doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0003.012

Hausdorff 空间 Borel σ-代数上的集值集函数的 Alexandroff 型定理*

孙 荣[a,b]
(重庆工商大学 a.数学与统计学院;b.社会经济应用统计重庆市重点实验室,重庆 400067)

摘 要:在比 Gavrilut 等学者提出的更为广义的紧致条件的基础上,进一步研究了集值集函数的抽象正则性,研究了抽象正则性与连续性等性质之间的关系,以及在局部紧第二可数 Hausdorff 空间 Borel σ-代数上的集值集函数的 Alexandroff 型定理。

关键词:集值集函数; Hausdorff 空间; Alexandroff 型定理; 紧系; 抽象正则性

中图分类号:O174.12 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2020)03-0075-06

0 引 言

正则性是测度的一个非常重要的连续性质,它连接了测度理论与拓扑。经典的 Alexandroff 型定理[1]阐述了这样一个结论:在一个紧的 Hausdorff 空间支集形成的域上正则测度是可数可加的。此后许多学者继续从事着这一领域的研究。文献[2-9]研究了模糊测度的 Alexandroff 型定理; Kawabe[10-13]等研究了 Riesz 空间值测度的 Alexandroff 型定理;文献[14-23]研究了集值测度的 Alexandroff 型定理。本文提出一种更为广义的紧致条件,进一步研究了符合集值集函数的抽象正则性,建立了在局部紧第二可数 Hausdorff 空间 Borel σ-代数上的复合集值集函数的 Alexandroff 型定理。

1 符号表示及定义

文中 $\mathbf{N}$ 表示自然数集,Ω 是任意的非空集,τ 是定义在 Ω 上的一个拓扑,Σ 是 Ω 的支集形成的 σ-域,θ 是由 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的函数集,X 是一个实的赋范空间,$P_0(X)$ 表示 X 的非空集集族,$P_f(X)$ 表示 X 的非空闭集集族,$P_{bf}(X)$ 表示 X 的非空有界闭集集族。若 $x\in X$,A 与 $B\in P_0(X)$,定义

$$d(x,A)=\inf_{y\in A}\|x-y\|$$

$$h(A,B)=\max(e(A,B),e(B,A))$$

$$\forall A,B\in P_f(X),\ e(A,B)=\sup_{y\in B}d(y,A)$$

众所周知,h 是 $P_f(X)$ 上的伪度量,在 $P_{bf}(X)$ 上是一个度量,称作 Hausdorff 度量,$|A|$ 表示 $h(A,\{0\})$。

若 X 是完备的,则 $P_f(X)$ 完备。在 $P_{bf}(X)$ 上 h 变成一个度量,在 $P_0(X)$ 上定义 Minkowski 加法 $\dot{+}$:

$$A\dot{+}B=\overline{A+B},\ \forall A,B\in P_0(X)$$

这里 $A+B=\{x+y;x\in A,y\in B\}$,$\overline{A+B}$是 $A+B$ 关于范数生成拓扑的闭包。

由上述定义,易得:

收稿日期:2019-08-19;修回日期:2019-10-14.
* 基金项目:国家社会科学基金项目资助(19BTJ020).
作者简介:孙荣(1973—),男,四川宣汉人,副教授,硕士生导师,从事应用统计研究.

(i) $h(A,B)=h(\bar{A},\bar{B})$,这里 $\bar{A}$ 是 A 的闭包。

(ii) $e(A,B)=0$,因此 $h(A,B)=e(B,A)$, $\forall A,B\in P_f(X)$,且 $A\subseteq B$。

(iii) $e(A,B)\leqslant e(A,C)+e(C,B)$, $h(A,B)\leqslant h(A,C)+h(C,B)$, $\forall A,B,C\in P_f(X)$。

(iv) 如果 $A,B\in P_f(X)$,有 $A\subseteq B$,则 $|A|\leqslant|B|$。

(v) $h(A+C,B+C)\leqslant h(A,B)$, $\forall A,B,C\in P_f(X)$。

定义 1 集值集函数 $\mu:\Sigma\to P_f(X)$ 被称为

(1) 关于 h 增收敛的,如果对每一单增的集序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma, A_n\nearrow A\in\Sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty}h(\mu(A_n),h(A))=0$。

