doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0004.005

一类非线性 Schrödinger 耦合系统的正解*

贺书文[1]，文小波[1]，苑东磊[2]
(1. 四川民族学院 理工学院,四川 康定 626001;2. 西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘　要:非线性 Schrödinger 方程被广泛应用于数学物理问题中的量子力学、非线性光学等领域,其中非线性 Schrödinger 耦合系统已成为研究热点,对该系统优化和改进非线性项的条件和带周期函数问题是其中比较困难的部分,针对这种定义在无界区域上的耦合问题,提出了一类带多个不同周期函数的非线性 Schrödinger 耦合系统方程;基于变分法和一些分析技巧,将求该类系统的解转化为求对应能量泛函的临界点问题;当该类系统满足适当条件时,可以验证其能量泛函满足山路几何结构,得到一组有界非负的(Ce)c 序列,再利用集中紧性原理分两种情形得到其非平凡非负解的存在性;最后由强极大值原理获得该类系统正解的存在性,推广了已有的研究结果。

关键词:Schrödinger 耦合系统;变分法;非平凡正解

中图分类号:O231.3　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2020)04-0028-06

0　引　言

考虑下面的非线性 Schrödinger 耦合系统:

$$\begin{cases}-\Delta u+V_1(\boldsymbol{x})u=f_1(\boldsymbol{x},u)+\lambda(\boldsymbol{x})v,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N\\ -\Delta v+V_2(\boldsymbol{x})v=f_2(\boldsymbol{x},v)+\lambda(\boldsymbol{x})u,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N\end{cases}\tag{1}$$

其中 $N\geqslant 3$,对于 $i=1,2$,$V_i(\boldsymbol{x})$,$f_i(\boldsymbol{x},\cdot)$ 和 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 均为正的连续函数。这类系统的模型来源于量子力学和非线性光学[1-3],例如光脉冲在非线性双核定向耦合器中的传播。当 $\lambda(x)=0$ 时,式(1)便退化成两个一般的 Schrödinger 方程,这类方程已经被广泛研究[4-6]。近年来,文献[1]研究了如下 Schrödinger 耦合系统:

$$\begin{cases}-\Delta u+u=(1+a(\boldsymbol{x}))|u|^{p-1}u+\lambda v,\boldsymbol{x}\in R^N\\ -\Delta v+v=(1+b(\boldsymbol{x}))|v|^{p-1}v+\lambda u,\boldsymbol{x}\in R^N\end{cases}\tag{2}$$

当 $N=1$,$a(\boldsymbol{x}),b(\boldsymbol{x})\in L^\infty(\boldsymbol{R}^N)$,$\lim\limits_{|x|\to+\infty}a(\boldsymbol{x})=\lim\limits_{|x|\to+\infty}b(\boldsymbol{x})=0$,且 λ 充分小时,证明了式(2)非平凡解的存在性。当 $N\geqslant 2$ 时,在其他一些假设条件下,文献[3]获得了式(2)正基态解的一些存在性结果。更多地,如果 $(1+a(\boldsymbol{x}))|u|^{p-1}u$ 和 $(1+b(\boldsymbol{x}))|v|^{p-1}v$ 分别被次临界项 $f(u)$ 和 $g(v)$ 替换,当 $N\geqslant 3$,$u(\boldsymbol{x})$、$v(\boldsymbol{x})\to 0$,$|x|\to+\infty$ 且 $\lambda\in(0,1)$ 时,文献[7]证明了式(2)存在正的径向对称基态解。受以上文献启发,本文考虑一个更一般的 Schrödinger 耦合系统正解的存在性,将已有的系统推广到带有多个不同周期函数的非线性 Schrödinger 耦合系统的情形,现对

收稿日期:2019-10-21;**修回日期**:2019-11-30.
* **基金项目**:四川省教育厅项目(16ZB0367);四川民族学院科研项目(XYZB16003);四川民族学院教改项目“概率论与数理统计课程应用模式下的教学改革”.
作者简介:贺书文(1991—),男,四川达州人,硕士,从事非线性泛函分析研究.

