

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0003.009

分数阶广义混沌系统分析及有限时间同步*

周六圆, 孙 观, 崔 岩**, 何洪俊, 卢晨晖

(上海工程技术大学 机械工程学院, 上海 201620)

摘 要:混沌是非线性动力系统中所特有的一种运动形式,将混沌系统抽象成数学模型并加以控制是探索混沌应用的主要形式,随着混沌系统研究的深入,分数阶系统逐渐从整数阶系统中脱颖而出,由此通过研究一类新的整数阶混沌系统,提出了相应的分数阶三维自治系统;通过系统的线性项判别,并根据分数阶 Lyapunov 稳定理论对于混沌系统中平衡点种类进行区分,发现该新分数阶系统产生的平衡点属于不稳定鞍点;对于该分数阶系统采用有限时间稳定理论,在驱动系统与响应系统中进行同步控制器的设计,通过数值仿真验证并绘制出有限时间同步关系曲线图验证了在短时间内实现混沌同步控制。

关键词:混沌系统;Lyapunov 稳定理论;有限时间;同步控制

中图分类号: O415; O322

文献标志码: A

文章编号: 1672-058X(2020)03-0060-06

0 引 言

在对于非线性领域的不断研究过程中,混沌作为非线性的一个分支,正在受到人们的广泛关注。1963 年 Lorenz 在对于大气气流问题的研究过程中,发现了一个三维的自治系统,该系统对于初始条件的变化十分敏感,随后便把该模型作为第一个混沌数学模型进行研究^[1],随后发现这类系统是由非线性微分方程所描述的一种动态系统,混沌系统具有对于初始条件十分敏感的特性^[2],随后一系列类似于 Lorenz 系统被相继提出,并对其进行分析研究,如 Rossler 系统^[3]、Chen 系统^[4]、Lü 系统^[5]、liu 系统^[6]等。

对于混沌系统的研究主要通过抽象成整数阶数学模型进行研究,随着对于非线性混沌领域的不

断探索,发现混沌系统主要由自治系统与非自治系统构成。整数阶混沌系统的变化与控制一直是控制领域研究的热点^[7]。自从 1983 年 Mandelbort 指出在学科领域中存在大量的分数维事实^[8],此后分数阶微分方程大量出现。文献[9]对于一种分数阶 Liu 混沌系统,利用 Adomian 分解分析了该系统中的混沌相图、分岔图以及复杂性等特征。文献[10]通过对于一种分数阶系统中引入相应的时滞项,构造出了一种新的含有时滞项的混沌系统。文献[11]分析了一种参数未知的混沌系统在进行参数识别过程中的方法,通过设计出一种标量自适应的参数控制器,实现了整个系统中的参数辨识以及整体的同步控制。

在一种整数阶系统的基础上,提出了相应的分数阶类系统,分析了该分数阶混沌系统中平衡点的稳定性,在对于分数阶混沌系统的控制过程中,根

收稿日期:2019-07-09;修回日期:2019-09-10.

* 基金项目:国家自然科学基金青年科学基金项目(11604205).

作者简介:周六圆(1995—),男,安徽池州人,硕士生,从事流体机械、混沌理论及控制研究.

** 通讯作者:崔岩(1980—),男,辽宁抚顺人,副教授,博士,硕士生导师,从事流体机械,混沌理论及控制研究.

据有限时间理论,设计了相应的控制器,对于该分数阶混沌系统可以进行较快的同步控制,该方法从整数阶 Lü 系统转变到分数阶系统研究,扩大了混沌系统的整体作用范围,并且该控制器能够实现对于分数阶系统的有效控制。

1 分数阶混沌系统

1.1 分数混沌系统的提出

根据文献[12]所提出的新混沌系统可以表述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = ay - xz \\ \dot{z} = xy - b \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x, y, z \in R$ 表示系统的状态变量,用 a, b 表示系统参数。系统(1)有6个项,包括两个非线性项 xy, xz , 一个常数项 b 。系统(1)在 z 轴上对称因为它具有变换 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 。在系统中参数取值 $a=0.5, b=0.5$ 。

可以将分数微分算子替换混沌系统中的标准微分算子,根据分数阶微分定义的描述,新的分数阶混沌系统的数学模型可以描述如下:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = y - x \\ \frac{d^\beta y}{dt^\beta} = ay - xz \\ \frac{d^\gamma z}{dt^\gamma} = xy - b \end{cases} \quad (2)$$