(2) 关于 h 降收敛的,如果对每一降的集序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma, A_n\searrow A\in\Sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty}h(\mu(A_n),h(A))=0$。

(3) i) 单调的,如果 $\forall A,B\in\Sigma$,且 $A\subset B$,有 $\mu(A)\subset\mu(B)$。

ii) 模糊的,如果它是满足增收敛与降收敛且 $\mu(\varnothing)=\{0\}$。

(4) 次可加(超可加)的,如果 $\forall A,B\in\Sigma, A\cap B=\varnothing$,有 $\mu(A\cup B)\subseteq\mu(A)\dot{+}\mu(B)$, $\mu(A)\dot{+}\mu(B)\subseteq\mu(A\cup B)$。

(5) 可加的,如果它是超可加与次开加的。

(6) 向上自连续的,如果 $\forall A\in\Sigma$ 和 $\forall\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$,当 $\lim\limits_{n\to\infty}|\mu(B_n)|=0$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}h(\mu(A\cup B_n),h(A))=0$。

(7) 关于 h 是穷尽的,如果对每两两不相交的集序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$,满足 $\lim\limits_{n\to\infty}|\mu(A_n)|=0$。

(8) 关于 h 是序连续的,如果对每一集序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$,且 $A_n\searrow\varnothing$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}|h(\mu(A_n)|=0$。

(9) 关于 h 是强序连续的,如果对每一集序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$,且 $A_n\searrow A$, $\mu(A)=\{0\}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}|h(\mu(A_n)|=0$。

(10) 双零可加的,如果 $\forall A,B\subset\Sigma$,且 $\mu(A)=\mu(B)=\{0\}$,有 $\mu(A\cup B)=\{0\}$。

(11) 渐进零可加的,如果对每一集序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}|\mu(A_n)|=\lim\limits_{n\to\infty}|\mu(B_n)|\to0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}|\mu(A_n\cup B_n)|\to0$。

定义 2[23] 称集值集函数 μ 具有伪度量生成性质(PGP),如果 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$,满足 $\forall A,B\in\Sigma$,当 $|\mu(A)|<\delta$, $|\mu(B)|<\delta$,有 $|\mu(A\cup B)|<\varepsilon$。

由上述定义易知:

(i) 任意向上自连续且序连续集值集函数是增收敛与降收敛的。

(ii) 如果 μ 是次可加的,则 μ 是向上自连续的。

(iii) 任意降收敛的集值集函数是序连续的,相应地,如果集值集函数 μ 是单调且向上自连续的,则它是模糊的当且仅当它是序连续的。

(iv) 如果集值集函数 μ 是单调的、增收敛且向上自连续,则它具有 PGP。

(v) 双零可加且模糊等同于渐进零可加的。

(vi) 如果集值集函数 μ 向上自连续,,则它是渐进零可加的。

(vii) 如果集值集函数 μ 是降收敛的,则它是穷尽的。

(viii) 如果集值集函数 μ 具有 PGP 性质,则它是渐进零可加的。

(ix) 如果 μ 是模糊的,则 μ 满足条件(E′)(定义4,(C4))当且仅当它是双零可加的。

文中若无特殊说明,总是假定 μ 是一单调的集值集函数且 $\mu(\varnothing)=\{0\}$。

命题 1 假设 $\mu:\Sigma\to P_f(X)$ 是一单调的集值集函数,如果它是次可加的,则序连续⇒强序连续。

证明 如果 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$,且 $A_n\searrow A$, $\mu(A)=\{0\}$,则 $A_n\backslash A\searrow\varnothing$。由于 μ 序连续,则

$$|h(\mu(A_n)|=h(\mu(A_n),\{0\})=h(\mu((A_n\backslash A)\cup A),\{0\})$$

同时 μ 又是次可加的,则

$$h(\mu((A_n\backslash A)\cup A)),\{0\})\leqslant h(\mu(A_n\backslash A)+\mu(A),\mu(A))\leqslant h(\mu(A_n\backslash A),\{0\})=|h(\mu(A_n\backslash A))|\to0, n\to\infty$$