$V_i(\boldsymbol{x})$和$\lambda(\boldsymbol{x})$作如下假设:

(H1)　$V_i(\boldsymbol{x}),\lambda(\boldsymbol{x})\in C(\boldsymbol{R}^N,\mathbf{R}^+)\cap L^\infty(\boldsymbol{R}^N)$在每个$x_1,x_2,\cdots,x_N$上均为1-周期函数。

(H2)　存在$\theta\in(0,1)$,使得

$$\lambda(\boldsymbol{x})\leqslant\theta\sqrt{V_1(\boldsymbol{x})V_2(\boldsymbol{x})},\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N$$

此外,$f_i\in C(\boldsymbol{R}^N\times\boldsymbol{R}^+\boldsymbol{R})$及其原函数$F_i(\boldsymbol{x},t)=\int_0^t f_i(\boldsymbol{x},s)\mathrm{d}s$满足如下条件:

(F1)　对$\forall(\boldsymbol{x},t)\in\boldsymbol{R}^N\times R^+$,$f_i(\boldsymbol{x},t)>0$,对$\forall(\boldsymbol{x},t)\in\boldsymbol{R}^N\times\mathbf{R}^-$,$f_i(\boldsymbol{x},t)=0$,且$f_i(\boldsymbol{x},t)$在每个$x_1,x_2,\cdots,x_N$上均为1-周期函数。

(F2)　$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f_i(\boldsymbol{x},t)}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f_i(\boldsymbol{x},t)}{t^{2^*-1}}=0$ 关于$\boldsymbol{x}$一致地成立于$x\in\boldsymbol{R}^N$。

(F3)　$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{F_i(\boldsymbol{x},t)}{t^2}=+\infty$ 关于$\boldsymbol{x}$一致地成立于$x\in\boldsymbol{R}^N$。

(F4)　存在$\sigma,r>0$和$\kappa>\max\left\{1,\dfrac{N}{2}\right\}$,使得对$t\geqslant r$和$\forall(\boldsymbol{x},t)\in\boldsymbol{R}^N\times\mathbf{R}^+$,有

$$F_i^\kappa(\boldsymbol{x},t)\leqslant\sigma t^{2\kappa}\widetilde{F}_i(\boldsymbol{x},t)$$

其中$\widetilde{F}_i(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{2}f_i(\boldsymbol{x},t)t-F_i(\boldsymbol{x},t)>0$。

本文的主要结果:

定理 1　假设条件(H1)(H2)成立,则式(1)有一个非平凡正解。

注 1　(i) 由式(1)的形式知,它不存在半平凡解$(u,0)$或$(0,v)$,否则没有意义。

(ii) 条件(F4)已经在文献[5]中被介绍,对于$i=1,2$,对$\forall(\boldsymbol{x},t)\in\mathbf{R}^N\times\boldsymbol{R}^+$,如果取

$$f_i(\boldsymbol{x},t)=p(\boldsymbol{x})t^{\alpha_i}\ln(1+t),\alpha_i\in[2,2^*-1)$$

其中$p(\boldsymbol{x})\geqslant2$为1-周期函数,不难验证$f_i(\boldsymbol{x},t)$满足条件(F1)(F4),但不满足(AR)条件。

1　预备知识

为了方便,记$C,C_\varepsilon,C_k(k=1,2,\cdots)$为不同的正常数,$|\cdot|_s$为$L^s(\boldsymbol{R}^N)(1\leqslant s\leqslant\infty)$中的范数,$o_n(1)$为当$n\to+\infty$时的高阶无穷小量,$B_r(x)$为一个球心在$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N$且半径为$r>0$的开球。最后,记$w^\pm=\max\{\pm w,0\}$,$w=w^+-w^-$,$\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$,且$\mathbf{R}^-=(-\infty,0]$。

下面定义通常的Sobolev空间$H^1(\boldsymbol{R}^N)$的内积和范数分别为

$$(u,v)=\int_{\boldsymbol{R}^N}(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}\boldsymbol{x},\|u\|=(u,v)^{\frac{1}{2}}$$