对于该分数阶的微分系统, α, β, γ 为分数阶系统的阶数,其中 x, y, z 为分数阶系统的状态变量,可以对应不同的阶数,即 α, β, γ 可以取值不同,在对于分数阶系统的分析过程中,由于阶数是否相同对于同一微分方程在原理上是一样的,因此采用 $0 < \alpha = \beta = \gamma = q \leq 1$, 并用 q 表示该分数阶系统的阶数,因此该分数阶混沌系统模型可以表示如下:

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = y - x \\ \frac{d^q y}{dt^q} = ay - xz \\ \frac{d^q z}{dt^q} = xy - b \end{cases} \quad (3)$$

1.2 分数阶系统的判定

Lorenz 系统通常可以表述为^[13]

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix} X + x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

其中, $X = (x \ y \ z)^T \in R, a_{33} \in R^3$, 对于 Lorenz 系统

中矩阵 A 可以写成 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 对于整个 Lorenz

系统族而言,在 A 中存在 $a_{11}a_{22} > 0$, 基于 Lorenz 系统所进行的拓扑变化中,其中 Chen 系统的线性矩阵项符合 $a_{11}a_{22} < 0$, 在 Lorenz 系统与 Chen 系统之间存在者一个过渡系统,即为 Lü 系统,该系统线性矩阵项符合 $a_{11}a_{22} = 0$, 因此 Lü 系统可以在 Lorenz 系统与 Chen 系统之间进行转换,构成了一个完整的 Lorenz 系统族。

根据整个 Lorenz 系统族的描述,该分数阶系统(3)可以表述为

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix} X + x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$$

其中, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 并且 $a_{11}a_{22} = 0$, 通过对于新混沌系统的拓扑结构分析发现,该新系统分数阶混沌系统的拓扑结构与 Lü 系统类似因此,可以认为是属于整个 Lorenz 系统族。

1.3 分数阶系统的混沌性分析

对于该分数阶系统的混沌性描述,引入以下定理:

引理 1 考虑线性分数阶系统^[14]

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax, x(0) = x_0$$

其中, $x \in R^n (n \in N)$ 为系统状态变量, A 为系数矩阵。

(1) 该系统是渐近稳定的,当且仅当对于任意的 $\lambda \in \text{spec}(A), |\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ 都成立。

(2) 该系统是稳定的,当且仅当对于任意的 λ

$\in \text{spec}(\mathbf{A})$, $|\arg(\lambda)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ 都成立。

以下为非线性分数阶方程的混沌定理:

可以得到分数阶系统的平衡点为两个,分别为平衡点 $E_1(0.707\ 1, 0.707\ 1, 0.5)$, $E_2(-0.707\ 1, -0.707\ 1, 0.5)$ 。对于平衡点 E_1 , 得到相应的特征根为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 0.25 \pm 0.968\ 2i$, 特征根是负实根和一对共轭复根, 根据 Lyapunov 稳定性理论, 可知平衡点 E_1 是不稳定的鞍点。同样对于平衡点 E_2 , 可以采用同样的方法对其进行求解, 可以得到相应的特征根为 $\lambda_4 = -1$, $\lambda_{5,6} = 0.25 \pm 0.968\ 2i$, 特征根是负实根、一对共轭复根, 可知平衡点 E_2 也是不稳定鞍点。

根据引理当 $q = 0.95$ 时, $q > \frac{2}{\pi} \tan^{-1}$

$\left[\frac{|\text{Im}(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)} \right] = \left| \tan^{-1} \left(\frac{0.968\ 2}{0.25} \right) \right| = 0.839\ 1$, 因此该系统是混沌的。

因此, 当取参数为 $a = 0.5$, $b = 0.5$, $q = 0.95$, 则可以判定为该分数阶动力系统具有混沌特性。

2 有限时间同步控制

2.1 分数阶系统有限时间稳定理论^[15]

定理 1 对于一般的分数阶系统, 如果满足:

$$x_a^c D_t^\alpha x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)} {}_a^c D_t^\alpha x x^\alpha \leq -k(x x)^\beta \beta < \frac{\alpha + \alpha^2}{2}, k > 0$$

则状态变量在有限时间 t 内趋近于 0,

$$t = \left(\frac{v(0)^{\alpha-1+\alpha} \Gamma\left(1+\alpha-\frac{2\beta}{1+\alpha}\right) \Gamma(1+\alpha)}{\left(1+2\alpha-\frac{2\beta}{1+\alpha}\right) k \Gamma(2+\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