这意味着 μ 是强序连续的,命题得证。

由定义可知,强序连续包含序连续,实际上,命题1给出了一个强序连续与序连续的等价条件。

定义 3[13] 假设 $\mu:\Sigma\to P_f(X)$ 是一集值集函数。

(1) 一个由 Ω 的支集所形成的一个非空集族 K 称为一个紧系,如果对任意的集序列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset K$

且$\cap_{n=1}^{\infty}K_n=\varnothing$, $\exists n_0\in\mathbf{N}$ 满足 $\cap_{n=1}^{n_0}K_n=\varnothing$。

(2) 称μ是e-紧正则的,如果存在紧系K,对于$\forall A\in\Sigma$,存在$\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset K$和$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$,满足$\forall n\in\mathbf{N}$,$B_n\subset K_n\subset A$且$e(\mu(A),\mu(B_n))\to 0$。

(3) 称μ是紧正则的,如果存在紧系K,对于$\forall A\in\Sigma$,存在$\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset K$和$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$满足$\forall n\in\mathbf{N}$,$B_n\subset K_n\subset A$且$|h(\mu(A\backslash B_n)|\to 0$。

由上述定义可知:

(i) Hausdorff 空间的所有紧支集形成的集族是紧系,换而言之,定义的紧正则比文献[16]中R'_k-正则更为广义。

(ii) 紧系中集的有限并所形成的集族也是紧的,因此在定义 3 的(2)中,紧系K与$\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$和$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$可以选取成K关于有限并是闭的,$\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$和$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$都是增的。

定义 4　(1) 双下标序列$\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in N^2}\subset\Sigma$称为$\mu$-regulator,如果它满足条件:

(C1) $A_{m,n}\supset A_{m,n'}$当$n\leqslant n'$。

(C2) $\mu(\cap_{n=1}^{\infty}A_{m,n})=\{0\}$, $\forall m\in\mathbf{N}$。

(C3) 条件(E):如果$\forall\varepsilon>0$及任意的μ-regulator,$\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in N^2}\subset\Sigma$, $\exists\theta\in\Theta$及$m_0\in\mathbf{N}$,满足$|\mu(\cup_{m=1}^{m_0}A_{m,\theta(m)})|<\varepsilon$。

(C4)条件(E′):如果$\forall\varepsilon>0$及任意的μ-regulator,$\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in N^2}\subset\Sigma$, $\exists\theta\in\Theta$,满足$|\mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_{n,\theta(n)})|<\varepsilon$。

从定义 4 可以看出,条件(E)弱于条件(E′),因为条件(E′)包含条件(E),但其逆不真。

根据条件(E),类似于文献[24]中的命题 3.5 的证明方法,可以有如下命题:

命题 2　假设$\mu:\Sigma\to P_f(X)$是一集值集函数,如果它满足条件(E),则它是强序连续的。

证明　假设条件(E)成立,设$\{B_n\}\subset\Sigma$是一增序列,$\{B_n\}$收敛到$B\in\Sigma$,且$\mu(B)=\{0\}$,定义双下标序列$\{A_{m,n}\}\subset\Sigma$, $\forall m$, $n\in\mathbf{N}$,取$A_{m,n}=B_n$。由于当$n\leqslant n'$时,$A_{m,n'}\subset A_{m,n}$,$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{m,n})=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)=\mu(B)=\{0\}$,这表示$\{A_{m,n}\}$是一$\mu$-regulator,这样$\forall\varepsilon>0$,根据条件(E),可以发现$\exists\theta\in\Theta$及$m_0\in\mathbf{N}$满足当$n\geqslant\theta(1)$时,有

$$|\mu(B_n)|\leqslant|\mu(\bigcup_{j=1}^{m_0}A_{j,\theta(j)})|<\varepsilon$$

这意味着μ是强序连续的,命题得证。

根据条件(E)和(E′),类似于文献[24]中的命题 3.6 的证明方法,可以有如下命题:

命题 3　假设μ是定义在Σ上的集值集函数,下列两个条件是等价的。

(1) μ满足条件(E)。

(2) $\forall\varepsilon>0$,当双下标序列$\{A_{m,n}\}\subset\Sigma$满足$\forall m\in\mathbf{N}$,当$n\to\infty$,$A_{m,n}\searrow D_m$且$\mu(D_m)=\{0\}$时,则$\forall\theta\in\Theta$和$m_0\in\mathbf{N}$, $|\mu(\bigcup_{j=1}^{m_0}A_{j,\theta(j)})|<\varepsilon$。