定义空间$H_M^1(\boldsymbol{R}^N)=\{u\in H^1(\boldsymbol{R}^N):\|u\|_M^2<+\infty\}$,其中$\|u\|_M=(\int_{\boldsymbol{R}^N}(|\nabla u|^2+Mu^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$表示相应的范数,$M$为正函数$V_i(\boldsymbol{x})$(简记为$V_i$),$i=1,2$。同时,定义$E=H_{V_1}^1(\boldsymbol{R}^N)\times H_{V_2}^1(\boldsymbol{R}^N)$的范数为

$$\|(u,v)\|=(\|u\|_{V_1}^2+\|v\|_{V_2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

并记E^*为E的对偶空间。由条件(H1)易知,对$i=1,2$,$\|\cdot\|_{V_i}$与$\|\cdot\|$等价,且$H_{V_i}^1(\boldsymbol{R}^N)$连续地嵌入到$L^q(\boldsymbol{R}^N)$中,$2\leqslant q\leqslant2^*$,其中$2^*=\dfrac{2N}{N-2}$为临界Sobolev指数。

为了获得式(1)的非平凡正解,在E上定义如下能量泛函:

$$\Phi(u,v)=\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\int_{\boldsymbol{R}^N}(F_1(\boldsymbol{x},u)+F_2(\boldsymbol{x},v))\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\boldsymbol{R}^N}\lambda(\boldsymbol{x})uv\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

由临界点理论知,式(1)的解与泛函$\Phi\in C^1(E,\boldsymbol{R})$的临界点一一对应。

2　主要结果的证明

为了证明定理1,将借助下面的引理来完成。

引理 1　假设条件(H1)(H2)的(F1)—(F3)成立,则泛函Φ满足山路结构:

(I1)　存在常数$\alpha,\rho_0>0$,如果$\|u\|=\rho_0$,则有$\Phi(u)\geqslant\alpha$。

(I2) 存在 $e\in E$,使得 $\|e\|>\rho_0$ 且 $\Phi(e)<0$。

证明 事实上,由条件(F1)—(F2)知,对 $\forall\,\varepsilon>0,(\boldsymbol{x},t)\in\boldsymbol{R}^N\times\mathbf{R}$ 及 $i=1,2$,有

$$0\leqslant f_i(\boldsymbol{x},t)\leqslant\varepsilon|t|+C_\varepsilon|t|^{2^*-1}$$

$$0\leqslant F_i(\boldsymbol{x},t)\leqslant\varepsilon|t|^2+C_\varepsilon|t|^{2^*}\tag{3}$$

对 $\forall\,(u,v)\in E$,由条件(H1)和(H2)知

$$2\int_{\boldsymbol{R}^N}\lambda(\boldsymbol{x})uv\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\theta\int_{\boldsymbol{R}^N}\sqrt{V_1(\boldsymbol{x})V_2(\boldsymbol{x})}\,|uv|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\theta\int_{\boldsymbol{R}^N}(V_1(\boldsymbol{x})|u|^2+V_2(\boldsymbol{x})|v|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\theta\|(u,v)\|^2\tag{4}$$

这样,结合式(3)(4)和 Sobolev 嵌入不等式可得

$$\Phi(u,v)\geqslant\frac{1}{2}\|(u,v)\|^2-\int_{\boldsymbol{R}^N}[\varepsilon(|u|^2+|v|^2)+C_\varepsilon(|u|^{2^*}+|v|^{2^*})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\frac{\theta}{2}\|(u,v)\|^2\geqslant\left(\frac{1-\theta}{2}-C\varepsilon\right)\|(u,v)\|^2-C\|(u,v)\|^{2^*}$$

当 ε 足够小时,使得 $\frac{1-\theta}{2}-C\varepsilon>0$,则存在 $\alpha,\rho_0>0$,使得 $\Phi(u,v)\geqslant\alpha,\ \forall\,\|(u,v)\|=\rho_0$。

