(\bar{x}, \bar{s})$ 是 (SOP_1) 的一个可行解。由于 $k \notin Q$，故 $f_k(\bar{x}) = f_k(x_{\hat{\alpha}}) \leqq f_k(\hat{x}) - \varepsilon_k$，则有 $f_k(\bar{x}) + \sum_{i \neq k} \mu_i \bar{s}_i = f_k(\bar{x}) + \sum_{i \neq k} \mu_i \hat{s}_i - \sum_{i \neq k} \mu_i \varepsilon_i - \sum_{i \neq k} \mu_i \nu_i \leqq f_k(\hat{x}) - \varepsilon_k + \sum_{i \neq k} \mu_i \hat{s}_i - \sum_{i \neq k} \mu_i \varepsilon_i - \sum_{i \neq k} \mu_i \nu_i \epsilon f_k(\hat{x}) + \sum_{i \neq k} \mu_i \hat{s}_i - \epsilon$。这与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 (SOP_1) 的 ϵ-最优解矛盾。

(ii) 当 $k \in Q$ 时，与情况 1 类似，取 $\alpha > \alpha_0$，令 $\bar{x} = x_\alpha$，$\bar{s}_j = \hat{s}_j - \varepsilon_j - \nu_j, \forall j \neq k$，其中 $\nu_j \in \left(0, \frac{1}{2}(\sigma_j - f_j(\hat{x}) + \hat{s}_j)\right)$。因此 $(\bar{x}, \bar{s})$ 是 (SOP_1) 的一个可行解。由于 $k \in Q$，则有 $\lim_{\alpha \to \infty} f_k(x_\alpha) = f_k(\hat{x}) - \varepsilon_k$，也即 $\lim_{\alpha \to \infty} f_k(\hat{x}) - f_k(x_\alpha) = \varepsilon_k$，故 $\lim_{\alpha \to \infty} f_k(\hat{x}) - f_k(x_\alpha) - \epsilon + \sum_{i \neq k} \mu_i \varepsilon_i + \sum_{i \neq k} \mu_i \nu_i = \varepsilon_k + \sum_{i \neq k} \mu_i \varepsilon_i + \sum_{i \neq k} \mu_i \nu_i - \epsilon > 0$，则存在 $\alpha_1 > 0$，使得

$$f_k(x_\alpha) - \sum_{i \neq k} \mu_i \varepsilon_i < f_k(\hat{x}) - \epsilon + \sum_{i \neq k} \mu_i \nu_i, \forall \alpha > \alpha_1 \quad (4)$$

取 $\alpha^* > \max\{\alpha_0, \alpha_1\}$，则 $(x^* = x_{\alpha^*}, s^*)$ 是 (SOP_1) 的一个可行解。其中 $s^* = \hat{s}_j - \varepsilon_j - \nu_j, \forall j \neq k$。结合式 (4)，有 $f_k(x^*) + \sum_{i \neq k} \mu_i s^*_i = f_k(x_{\alpha^*}) + \sum_{i \neq k} \mu_i \hat{s}_i - \sum_{i \neq k} \mu_i \varepsilon_i - \sum_{i \neq k} \mu_i \nu_i \epsilon f_k(\hat{x}) + \sum_{i \neq k} \mu_i \hat{s}_i - \epsilon$。这与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 (SOP_1) 的 ϵ-最优解矛盾，定理得证。

证毕。

注 1 如果目标函数 $f(X)$ 是无界的，则定理 4 不成立。

例令 $X = \{x \in R^2 : -1 < x_1 < 0, x_2 = 1/x_1\}$，考虑 $f(X) = X$ 和多目标问题 $\min_{x \in X} x$。

显然 $f(X)$ 无界，考虑 (SOP) $\min x_1 + \mu_2 s_2$，取 $\sigma_2 = 0, \mu_2 = 1/2$，满足 $x_2 - s_2 \leqslant \sigma_2, s_2 \geqslant 0$。则 $(\hat{x}, \hat{s}) = (-1/2, 1)$ 是 ϵ-最优解，但由于 $f(X)$ 无界，因此 $\min_{x \in X} x$ 的 $X_{\varepsilon PE} = \phi$。因此，(SOP) 的 ϵ-最优解不可能是 (MOP) 的 ε-真有效解。