命题 4　假设μ是定义在Σ上的集值集函数,下列两个条件是等价的。

(1) μ满足条件(E′)。

(2) $\forall\varepsilon>0$,当双下标序列$\{A_{m,n}\}\subset\Sigma$满足$\forall m\in\mathbf{N}$,当$n\to\infty$,$A_{m,n}\searrow D_m$且$\mu(D_m)=\{0\}$时,则$\exists\theta\in\Theta$, $|\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{j,\theta(j)})|<\varepsilon$。

2　集值测度的 Alexandroff 型定理

定理 1　假设μ是定义在Σ上的集值集函数。

(i) 如果$\mu:\Sigma\to P_f(X)$是次可加的,则紧正则$\Rightarrow$ e-紧正则。

(ii) 如果$\mu:\Sigma\to P_f(X)$是降收敛的,则e-紧正则$\Rightarrow$紧正则。

(iii) 如果$\mu:\Sigma\to P_f(X)$是次可加与降收敛的,则e-紧正则$\Leftrightarrow$紧正则。

证明　(1) 如果$\mu:\Sigma\to P_f(X)$是紧正则的,则$\forall A\in\Sigma$,存在$\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset K$和$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma$满足$\forall n\in\mathbf{N}$, $B_n\subset K_n\subset A$,当$n\to\infty$时,$|h(\mu(A\backslash B_n))|\to 0$。由于$\mu$是次可加的,则

$$\begin{aligned}e(\mu(A),\mu(B_n))&=h(\mu(A),\mu(B_n))\leqslant\\h(\mu(A\backslash B_n)&+\mu(B_n),\mu(B_n))\leqslant\\h(\mu(A&\backslash B_n),\{0\})=\\|h(\mu(A\backslash &B_n))|\to 0,n\to\infty\end{aligned}$$

这意味着μ是e-紧正则的。

(2) 由于μ是e-紧正则的,则$\forall\varepsilon>0$和$A\in\Sigma$,

存在 $K_1 \in \boldsymbol{K}$ 和 $K_1 \subset A$, $e(\mu(A),\mu(K_1))<\frac{\varepsilon}{2}$。对于 $A\backslash K_1$,同样存在 $C_1 \in \boldsymbol{K}$ 和 $C_1 \subset A\backslash K_1$, $e(\mu(A\backslash K_1),\mu(C_1))<\frac{\varepsilon}{2}$。取 $K_2=K_1\cup C_1$,则存在 $C_2\in \boldsymbol{K}$ 和 $C_2\subset A\backslash K_1$, $e(\mu(A\backslash K_2),\mu(C_2))<\frac{\varepsilon}{2}$。如此反复取下去,就产生了一个序列 K_n, $\forall n\in \mathbf{N}$, $e(\mu(A\backslash K_n),\mu(C_n))<\frac{\varepsilon}{2}$。根据 C_n 的选取方法,知道 $\{C_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是两两不相交集,加之 μ 是降收敛的,则它是穷尽的,这样当 $n\to\infty$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}|\mu(C_n)|\to 0$,即存在 $n_0\in\mathbf{N}$,当 $n\geqslant n_0$, $|\mu(C_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$。同时由 K_n 紧系中集的有限并,可以得到 K_n 是紧的,由此得到当 $n\geqslant n_0$,有

$$|\mu(A\backslash K_n)|\leqslant e(\mu(A\backslash K_n),\mu(C_n))+|\mu(C_n)|<\varepsilon$$

这意味着 μ 是紧正则的。

(3) 由(i)和(ii),容易得到(iii)。

由定理1中的(iii)和第2节中的相关讨论可以得到:

推论1 如果集值集函数 $\mu:\Sigma\to P_f(X)$ 是次可加和模糊的,则 e-紧正则⇔紧正则。

命题5 如果集值集函数 $\mu:\Sigma\to P_f(X)$ 是 e-紧正则的,则它在 Σ 上是增收敛的。

证明 由于 μ 是 e-紧正则的,根据文献[24]命题3.1(1)容易得到结论。

定理2 如果集值集函数 $\mu:\Sigma\to P_f(X)$ 是向上自连续且紧正则的,则它是序连续的。

证明 由于 μ 是紧正则的,根据文献[5]定理3.3容易得到结论。

根据定理2、定理1(1) 第2节中的相关讨论可以得到:

推论2 如果集值集函数 $\mu:\Sigma\to P_f(X)$ 是紧正则、次可加的,则它是模糊的。

根据定理2第2节中的相关讨论可以得到:

推论3 如果集值集函数 $\mu:\Sigma\to P_f(X)$ 是向上自连续、紧正则的,则它是模糊的。

根据定理2和命题1,可以得到:

推论4 如果集值集函数 $\mu:\Sigma\to P_f(X)$ 是向上自连续、次可加且紧正则的,则它是强序连续的。

定理3 如果 (Ω,τ) 是局部紧第二可数的 Hausdorff 空间,集值集函数 $\mu:\sigma(\tau)\to P_f(X)$ 具有性质:降收敛、PGP、满足条件(E′),则 μ 在 $\sigma(\tau)$ 上是紧正则的。

证明 由于 (Ω,τ) 是局部紧第二可数的 Hausdorff 空间,则存在 $\forall n\in\mathbf{N}$, B_n 是相对紧的开集, $\Omega=\cup_{n=1}^{\infty}B_n$,这样对 (X,τ) 中的闭集 A, $A=\cup_{n=1}^{\infty}A\cap B_n$,取 $C_m=\cup_{n=1}^{m}A\cap B_n$,则

$$\bar{C}_m=\overline{\cup_{n=1}^{m}A\cap B_n}=$$

$$\cup_{n=1}^{m}\overline{A\cap B_n}\subset\cup_{n=1}^{m}A\cap\bar{B}_n$$

由于 A 是紧的, B_n 是相对紧的,则 $\bar{C}_m$ 是紧的, $A\backslash C_m\searrow\varnothing$。$\mu$ 如果是降收敛的,则当 $m\to\infty$ 时, $\lim|\mu(A\backslash\bar{C}_m)|\leqslant\lim|\mu(A\backslash C_m)|\to 0$,这说明 A 是紧正则的。

设 $\Sigma_1=\{A\in\sigma(\tau):A$ 是紧正则的$\}$,接下来证明 Σ_1 是一个 σ-域。要得到这个结论,从前面的的证明知道,需要证明对任意闭集 A, $A\in\Sigma_1$, Σ_1 对 A 的补是闭的且包含 $\varnothing$ 和 Ω。Σ_1 包含 $\varnothing$ 和 Ω 是明显的。假设 $A\in\Sigma_1$,将证明 $A^c\in\Sigma_1$。由于 $\Omega\in\Sigma_1$,则存在紧集 B_{1n}, B_{2n},当 $n\to\infty$ 时,有

$$\lim_{n\to\infty}|\mu(\Omega\backslash B_{1n})|\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty}|\mu(A\backslash B_{2n})|\to 0$$

由于 μ 具有 PGP,所以 μ 是渐进零可加的,则当 $n\to\infty$ 时,有

$$\lim_{n\to\infty}|\mu((\Omega\backslash B_{1n})\cup(A\backslash B_{2n}))|\to 0$$

$$|\mu((A^c)\backslash\cup_{i=1}^{2}B_{in})|\leqslant|\mu((\Omega\backslash B_{1n})\cup(A\backslash B_{1n}))|\to 0$$

因为 B_{1n}, B_{2n} 是紧集,这样 $\cup_{i=1}^{2}B_{in}$ 是紧的,这意味着 $A^c\in\Sigma_1$。

现在假设 $A_m\subset\Sigma_1$, $A_m\nearrow A$。由于 $A_m\subset\Sigma_1$,则 $\forall m\in\mathbf{N}$,存在增的紧集序列 $\{B_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{N}}\subset\Sigma_1$, $B_{m,n}\subset A_m$, $\lim\limits_{n\to\infty}|\mu(A_m\backslash B_{m,n})|\to 0$。$\forall n\in\mathbf{N}$,设 $C_{m,n}=A_m\backslash B_{m,n}$, $C_m=\cap_{n=1}^{\infty}C_{m,n}$。由于 $\forall m\in\mathbf{N}$, $\{C_{m,n}\}_n$ 是单减的,当 $n\to\infty$ 时, $C_{m,n}\searrow C_m$。另一方面 $\forall n\in\mathbf{N}$,当 $m\to\infty$ 时, $|\mu(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}C_{n,m})|\leqslant|\mu(C_{n,m})|\to 0$,则 $|\mu(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}C_{n,m})|=$