此外,固定 $(\varphi,\phi)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^N)\times C_0^\infty(\boldsymbol{R}^N)$ 且 $\varphi,\phi>0$,利用条件(H1)和(F3),当 t 充分大时,有

$$\frac{\Phi(t\varphi,t\phi)}{t^2}=\frac{1}{2}\|(\varphi,\phi)\|^2-\int_{\boldsymbol{R}^N}\left(\frac{F_1(\boldsymbol{x},t\varphi)}{(t\varphi)^2}\varphi^2+\frac{F_2(\boldsymbol{x},t\phi)}{(t\phi)^2}\phi^2+\lambda(\boldsymbol{x})\varphi\phi\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\to-\infty$$

那么存在 $t_0>0$,使得 $\|(t_0\varphi,t_0\phi)\|>\rho_0$ 且 $\Phi(t_0\varphi,t_0\phi)<0$,这时只需取 $e=(t_0\varphi,t_0\phi)$ 即可。

注 2 在引理 1 成立的条件下,运用一个带(Ce)条件的山路定理[8]可知,存在一个 $(\mathrm{Ce})_c$ 序列 $\{(u_n,v_n)\}\subset E$,即满足

$$\begin{cases}\Phi(u_n,v_n)\to c\geqslant\alpha>0\\(1+\|(u_n,v_n)\|)\|\Phi'(u_n,v_n)\|_{E^*}\to0\end{cases}\tag{5}$$

其中

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\Phi(\gamma(t))$$

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],E):\gamma(0)=(0,0),\gamma(1)=e\}$$

引理 2 假设条件(H1)(H2)和(F1)—(F4)成立,则满足式(5)的 $(\mathrm{Ce})_c$ 序列 $\{(u_n,v_n)\}$ 在 E 中有界且可以取得非负。

证明 对满足式(5)的所有 $(\mathrm{Ce})_c$ 序列 $\{(u_n,v_n)\}\subset E$,有

$$c+o_n(1)=\Phi(u_n,v_n)-\frac{1}{2}[\Phi'(u_n,v_n),(u_n,v_n)]=\int_{\boldsymbol{R}^N}(\tilde{F}_1(\boldsymbol{x},u_n)+\tilde{F}_2(\boldsymbol{x},v_n))\mathrm{d}\boldsymbol{x}\tag{6}$$

先用反证法证明 $\{(u_n,v_n)\}$ 的有界性。假设 $\|(u_n,v_n)\|\to+\infty$,且令 $w_n=\frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|},z_n=\frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|}$,则 $\|w_n\|_{V_1}^2+\|z_n\|_{V_2}^2=1$,必要时取子序列,那么假设 $(w_n,z_n)\xrightarrow{弱}(w,z)$ 于 E,$(w_n,z_n)\to(w,z)$ 于 $L_{loc}^q(\boldsymbol{R}^N)\times L_{loc}^q(\boldsymbol{R}^N)(\forall\,q\in[2,2^*))$,并且 $(w_n(\boldsymbol{x}),z_n(\boldsymbol{x}))\to(w(\boldsymbol{x}),z(x))$ a. e. 于 $\boldsymbol{R}^{2N}$。由条件(F1)和式(4)(5)知

$$0<\frac{1-\theta}{2}\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{F_1(\boldsymbol{x},u_n)+F_2(\boldsymbol{x},v_n)}{\|(u_n,v_n)\|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\tag{7}$$

对 $\forall\,\beta>0,i=1,2$,定义

$$g_i(\beta)=\inf\{\tilde{F}_i(\boldsymbol{x},t):\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N,t\geqslant\beta\}\tag{8}$$

由条件(F1)和(F3)—(F4)知,对 $t\geqslant\beta\geqslant r>0$ 和 $i=1,2$,当 $t\to+\infty$ 时,有

$$\sigma\tilde{F}_i(\boldsymbol{x},t)\geqslant\left(\frac{F_i(\boldsymbol{x},t)}{t^2}\right)^\kappa\to+\infty$$