引理 1 当满足 $a, b > 0$ 并且 $0 < c < 1$, 可以得到以下的不等式:

$$(a+b)^c \leq a^c + b^c$$

2.2 分数阶有限时间同步控制

由于混沌系统在保密通讯一直都被人们关注, 其中分数阶所构成的系统对于整数阶而言其优势

更进一步体现, 对于分数阶的同步控制方法一直被不断提出。本文运用有限时间稳定性理论实现分数阶系统的同步控制。

令分数阶系统式(3)为驱动系统, 其中, 则相应的响应系统为

$$\begin{cases} \frac{d^q x_1}{dt^q} = y_1 - x_1 - u_1 \\ \frac{d^q y_1}{dt^q} = 0.5 y_1 - x_1 z_1 - u_2 \\ \frac{d^q z_1}{dt^q} = x_1 y_1 - 0.5 - u_3 \end{cases} \quad (4)$$

因此根据定理 1, 可以设计出控制器: u_1, u_2, u_3 。

令 $e_1 = x_1 - x, e_2 = y_1 - y, e_3 = z_1 - z$, 为驱动系统(3)与响应系统(4)的同步误差, 则可以得到误差系统为

$$\begin{cases} \frac{d^q e_1}{dt^q} = e_2 - e_1 - u_1 \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} = 0.5 e_2 - x_1 e_3 - z e_1 - u_2 \\ \frac{d^q e_3}{dt^q} = y_1 e_1 + x e_2 - u_3 \end{cases} \quad (5)$$

根据定理 1 可以设置相应的控制器 u_1, u_2, u_3 :

$$\begin{cases} u_1 = (1-z) e_2 + y_1 e_3 + k e_1^\beta \\ u_2 = x e_3 + k e_2^\beta \\ u_3 = -x_1 e_2 + k e_3^\beta \end{cases}$$

该分数阶系统在加入控制器之后, 可以在以下时间达到稳定, 即:

$$t = \left\{ \left[e(e^q)^T \right]^{q-\frac{1+\beta}{1+q}} \frac{\Gamma\left(1+q-\frac{1+\beta}{1+q}\right) \Gamma(1+q)}{\Gamma\left(1+2q-\frac{1+\beta}{1+q}\right) k \Gamma(2+q)} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

其中 $e = [e_1, e_2, e_3]$, $e^q = [e_1^q, e_2^q, e_3^q]$ 。

证明 根据误差系统和所设计的控制器, 可以得到同步误差为

$$\begin{cases} \frac{d^q e_3}{dt^q} = e_1 y_1 + x e_2 + x_1 e_2 - k e_3^\beta \\ \frac{d^q e_1}{dt^q} = e_2 - e_1 - (1-z) e_2 - y_1 e_3 - k e_1^\beta \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} = 0.5 e_2 - x_1 e_3 - z e_1 - x e_3 - k e_2^\beta \end{cases}$$

根据方程可以推导出:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)} \frac{d^q}{dt^q} [e_1, e_2, e_3] [e_1^q, e_2^q, e_3^q]^T = \\ & [e_1, e_2, e_3] \left[\frac{d^q e_1^q}{dt^q}, \frac{d^q e_2^q}{dt^q}, \frac{d^q e_3^q}{dt^q} \right]^T = \\ & e_1 e_2 - e_1^2 - e_1 e_2 (1-z) - e_1 e_3 y_1 - k e_1^{\beta+1} + \\ & 0.5 e_2^2 - e_2 e_3 x_1 - z e_1 e_2 - x e_2 e_3 - k e_2^{\beta+1} + \\ & e_1 e_3 y_1 + x e_2 e_3 + e_2 e_3 x_1 - k e_3^{\beta+1} = \\ & -e_1^2 + 0.5 e_2^2 - k e_1^{\beta+1} - k e_2^{\beta+1} - k e_3^{\beta+1} \geq \\ & -e_1^2 - k e_1^{\beta+1} - k e_2^{\beta+1} - k e_3^{\beta+1} = \\ & -e_1^2 - k e_1^{\beta+1} - k e_2^{\beta+1} - k e_3^{\beta+1} \leq \\ & -k e_1^{\beta+1} - k e_2^{\beta+1} - k e_3^{\beta+1} = \\ & -k (e_1^2)^{\frac{\beta+1}{2}} - k (e_2^2)^{\frac{\beta+1}{2}} - k (e_3^2)^{\frac{\beta+1}{2}} \end{aligned}$$

根据引理 1 可得出:

$$-k(e_1^2)^{\frac{\beta+1}{2}} - k(e_2^2)^{\frac{\beta+1}{2}} - k(e_3^2)^{\frac{\beta+1}{2}} \leq -k(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)^{\frac{\beta+1}{2}} \quad (6)$$

