doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0003.010

凸二次规划 SDP 松弛解的存在性证明*

张思颖

(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘　要:针对利用 CVX 软件求解半定规划问题的有效性依赖于该半定规划问题的原始-对偶性,提出利用半定规划问题的强对偶定理和 Gershgorin 圆盘定理证明在箱子约束及单位球形约束下的凸二次规划问题的半定规划松弛模型解的存在性。该证明方法为嵌入了 SeDuMi 和 SDPT3 这两种内点算法的 CVX 软件提供了有效求解半定规划松弛模型的理论依据;一旦利用该方法证明了半定规划问题解的存在,必然可利用 CVX 软件有效求解。

关键词:二次规划;强对偶定理;Gershgorin 圆盘定理

中图分类号:O224　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2020)03-0066-04

0　引　言

二次规划是连续优化理论的基础问题,同时也被认为是最具挑战的组合优化问题之一[1-2]。二次规划问题自半定规划(SDP)松弛方法提出以来在连续和组合优化领域得到了广泛的重视和研究[3-4]。本文将考虑两种特殊约束即箱子约束(式(1))和单位球形约束(式(2))下的凸二次规划问题 SDP 问题的解的存在性。

$$V_{\mathrm{box}}=\min\{f(x):=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\}\ \text{s. t. } \boldsymbol{x}\in[-1,1]^n \tag{1}$$

$$V_{\mathrm{ball}}=\min\{f(x):=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\}\ \text{s. t. } \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant 1 \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^n$,$\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为对称半正定矩阵。不失一般性,本文假设 $\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵,即

$$\boldsymbol{Q}=\Lambda=\boldsymbol{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

其中

$$0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n$$

SDP 问题的解存在并不能确保它就能利用 CVX 进行有效求解。众所周知,用于求解半定规划 CVX 软件的两个核心算法 SeDuMi 和 SDPT3 都是利用内点算法进行设计的,这两种算法均是通过问题的原始-对偶信息来判断一个 SDP 问题是否是超定的、不可行的、无界的、不精确的、可解的和求解失败的。确切地说,利用 CVX 求解一个 SDP 问题的有效性依赖于 SDP 的原始和对偶的可行性、正交性和严格互补条件。如果一个 SDP 问题满足原始和对偶严格可行性,就能从理论上保证 CVX 给出其满足任意精度的解。否则,即便一个 SDP 问题存在最优解,也不能确保 CVX 能够有效求解,具体的例子可以参见文献[5]中的例 4.1。

本文将利用 SDP 的强对偶定理和 Gershgorin 圆盘定理证明式(1)(2)两种凸二次规划问题 SDP 松弛解的存在性。

1　预备知识

在本文中,用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数,$\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维欧几里得空间,$\boldsymbol{R}^n_+$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中分量为非负数的向量集合,$\boldsymbol{R}^n_{++}$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中分量全为正数的向量集合。$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 表示列向量 $\boldsymbol{x}$ 的转置,下标变量 $\boldsymbol{x}_i$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量或者一个实数,而上标变量 $\boldsymbol{x}^j$ 则表示欧几里得空间的一个向量;$\boldsymbol{S}^n$ 表示 $n\times n$ 实对称矩阵集合,$\boldsymbol{X}\geqslant 0$($\boldsymbol{X}>0$)表示 $\boldsymbol{X}$ 是正半定矩阵(正定矩阵);M_{ij}表示

收稿日期:2019-09-16;**修回日期**:2019-10-11.

* **基金项目**:重庆师范大学 2019 年研究生科研创新项目(YKC19003).

作者简介:张思颖(1995-),女,四川绵竹人,硕士,从事半定规划研究.

矩阵 $\boldsymbol{M}$ 第 i 行第 j 列元素。$[\cdot,\cdot]$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中两向量的内积或两矩阵的 Frobenious 内积。

引理 1[6]　(半定规划的强对偶定理)如果原始半定规划及其拉格朗日对偶半定规划都严格可行,则它们的对偶间隙为 0,且原始最优解和对偶最优解都可达。

引理 2[7]　(Gershgorin 圆盘定理)令 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{n\times n}$ 是一个复矩阵,$R_i=\sum_{i\neq j}|A_{ij}|$ 是第 i 行中非对角项的绝对值之和,$D(A_{ii},R_i)$ 为以 R_i 为半径,A_{ii} 为中心的封闭圆盘,则 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值至少在一个圆盘 $D(A_{ii},R_i)$ 中。