则对 $\forall\,\beta>0,g_i(\beta)>0,\lim_{n\to+\infty}g_i(\beta)=+\infty$。联系条件(F4),对 $b>a\geqslant0$,设 $\Omega_n(a,b)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N:a\leqslant|u(\boldsymbol{x})|\leqslant b\}$,且

$$C_a^b=\inf\left\{\frac{\tilde{F}_i(\boldsymbol{x},t)}{t^2}:\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^N,a\leqslant t\leqslant b\right\}>0\quad i=1,2\tag{9}$$

由式(6)(8)和(9)可知

$$c+o_n(1)=\left(\int_{\Omega_n(0,a)}+\int_{\Omega_n(a,b)}+\int_{\Omega_n(b,+\infty)}\right)(\tilde{F}_1(\boldsymbol{x},u_n)+\tilde{F}_2(\boldsymbol{x},v_n))\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant C_a^b\int_{\Omega_n(a,b)}(|u_n|^2+|v_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}+$$

$$(g_1(b)+g_2(b))|\Omega_n(b,+\infty)|$$

则有

$$\max\{C_a^b\int_{\Omega_n(a,b)}(|u_n|^2+|v_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x},\ (g_1(b)+g_2(b))|\Omega_n(b,+\infty)|\}\leqslant C \tag{10}$$

那么当 $b\to+\infty$ 时,有

$$|\Omega_n(b,+\infty)|\leqslant\frac{C}{g_1(b)+g_2(b)}\to 0 \tag{11}$$

对每一个 $\alpha_1\in[2,2^*)$,由式(11)及 Hölder 不等式知,当 $b\to+\infty$ 时,

$$\int_{\Omega_n(b,+\infty)}|w_n|^{\alpha_1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\left(\int_{\Omega_n(b,+\infty)}|w_n|^{2^*}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{\alpha_1}{2^*}}\times |\Omega_n(b,+\infty)|^{\frac{2^*-\alpha_1}{2^*}}\to 0 \tag{12}$$

类似地,对 $\forall\alpha_2\in[2,2^*)$,当 $b\to+\infty$ 时,可得到

$$\int_{\Omega_n(b,+\infty)}|z_n|^{\alpha_2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\to 0 \tag{13}$$

更多地,由式(10)可知,当 n 充分大时,有

$$\int_{\Omega_n(a,b)}(|w_n|^2+|z_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{1}{\|(u_n,v_n)\|^2}\int_{\Omega_n(a,b)}(|u_n|^2+|v_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\frac{C}{C_a^b\|(u_n,v_n)\|^2}\to 0 \tag{14}$$

取 $\varepsilon>0$,由条件(F2)知,存在 $a_\varepsilon>0$,使得对 $\forall a_\varepsilon\geqslant t\geqslant 0$,有 $0\leqslant F_i(\boldsymbol{x},t)\leqslant\varepsilon t^2$,$i=1,2$,则对每个 n,有

$$\int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)}\frac{F_1(\boldsymbol{x},u_n)+F_2(\boldsymbol{x},v_n)}{\|(u_n,v_n)\|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)}\frac{F_1(\boldsymbol{x},u_n)+F_2(\boldsymbol{x},v_n)}{|u_n|^2+|v_n|^2}(|w_n|^2+|z_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\varepsilon\int_{\Omega_n(0,a_\varepsilon)}(|w_n|^2+|z_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\varepsilon \tag{15}$$

又由条件(F1)和(F2)知,$0\leqslant F_i(\boldsymbol{x},t)\leqslant C_1t^2$,$i=1,2$,那么对 $\forall x\in\Omega_n(a_\varepsilon,b_\varepsilon)$,由式(14)可得,存在 $N_0>0$,使得当 $n\geqslant N_0$ 时,有

$$\int_{\Omega_n(a_\varepsilon,b_\varepsilon)}\frac{F_1(\boldsymbol{x},u_n)+F_2(\boldsymbol{x},v_n)}{\|(u_n,v_n)\|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant 2C_1\int_{\Omega_n(a_\varepsilon,b_\varepsilon)}(|w_n|^2+|z_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\varepsilon \tag{16}$$