定理 5　设 $\varepsilon \in \boldsymbol{R}^m_{\geqq}$，$\epsilon \leqq \varepsilon_k + \sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i$，其中 $\mu_i > 0, i\neq k$。若 $\hat{x}\in X$ 是(MOP)的 ε-真有效解，则存在 $\hat{s}\geqslant 0$ 使得 $(\hat{x},\hat{s})$ 是下列(SOP_2)的 ϵ-最优解。

$$(\mathrm{SOP}_2)\ \min f_k(x) + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i$$

$$\text{s.t. } f_i(x) - s_i \leqq \sigma_i, i\neq k$$

$$f_i(x) \geqq \sigma_i - \varepsilon_i, i\neq k$$

$$s_i \geqq 0, i\neq k$$

证明　假设 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$，$\sigma_i := f_i(\hat{x})$，且 $\hat{s}_i = 0, i\neq k$. 则对(SOP_2)的任意可行解 (x,s)，有 $f_i(x) \geqq \sigma_i - \varepsilon_i = f_i(\hat{x}) - \varepsilon_i, i\neq k$；$f_i(x) - s_i \leqq \sigma_i, i\neq k$，因此有 $s_i \geqq -\varepsilon_i$，$\forall i\neq k$。考虑如下两种情况：

(i) 若 $f_k(x) \geqq f_k(\hat{x}) - \varepsilon_k$，则存在 $\mu > 0$，使得 $f_k(x) + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i \geqq f_k(\hat{x}) + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i - \varepsilon_k \geqq f_k(\hat{x}) - \sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i - \varepsilon_k$，由于 $\epsilon \leqq \varepsilon_k + \sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i$，又 $\hat{s}_i = 0$，$\forall i\neq k$。则有：

$$f_k(x) + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i \geqq f_k(\hat{x}) + \sum_{i\neq k}\mu_i \hat{s}_i - \epsilon, \forall \mu > 0 \tag{5}$$

(ii) 若 $f_k(x) < f_k(\hat{x}) - \varepsilon_k$，因为 $\hat{x}\in X_{\varepsilon PE}$，则存在 $M > 0$ 和 $j\neq k$ 满足 $f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j < f_j(x)$，使得 $\frac{f_k(\hat{x}) - f_k(x) - \varepsilon_k}{f_j(x_\alpha) - f_j(\hat{x}) + \varepsilon_j} \leqq M$。取 $\mu > 0$，且满足 $\mu_i \geqq M$，$\forall i\neq k$。假设如果 $f_k(x) + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i < f_k(\hat{x}) - \sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i - \epsilon$，成立，则有 $f_k(x) + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i < f_k(\hat{x}) - \sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i - \varepsilon_k$ 又由于 $s_i \geqq f_i(x) - f_i(\hat{x})$，因此有 $f_k(\hat{x}) - f_k(x) - \varepsilon_k > \sum_{i\neq k}\mu_i s_i + \sum_{i\neq k}\mu_i\varepsilon_i \geqq \sum_{i\neq k}\mu_i\,(f_i(x) - f_i(\hat{x}) + \varepsilon_i) \geqq \mu_i(f_i(x) - f_i(\hat{x}) + \varepsilon_i)$，即 $\frac{f_k(\hat{x}) - f_k(x) - \varepsilon_k}{f_j(x) - f_j(\hat{x}) + \varepsilon_j} > \mu_j \geqq M$。这与 $\hat{x}\in X_{\varepsilon PE}$ 矛盾。因此有以下结论：

$$f_k(x) + \sum_{i\neq k}\mu_i s_i \geqq f_k(\hat{x}) + \sum_{i\neq k}\mu_i\hat{s}_i - \epsilon \tag{6}$$

综上，结合式(5)与式(6)，又由于 (x,s) 是(SOP_2)的任意一可行解，定理得证。

证毕。

注　定理 1—定理 5 推广了文献[14]中的相应结果到近似解的情形。事实上，取 $\varepsilon = 0$，则定理 1 和定理 2 退化为文献[14]中的命题 4.1 和命题 4.2；定理 4 和定理 5 退化为定理 4.1。