$0, \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{m,n}) = \{0\}$,这表示双下标序列 $\{C_{n,m}\}_{m,n\in\mathbf{N}}$ 是一个 μ-regulator 。由于 μ 满足条件(E′),则 $\forall \delta > 0$,存在 $\theta \in \Theta$, $|\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_m \setminus B_{m,\theta(m)}))| < \delta$。

同时,由于

$$(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_{m,\theta(m)} \setminus \bigcup_{m=1}^{n} B_{m,\theta(m)}) \searrow \varnothing$$

μ 是降收敛的,则当 $n\to\infty$,存在 $N_0 \in \mathbf{N}$, $|\mu(\bigcup_{m=1}^{\infty}(B_{m,\theta(m)} \setminus \bigcup_{m=1}^{N_0} B_{m,\theta(m)}))| < \delta$。因为 μ 具有 PGP 性质,则 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $\theta \in \Theta, N_0 \in \mathbf{N}$,

$$|\mu((\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_m \setminus B_{m,\theta(m)}) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \setminus \bigcup_{m=1}^{N_0} B_{m,\theta(m)}))| < \varepsilon$$

又由于

$$(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \setminus \bigcup_{m=1}^{N_0} B_{m,\theta(m)}) \subset (\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_m \setminus B_{m,\theta(m)}) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_m \setminus \bigcup_{m=1}^{N_0} B_{m,\theta(m)})))$$

因此可以得到

$$|\mu(A \setminus \bigcup_{m=1}^{N_0} B_{m,\theta(m)})| < \varepsilon$$

设 $B_U = \bigcup_{m=1}^{N_0} B_{m,\theta(m)}$,由于 $B_{m,\theta(m)}$ 是紧的,得到 B_U 是紧的且 $B_U \subset A$,因此 $A \in \Sigma_1$, Σ_1 是个 σ-域,结论得到证明。

根据定理 3 和第 2 节的讨论,可以得到:

推论 5　如果 (Ω, τ) 是局部紧第二可数的 Hausdorff 空间,集值集函数 $\mu: \sigma(\tau) \to P_f(X)$ 具有性质:降收敛、次可加、满足条件(E′),则 μ 在 $\sigma(\tau)$ 上是紧正则的。

推论 6　如果 (Ω, τ) 是局部紧第二可数的 Hausdorff 空间,集值集函数 $\mu: \sigma(\tau) \to P_f(X)$ 具有性质:向上自连续、满足条件(E′);则 μ 在 $\sigma(\tau)$ 上是紧正则的。

推论 7　如果 (Ω, τ) 是局部紧第二可数的 Hausdorff 空间,集值集函数 $\mu: \sigma(\tau) \to P_f(X)$ 是双零可加的,则 μ 在 $\sigma(\tau)$ 上是紧正则的。

推论 8　如果 (Ω, τ) 是局部紧第二可数的 Hausdorff 空间,集值集函数 $\mu: \sigma(\tau) \to P_f(X)$ 具有性质:次可加、降收敛、PGP、满足条件(E′),则 μ 在 $\sigma(\tau)$ 上是 e-紧正则的。

参考文献(References):

[1] ALEXANDROFF A D. Additive Set-functions in Abstract Spaces [J]. Sbornik Mathematics, 1941, 51 (9): 563—628

[2] ASAHINA S, UCHINO K, MUROFUSHI T. Relationship among Continuity Conditions and Null-additivity Conditions in Non-additive Measure Theory [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(7): 691—698

[3] JIANG Q, SUZUKI H. Fuzzy Measures on Metric Spaces[J]. Fuzzy Sets and System, 1996, 83:99—106

[4] PAP E. Null-additive Set Functions, Mathematics and Its Applications [M]. Dordrecht: Ister Science Bratislava Kluwer Academic Publishers Group, 1995