现设 $\kappa'=\frac{\kappa}{\kappa-1}\in\left(1,\frac{2^*}{2}\right)$,并记 $\Omega'=\Omega_n(b_\varepsilon,+\infty)$,则由条件(F1)(F4),式(10)(12)(13)及 Hölder 不等式可知,对每个 n,当 $b_\varepsilon\to+\infty$ 时,经整理可得:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega'}\frac{F_1(\boldsymbol{x},u_n)+F_2(\boldsymbol{x},v_n)}{\|(u_n,v_n)\|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\\&\int_{\Omega'}\left(\frac{F_1(\boldsymbol{x},u_n)}{|u_n|^2}+\frac{F_2(\boldsymbol{x},v_n)}{|v_n|^2}\right)(|w_n|^2+|z_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\\&\left[\left(\int_{\Omega'}\left(\frac{F_1(\boldsymbol{x},u_n)}{|u_n|^2}\right)^{\kappa}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa}}+\left(\int_{\Omega'}\left(\frac{F_2(x,v_n)}{|v_n|^2}\right)^{\kappa}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\right]\times\\&\left[\left(\int_{\Omega'}|w_n|^{2\kappa'}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa'}}+\left(\int_{\Omega'}|z_n|^{2\kappa'}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa'}}\right]\leqslant\\&\left[\left(\int_{\Omega'}\sigma\tilde{F}_1(\boldsymbol{x},u_n)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa}}+\left(\int_{\Omega'}\sigma\tilde{F}_2(\boldsymbol{x},v_n)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\right]\times\\&\left[\left(\int_{\Omega'}|w_n|^{2\kappa'}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa'}}+\left(\int_{\Omega'}|z_n|^{2\kappa'}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa'}}\right]\leqslant\\&C_2\left[\left(\int_{\Omega'}|w_n|^{2\kappa'}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa'}}+\left(\int_{\Omega'}|z_n|^{2\kappa'}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{\kappa'}}\right]<\varepsilon\end{aligned} \tag{17}$$

最后由式(15)—式(17)知

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\boldsymbol{R}^N}\frac{F_1(\boldsymbol{x},u_n)+F_2(\boldsymbol{x},v_n)}{\|(u_n,v_n)\|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$$

这与式(7)矛盾,从而得证序列 $\{(u_n,v_n)\}$ 在 E 中有界。

下证有界的 $(\mathrm{Ce})_c$ 序列 $\{(u_n,v_n)\}$ 可以取得非负。由条件(F1)和式(4)式(5)知

$$\begin{aligned}o_n(1)&=[\Phi'(u_n,v_n),(-u_n^-,-v_n^-)]=\\&\|(u_n^-,v_n^-)\|^2+\int_{\boldsymbol{R}^N}[f_1(\boldsymbol{x},u_n)u_n^-+\\&f_2(\boldsymbol{x},v_n)v_n^-+\lambda(\boldsymbol{x})(u_nv_n^-+v_nu_n^-)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\\&\|(u_n^-,v_n^-)\|^2-2\int_{\boldsymbol{R}^N}\lambda(\boldsymbol{x})u_n^-v_n^-\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\\&(1-\theta)\|(u_n^-,v_n^-)\|^2\end{aligned}$$

从而推出 $\|(u_n^-,v_n^-)\|=o_n(1)$,则易得到当 $n\to+\infty$ 时,$\Phi(u_n^+,v_n^+)\to c$ 且 $\|\Phi'(u_n^+,v_n^+)\|_{E^*}\to 0$,这样,$\{(u_n^+,v_n^+)\}$ 就是 E 中的一个非负有界的 $(\mathrm{Ce})_c$ 序列。