2　箱子约束下凸二次规划 SDP 松弛解的存在性

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$,对所有 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n+1}$ 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$,且 $x_{n+1}=1$,则式(1)等价于

$$\min[\boldsymbol{A},\boldsymbol{X}],\ \text{s. t. } X_{jj}\leqslant X_{n+1,n+1},j=1,2,\cdots,n$$
$$X_{n+1,n+1}=1,\boldsymbol{X}\succcurlyeq 0,\operatorname{rank}(\boldsymbol{X})=1$$

松弛式(3)的秩-1 约束,得到式(1)的 SDP 松弛模型:

$$\begin{aligned}&\min[\boldsymbol{A},\boldsymbol{X}]\\ &\text{s. t. } X_{jj}\leqslant X_{n+1,n+1},j=1,2,\cdots,n\\ &X_{n+1,n+1}=1,X\succcurlyeq 0\end{aligned}\tag{4}$$

接下来利用引理 1 和引理 2 给出 SDP 松弛问题式(4)解的存在性证明。

定理 1　$n\geqslant 2$ 时箱子约束下的 SDP 松弛问题式(4)和它的对偶问题式(5)都至少有一个最优解,且具有相同的最优值。

证明　首先令

$$\bar{\boldsymbol{X}}=\begin{cases}\bar{X}_{jj}=\dfrac{1}{2},j=1,2,\cdots,n\\ \bar{X}_{n+1,n+1}=1\end{cases}$$

则有

$$\bar{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}\boldsymbol{I}_{n\times n} & 0_{n\times 1}\\ 0_{1\times n} & 1\end{bmatrix}\succ 0$$

$$\bar{X}_{jj}=\frac{1}{2}<1=\bar{X}_{n+1,n+1},j=1,2,\cdots,n$$

因此 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 是 SDP 松弛问题式(4)的一个严格可行解,即问题式(4)是严格可行的。

再令

$$L_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\lambda})=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{X}]+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j([\boldsymbol{\Lambda}_j,\boldsymbol{X}]-[\boldsymbol{\Lambda}_{n+1},\boldsymbol{X}])+\lambda_{n+1}([\boldsymbol{\Lambda}_{n+1},\boldsymbol{X}]-1)+\lambda_{n+2}(1-[\boldsymbol{\Lambda}_{n+1},\boldsymbol{X}])$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+2})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}_+^{n+2}$,$\boldsymbol{\Lambda}_j\in\boldsymbol{S}^{n+1}$ 为第 j 个主对角元素为 1,其余元素全为 0 的对角矩阵。

那么对偶函数

$$g_1(\boldsymbol{\lambda})=\min_{X\succcurlyeq 0}L_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\lambda})=$$
$$\begin{cases}\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1}, & \boldsymbol{A}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\boldsymbol{\Lambda}_j-\boldsymbol{\Lambda}_{n+1})+(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2})\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\succcurlyeq 0\\ -\infty, & \text{否则}\end{cases}$$

因此半定规划问题式(4)的拉格朗日对偶问题如下:

$$\begin{aligned}&\max(\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1})\\ &\text{s. t. } \boldsymbol{A}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\boldsymbol{\Lambda}_j-\boldsymbol{\Lambda}_{n+1})+\\ &(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2})\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\succcurlyeq 0,\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{R}_+^{n+2}\end{aligned}\tag{5}$$

由引理 1,只需证明存在 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\in\boldsymbol{R}_{++}^{n+2}$ 使得矩阵 $\boldsymbol{A}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\boldsymbol{\Lambda}_j-\boldsymbol{\Lambda}_{n+1})+(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2})\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\in\boldsymbol{S}^{n+1}$ 是正定矩阵,就可以完成证明。将在下面证明存在一个 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\in\boldsymbol{R}_{++}^{n+2}$,使得该矩阵所有实特征值都是正数。也就是得证对偶问题式(5)有一个严格可行解。

因为

$$\boldsymbol{A}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\boldsymbol{\Lambda}_j-\boldsymbol{\Lambda}_{n+1})+(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2})\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}=$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Lambda_j & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & \lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\end{bmatrix}$$

所以需要利用引理 2 验证如下系统的可行性:

$$\begin{cases}\alpha_j+\lambda_j>|c_j|,j=1,2,\cdots,n\\ \lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j>\sum_{j=1}^{n}|c_j|\\ \lambda_k>0,k=1,2,\cdots,n+2\end{cases}$$

其中 c_j 为向量 $\boldsymbol{c}$ 的第 j 个分量。

先令 $\tilde{c}=\max\{|c_j|\}$,$\tilde{\alpha}=\min\{\alpha_j\}$,$j=1,2,\cdots,n$。再进一步验证如下系统的可行性:

$$\begin{cases}\lambda_j>\tilde{c}-\tilde{\alpha},j=1,2,\cdots,n\\ \lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j>n\tilde{c}\\ \lambda_k>0,k=1,2,\cdots,n+2\end{cases}$$