[5] HA M, WANG X. Some Notes on the Regularity of Fuzzy Measures on Metric Spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 87:385—387

[6] LI J, YASUDA M, SONG J. Regularity Properties of Null-additive Fuzzy Measure on Metric Spaces, Lecture Notes in Artificial Intelligence [M]. Berlin:Springer, 2005

[7] NARUKAWA Y, MUROFUSHI T, SUGENO M. Regular Fuzzy Measure and Representation of Comonotonically Additive Functional[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 112:177—186

[8] SONG J, LI J. Regularity of Null-additive Fuzzy Measure on Metric Spaces [J]. International Journal of General System, 2003, 32: 271— 279

[9] WU J, WU C. Fuzzy Regular Measures on Topological Spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 119:529—533

[10] KAWABE J. Regularity and Lusin's Theorem for Riesz Space-valued Fuzzy Measures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158: 895— 903

[11] KAWABE J. The Alexandroff Theorem for Riesz Space-valued Non-additive Measures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158:2413—2421

[12] KAWABE J. Continuity and Compactness of the Indirect Product of Two Non-additive Measures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160:1327—1333

[13] KAWABE J. Regularities of Riesz Space-valued Non-additive Measures with Applications to Convergence Theorems for Choquet Integrals[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161:642—650

[14] GUO C, ZHANG D. On Set-valued Fuzzy Measures[J]. Information Sciences, 2004, 160: 13—25

[15] GAVRILUT A C. Properties of Regularity for Multi-submeasures[J]. Annals of the Alexandru Loan Cuza

University Mathamatics, 2004 50:373—392

[16] GAVRILUT A C. Regularity and Autocontinuity of Set Multifunctions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161: 681—693

[17] GAVRILUT A C. Alexandroff Theorem in Hausdorff Topology for Null-null-additive Set Multifunctions [J]. Annals of the Alexandru Loan Cuza University Mathamatics, 2013, 59 (2):237—251

[18] GAVRILUT A C. On the Regularities of Fuzzy Set Multifunctions with Applications in Variation, Extensions and Fuzzy Setvalued Integrability Problems[J]. Information Sciences,2013, 224:130—142

[19] GAVRILUT A C. Regularity and O-continuity for Multisubmeasures[J]. Annals of the Alexandru Loan Cuza University Mathamatics,2013,59:236—249

[20] PRECUPANU A M. Some Applications of (B-M)-regular Multimeasures[J]. Annals of the Alexandru Loan Cuza University Mathamatics,1985, 31:5—15

[21] PRECUPANU A, GAVRILUT A C. A Set- valued Egoroff Type Theorem[J]. Fuzzy Sets and Systems,2011,175: 87—95

[22] ZHANG D, GUO C. Generalized Fuzzy Integrals of Set-valued Functions[J]. Fuzzy Sets and Systems,1995,76: 365—373

[23] ZHANG D L, WANG Z X. On Set-valued Fuzzy Integrals [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993,56:237—241

[24] MUROFUSHI T, UCHINO K, ASAHINA S. Conditions for Egoroff' s Theorem in Non-additive Measure Theory [J]. Fuzzy Sets System,2004,146:135—146.

The Alexandroff Type Theorem for Set Multifunctions Defined on a Borel σ-algebra of Hausdorff Space

SUN Rong[a,b]

(a. School of Mathematics and Statistics, b. Chongqing Key Laboratory for Applied Statistics for Social Economy, Chongqing Technology and Business Universty, Chongqing 400067, China;)

Abstract: In this paper, based on more generalized compactness condition than A. C. Gavrilut, we further a previous study concerning abstract regularity for set multifunction, we also study the relationships among abstract regularities and other properties of continuity, some Alexandroff type theorems of set multifunctions defined on the Borel σ-algebra of a locally compact second countable Hausdorff space are obtained.

Key words: set multifunction; Hausdroff Space; Alexandroff type theorem; compact system; abstract regularity

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

孙荣. Hausdorff 空间 Borel σ-代数上的集值集函数的 Alexandroff 型定理[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(3):75—80

SUN R. The Alexandroff Type Theorem for Set Multifunctions Defined on a Borel σ-algebra of Hausdorff Space[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(3):75—80