3　结束语

利用多目标优化问题的一类组合标量化方法，研究了多目标优化问题的一类新的标量化方法。将剩余变量和传统 ε-约束法标量化模型结合，建立了多目标优化问题 ε-弱有效解，ε-有效解和 ε-真有效解的一些标量化结果。但在实际应用中，还存在着一些不足，包括多目标优化问题近似解的推广，例如 (C,ε) 近似解、E-近似解等的标量化结果的推导和应用，结果表明此组合标量化方法可求得近似解，且是科学合理的。

参考文献(References)：

[1] SAWARAGI Y, NAKAYAM H, TANINO T. Theory of Multiobjective Optimization[M]. Tokyo: Academic Press, 1985: 191—293

[2] EHRGOTT M. MULTICRITERIA. Optimization[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2005: 355—393

[3] BECKMANN M, KUNZI H. P. Multiobjective Programming and Goal Programming[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2009: 121—189

[4] CHANGKONG V, HAIMES Y. Y. Multiobjective Decision Making Theory and Methodology[M]. New York: North Holland, 1983

[5] 林锉云，董家礼. 多目标最优化的方法与理论[M]. 吉林：吉林教育出版社，1992：59—149

LIN S Y, DONG J L. Methods and Theories of Multi-objective Optimization [M]. Jilin: Jilin Educational Press, 1992(in Chinese)

[6] KUTATELADZE S S. Convexε-Programming, Sov[J]. Math Dokl, 1979 (20): 391—393

[7] LORIDAN P. ε-Solutions in Vector Minimization Problems[J]. Optim Theory Appl, 1984(43): 265—276

[8] WHITE D J. Epsilon Efficiency[J]. Optim Theory Appl, 1986 (49):319—337

[9] HELBIG S, PATEVA D. On Several Concepts for ε-Efficiency[J]. OR Spect, 1994 (16): 179—186

[10] LI Z, WANG S. ε-Approximation Solutions in Multiobjective Optimization [J]. Optimization, 1998 (44): 161—174

[11] LIU J C. ε-Properly Efficient Solutions to Nondifferentiable Multiobjective Programming Problems [J]. Applied Mathematics Letters, 1999, 12(6): 109—113

[12] RONG W D, MA Y. ε-Properly Efficient Solutions of Vector Optimization Problems with Set-valued Maps[J]. OR Transactions, 2000, 4(4): 21—32

[13] EHRGOTT M, GANDIBLEUX X. Multiple Criteria Optimization: State of the Art Annotated Bibliongraphic Surveys[J]. Boston: Springer, 2003

[14] EHRGOTT M, RUZIKA S. Improvedε-Constraint Method for Multiobjective Programming[J]. Journal of Optimization Theory & Applications, 2008, 138(3): 375

A Class of Combinatorial Scalarization Methods for Approximate Solutions of Multi-objective Optimization Problems

LIU Jia-xing, ZHANG Qi

(College of Mathmatical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: According to the definition of the approximation solution of multi-objective optimization problem, the nature of the multi-objective optimization problem is discussed, and the approximate solution of multi-objective optimization problem is studied by Ehrgott and Ruzika based on the traditional standardization method combining the remaining variables. The relationship between the approximate effective solution of multi-objective optimization problem and the optimal solution of the calibration problem is established, and in particular, the equivalent relationship between the approximately effective solution and the optimal solution of the corresponding scale optimization problem is obtained. Some of the conclusions are explained by the counterexample, and the conclusions are not necessarily valid if the given conditions are not met, and the main results presented are the improvement and promotion of some existing quantitative results, which provide the theoretical and methodological basis for the optimal algorithm for designing and solving the approximation of multi-objective optimization problems.

Key words: multi-objective optimization; combinatorial scalarization; ε-weakly efficient solutions; ε-effective solution; ε-proper efficient solutions

责任编辑:罗姗姗

引用本文/Cite this paper:

刘佳星,张琦. 多目标优化问题近似解的一类组合标量化方法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(4):34—38

LIU J X, ZHANG Q. A Class of Combinatorial Scalarization Methods for Approximate Solutions of Multi-objective Optimization Problems[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020, 37(4): 34—38