定理 1 的证明 由引理 2 知,存在一个有界非负序列 $\{(u_n,v_n)\}\subset E$,使得 $\Phi(u_n,v_n)\to c$ 且 $\|\Phi'(u_n,v_n)\|\to 0$,必要时取子序列,则存在一组非负函数对 $(u,v)\in E$,使得 $(u_n,v_n)\xrightarrow{弱}(u,v)$ 于 E,$(u_n,v_n)\to(u,v)$ 于 $L^q_{loc}(\boldsymbol{R}^N)\times L^q_{loc}(\boldsymbol{R}^N)$ $(\forall q\in[2,2^*))$,$(u_n(\boldsymbol{x}),v_n(\boldsymbol{x}))\to(u(\boldsymbol{x}),v(\boldsymbol{x}))$ a. e. 于 $\boldsymbol{R}^{2N}$,对 $\forall(\varphi,\phi)\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^N)\times C_0^\infty(\boldsymbol{R}^N)$,有

$$[\Phi'(u_n,v_n),(\varphi,\phi)]+o_n(1)=[\Phi'(u,v),(\varphi,\phi)]=0$$

即 (u,v) 是式(1)的一个解。又由注 1 知,式(1)不存在半平凡解,如果 $u\neq 0$ 且 $v\neq 0$,(u,v) 自然是式(1)的非平凡非负解,如果 $u=0$ 且 $v=0$,则假设

$$\beta=\limsup_{n\to+\infty}\sup_{y\in\boldsymbol{R}^N}\int_{B_1(y)}(|u_n|^2+|v_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$$

由条件(F1)(F2)知,对 $i=1,2$,$p\in(2,2^*)$ 及 $\forall\varepsilon>0$,可得

$$0\leqslant f_i(\boldsymbol{x},t)\leqslant\varepsilon(|t|+|t|^{2^*-1})+C_\varepsilon|t|^{p-1},\ \forall t>\mathbf{R}$$

$$0\leqslant F_i(\boldsymbol{x},t)\leqslant\varepsilon(|t|^2+|t|^{2^*-1})+C_\varepsilon|t|^{p},\ \forall t>\mathbf{R}$$

然后类似于文献[6,9]中的证明方法,由集中紧性原理[10]可知,这种情形不存在,因此 $\beta>0$。

必要时取子序列(仍记为 $\{(u_n,v_n)\}$),则存在常数 $r_0>0$ 和 $\{y_n\}\subset\boldsymbol{Z}^N$ 使得

$$\int_{B_{r_0}(0)}(|\tilde{u}_n|^2+|\tilde{v}_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{B_{r_0}(y_n)}(|u_n|^2+|v_n|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\frac{\beta}{2}\tag{18}$$

其中 $(\tilde{u}_n(\boldsymbol{x}),\tilde{v}_n(\boldsymbol{x}))=(u_n(\boldsymbol{x}+y_n),v_n(\boldsymbol{x}+y_n))$,由条件(H1)和(F1)可知,如果 $(u,v)\mapsto(u(\cdot-y),v(\cdot-y))$ $(y\in\mathbf{Z}^N)$,则 Φ 是不变的,从而可推出 $\|(u_n,v_n)\|=\|(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\|$,且

$$\Phi(u_n,v_n)=\Phi(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\to c$$

$$(1+\|(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\|)\|\Phi'(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\|_{E^*}\to 0$$

必要时取子序列,不难知道存在一组非负函数 $(\tilde{u},\tilde{v})\in E$,使得 $(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\xrightarrow{弱}(\tilde{u},\tilde{v})$ 于 E,$(\tilde{u}_n,\tilde{v}_n)\to(\tilde{u},\tilde{v})$ 于 $L^q_{loc}(\boldsymbol{R}^N)\times L^q_{loc}(\boldsymbol{R}^N)$ $(\forall q\in[2,2^*))$,且 $(\tilde{u}_n(\boldsymbol{x}),\tilde{v}_n(\boldsymbol{x}))\to(\tilde{u}(\boldsymbol{x}),\tilde{v}(\boldsymbol{x}))$ a. e. 于 $\boldsymbol{R}^{2N}$,再结合式(18)可推知 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 是 Φ 的一个非平凡非负临界点。