再令

$$\bar{\lambda}_j=|\tilde{c}-\tilde{\alpha}|+1,j=1,2,\cdots,n$$

$$\bar{\lambda}_{n+1}=n(2\tilde{c}+\tilde{\alpha}+2),\bar{\lambda}_{n+2}=1$$

则 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}=(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_{n+2})^{\mathrm{T}}$ 是上述系统的可行解,因此矩阵 $\boldsymbol{A}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(\boldsymbol{\Lambda}_j-\boldsymbol{\Lambda}_{n+1})+(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2})\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}$ 是严格对角占优的。根据引理 2 知该矩阵的所有特征值都是正数,即矩阵为正定矩阵。因此 SDP 松弛模型式(4)和它的拉格朗日对偶问题式(5)都至少有一个最优解。由引理 1 知它们有相同的最优值。

3 单位球形约束下凸二次规划 SDP 松弛解的存在性

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$,对所有 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n+1}$ 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$,$x_{n+1}=1$,对秩−1 约束进行松弛,则式(2)的 SDP 松弛模型如下:

$$\begin{aligned}&\min[\boldsymbol{A},\boldsymbol{X}]\\ &\text{s. t. } X_{11}+X_{22}+\cdots+X_{nn}\leqslant X_{n+1,n+1}\\ &X_{n+1,n+1}=1\\ &\boldsymbol{X}\geqslant 0\end{aligned}\tag{6}$$

接下来利用引理 1 和引理 2 给出 SDP 松弛模型式(6)解的存在性证明。

定理 2 单位球约束下的 SDP 松弛问题式(6)和它的对偶问题式(7)都至少有一个最优解,且具有相同的最优值。

证明 首先令

$$\bar{\boldsymbol{X}}=\begin{cases}\bar{X}_{jj}=\dfrac{1}{n+1},j=1,2,\cdots,n\\ \bar{X}_{n+1,n+1}=1\end{cases}$$

则有 $\bar{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{n+1}\boldsymbol{I}_{n\times n} & 0_{n\times 1}\\ 0_{1\times n} & 1\end{bmatrix}>0$,且

$$\bar{X}_{11}+\bar{X}_{22}+\cdots+\bar{X}_{nn}=\frac{n}{n+1}<1=\bar{X}_{n+1,n+1}$$

因此,$\bar{\boldsymbol{X}}$ 是 SDP 松弛问题式(6)的一个严格可行解,即问题式(5)是严格可行的。

再令

$$L_2(X,\lambda)=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{X}]+\lambda_1\Big(\sum_{j=1}^{n}[\boldsymbol{\Lambda}_j,\boldsymbol{X}]-[\boldsymbol{\Lambda}_{n+1},\boldsymbol{X}]\Big)+\lambda_2([\boldsymbol{\Lambda}_{n+1},\boldsymbol{X}]-1)+\lambda_3(1-[\boldsymbol{\Lambda}_{n+1},\boldsymbol{X}])$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_3)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}_+^3$,$\boldsymbol{\Lambda}_j\in\boldsymbol{S}^{n+1}$ 为第 j 个主对角元素为 1,其余元素全为 0 的对角矩阵。

那么对偶函数

$$g_2(\boldsymbol{\lambda})=\min_{X\geqslant 0}L_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\lambda})=\begin{cases}\lambda_3-\lambda_2\\ \boldsymbol{A}+\lambda_1\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\Lambda}_j+(-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\geqslant 0\\ -\infty,\text{否则}\end{cases}$$

因此半定规划问题式(6)的拉格朗日对偶问题如下:

$$\begin{aligned}&\max(\lambda_3-\lambda_2)\\ &\text{s. t. } \boldsymbol{A}+\lambda_1\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\Lambda}_j+\\ &(-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\geqslant 0,\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{R}_+^3\end{aligned}\tag{7}$$

由引理 1,只需证明存在 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\in\boldsymbol{R}_{++}^3$,使矩阵 $\boldsymbol{A}+\lambda_1\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\Lambda}_j+(-\boldsymbol{\Lambda}_1+\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}$ 是正定矩阵,就可以完成证明。将在下面证明存在一个 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\in\boldsymbol{R}_{++}^3$,使得该矩阵所有实特征值都是正数。也就是证明对偶问题式(7)有一个严格可行解。

又因为矩阵

$$\boldsymbol{A}+\lambda_1\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\Lambda}_j+(-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}+\lambda_1\boldsymbol{I}_{n\times n} & \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3\end{bmatrix}$$