总之,式(1)总存在一个非平凡非负解,记为 (u_0,v_0),最后由强极大值原理[11]知,u_0 和 v_0 均为正。

3 结束语

带有多个不同周期函数且具有非线性项的耦合系统解的存在性具有很强的物理意义。基于变分法,利用临界点理论和强极大值原理可以获得这类系统正解的存在性。后面的工作将研究带有多个渐近周期函数或者具有临界增长项的解的存在性和相关性态。

参考文献(References):

[1] AMBROSETTI A. Remarks on Some Systems of Nonlinear Schrödinger Equations[J]. Fixed Point Theory Appl, 2008, 12(4):35—46

[2] AKHMEDIEV N, ANKIEWICZ A. Novel Soliton States and Bifurcation Phenomena in Nonlinear Fiber Couplers [J]. Physrev Lett, 1993,70(4): 2395—2398

[3] AMBROSETTI A, CERAMI G, RUIZ D. Solitons of Linearly Coupled Systems of Semilinear Non-Autonomous Equations on R^n [J]. J Funct Anal, 2008, 254 (2): 2816—2845

[4] SZULKIN A, WETH T. Ground State Solutions for Some Indefinite Variational Problems[J]. J Funct Anal, 2009, 257(8):3802—3822

[5] TANG X H. Infinitely Many Solutions for Semilinear Schrödinger Equations with Sign-changing Potential and Nonlinearity[J]. J Math Anal Appl, 2013, 401 (1): 407—415

[6] LIU J, LIAO J F, TANG C L. A Positive Ground State Solution for a Class of Asymptotically Periodic Schrödinger Equations[J]. Comput Math Appl,2016,71(4):965—976

[7] CHEN Z J, ZOU W M. On Linearly Coupled Schrödinger Systems[J]. Proc Amer Math Soc, 2014, 142 (1): 323—333

[8] SCHECHTER M. A Variation of the Mountain Pass Lemma and Applications[J]. London Math Soc, 1991, 44(2): 491—502

[9] 贺书文, 商彦英, 一类带有周期位势的分数阶耦合系统的正基态解 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(2): 64—69

HE S W,SHANG Y Y. Positive Ground State Solutions for A Class of Fractional Coupled System with Periodlc Potentials[J]. Journal of Southwest University (Natcral Science Edition),2019,41(2):64—69(in Chinese)

[10] WILLEM M. Minimax Theorems[M]. Beijing:Birkhäuser Verlay Basel,1996

[11] VAZQUEZ J L. A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations[J]. Appl Math Optim, 1984, 12(1): 191—202

Positive Solutions of a Class of Nonlinear Schrödinger Coupled Systems

HE Shu-wen[1] ,WEN Xiao-bo[1] ,YUAN Dong-lei[2]

(1. School of Science and Technology,Sichuan Minzu College,Sichuan Kangding 626001, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715,China)

Abstract:The nonlinear Schrödinger equations are widely used in the fields of quantum mechanics, nonlinear optics, etc. in mathematical physics problems, the nonlinear Schrödinger coupled systems have become a research hotspot. The conditions for the optimization and improvement of the nonlinear terms and the periodic function problems are among more difficult parts, a class of nonlinear Schrödinger coupled system equations with multiple periodic functions is proposed for the coupling problem of this definition on unbounded regions. Based on variational method and some analytical techniques, the solutions of this kind of systems are transformed into the critical points problem of the corresponding energy functional; when the system satisfies the appropriate conditions, it can be verified that the energy functional satisfies the mountain geometry, and a set of bounded non-negative (Ce)c sequences is obtained and reused. The compactness principle is used in two cases to obtain the existence of non-trivial non-negative solutions. Finally, the existence of positive solutions of such systems is obtained by the strong maximum principle,it promotes the existing research results.

Key words:Schrödinger coupled systems; variational method; non-trivial positive solution

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

贺书文,文小波,苑东磊. 一类非线性 Schrödinger 耦合系统的正解[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(4):28—33

HE S W,WEN X B,YUAN D L. Positive Solutions of a Class of Nonlinear Schrödinger Coupled Systems[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(4):28—33