所以需要利用引理 2 验证如下系统的可行性:

$$\begin{cases}\alpha_j+\lambda_1>|c_j|,j=1,2,\cdots,n\\ -\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3>\sum_{j=1}^{n}|c_j|\\ \lambda_k>0,k=1,2,\cdots,3\end{cases}$$

其中 c_j 为向量 $\boldsymbol{c}$ 的第 j 个分量。

首先令 $\tilde{c}=\max\{|c_j|\}$,$\tilde{\alpha}=\min\{\alpha_j\}$,$j=1,2,\cdots,n$,然后再进一步验证如下系统的可行性:

$$\begin{cases}\lambda_1>\tilde{c}-\tilde{\alpha}\\ -\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3>n\tilde{c}\\ \lambda_k>0,k=1,2,3\end{cases}$$

再令

$$\bar{\lambda}_1=|\tilde{c}-\tilde{\alpha}|+1,\bar{\lambda}_2=(n+1)\tilde{c}+\tilde{\alpha}+3,\bar{\lambda}_3=1$$

则可知 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}=(\bar{\lambda}_1,\cdots,\bar{\lambda}_3)^{\mathrm{T}}$ 是上述系统的可行解,因此矩阵 $\boldsymbol{A}+\lambda_1\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\Lambda}_j+(-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}$ 是严格对角占优的。根据引理 2 知该矩阵的所有特征值都是正数,即矩阵为正定矩阵。因此 SDP 松弛模型式(6)和它的拉格朗日对偶问题式(7)都至少有一个最优解。由引理 1 知它们有相同的最优值。

4 总 结

本文考虑了箱子约束和单位球形约束这两种约束条件下的二次规划问题。引入了一种新的办法证明两种约束下二次规划问题的 SDP 松弛解的存在性。一旦用该方法证明了 SDP 模型解的存在性,必然可利用 CVX 软件有效求解。

参考文献(References):

[1] DENNIS J E, SCHNABEL R B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1983

[2] GAREY M R, JOHNSON D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness[J]. SIAM Review, 1982, 24(1): 90—91

[3] NESTEROV Y, Nemirovsky A. Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994

[4] VANDENBERGHE L, BOYD S. Semidefinite Programming[J]. SIAM Review, 1996, 38: 49—95

[5] HELMBERG C. Semidefinite Programming[J]. European Journal of Operational Research, 2002(137): 461—482

[6] FORST W, HOFFMANN D. Optimization-Theory and Practice[J]. Mathematics and Thchnology, 2010: 299—338

[7] GERSCHGORIN S. über Die Abgrenzung Der Eigenwerte Einer Matrix[J]. Izv Akad Nauk USSR Otd Fiz-Mat Nauk, 1931(7): 749—754

[8] 朱文兴,张连生. 带球(椭球)约束的不定二次规划问题[J]. 应用数学与计算数学学报, 1995, 9(2): 47—52
ZHU W X, ZHANG L S. Indefinite Quadratic Programming Problem with Ball (Ellipsoid) Constraints[J]. Communication on Applied Mathematics and Computation, 1995, 9(2): 47—52(in Chinese)

[9] XIA Y. New Semidefinite Programming Relaxations for Box Constrained Quadratic Program[J]. Science China Mathematics, 2013, 56(4): 877—886

[10] RAMANA M V, TUNCEL L, WOLKOWICZ H. Strong Duality for Semidefinite Programming[J]. SIAM J Optim, 1997, 7(3): 641—662

The Existence Proof of the Solution of SDP Relaxation for Convex Quadratic Program

ZHANG Si-ying

(School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Because the problem of quadratic program has received extensive attention and research in the field of continuous and combinatorial optimization since the semi-definite planning (SDP) relaxation method was proposed, because the effectiveness of the solution of SDP by using CVX software relies on the primal SDP and dual SDP, this paper proposes to use the strong duality theorem and Gershgorin circle theorem to prove the existence of the solution of SDP relaxation model of convex quadratic program under the condition of box constraints and unit spherical constraints. The new proof method of the existence of the solution of the SDP lays the theoretical foundation of the effectiveness for solving the SDP relaxation model by the CVX software with the two kinds of interior point algorithms of SeDuMi and SDPT3. Once this method is used to prove the existence of the solution of SDP, it is necessary to use CVX software to receive effective solution.

Key words: quadratic program; strong duality theorem; Gershgorin circle theorem

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

张思颖. 凸二次规划的 SDP 松弛的解的存在性证明[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2020, 37(3): 66—69

ZHANG S Y. The Existence Proof of the Solution of SDP Relaxation for Convex Quadratic Program[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020, 37(3): 66—69