因此可以得出:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\alpha)} \frac{d^q}{dt^q} [e_1, e_2, e_3] [e_1^q, e_2^q, e_3^q]^T \leq \\ & -k(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)^{\frac{\beta+1}{2}} = \\ & -k([e_1, e_2, e_3] [e_1, e_2, e_3]^T)^{\frac{\beta+1}{2}} = \\ & -k(ee^T)^{\frac{\beta+1}{2}} \end{aligned}$$

该控制器满足定理 1 中的条件,因此当分数阶系统中的误差系统在整个有限时间 t 内能够达到稳定状态时,则驱动系统与响应系统也达到了一种同步状态,即:

$$t = \left\{ \left[e(e^q)^T \right]^{q-\frac{1+\beta}{1+q}} \frac{\Gamma\left(1+q-\frac{1+\beta}{1+q}\right) \Gamma(1+q)}{\Gamma\left(1+2q-\frac{1+\beta}{1+q}\right) k \Gamma(2+q)} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

3 数值仿真

为了进一步验证所设计的控制器的有效性,利用 Matlab 软件进行数值仿真验证,令仿真步长 $t_\Delta = 0.001$,仿真时间 $T_{sim} = 15$ s,对于该分数阶系统中的阶数可取值为 $q = 0.9$,在进行同步稳定的过程中,驱

动系统与响应系统的初始点可以分别取为 $[x(0), y(0), z(0)] = (5, 0, 10)$ 以及 $[x_1(0), y_1(0), z_1(0)] = (-1, -1, -1)$,并且根据 $[e_1, e_2, e_3] \left[\frac{d^q e_1^q}{dt^q}, \frac{d^q e_2^q}{dt^q}, \frac{d^q e_3^q}{dt^q} \right]^T \leq 0$,在稳定控制器中的有关参数可以取值为 $k = 1.5, \beta = 1$ 。根据上述参数进行程序编写,由引理可知:当误差系统进行稳定时,可以得到误差系统的同步稳定情况仿真图,如图 1 所示。以及各状态变量同步稳定情况的仿真图,如图 2—图 4 所示。

从误差系统的仿真图中可以看出,当加入控制器后,误差系统 e_1, e_2, e_3 ,在有限时间 $t = 5$ s 内可以达到一种稳定状态。对于驱动系统以及响应系统,当 $t = 5$ s 也达到了一种完全同步状态,通过比较可知,利用控制器在对于分数阶系统进行控制时,驱动系统与响应系统在有限时间内可以实现同步,同步速度较快。由此可见,对于该分数阶系统,所设计的控制器控制效果非常显著。

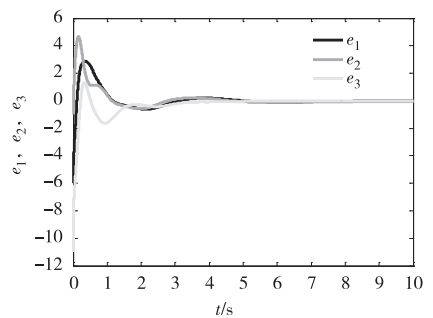


图 1 误差系统同步状态曲线图

Fig. 1 The synchronization status curve of error system

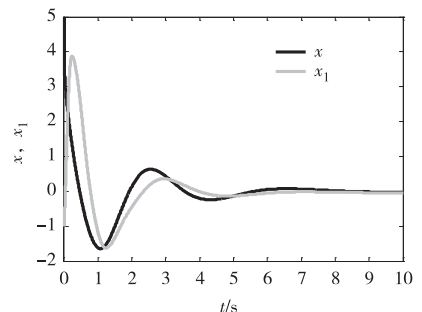


图 2 状态变量 $x-x_1$ 同步状态曲线图

Fig. 2 The synchronization state graph of state variable $x-x_1$

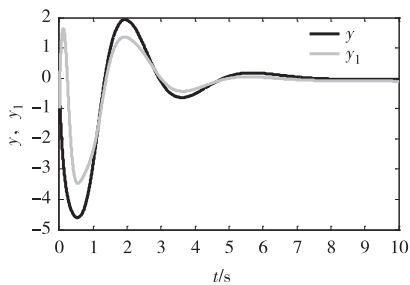


图 3 状态变量 $y-y_1$ 同步状态曲线图

Fig. 3 The synchronous state graph of state variable $y-y_1$

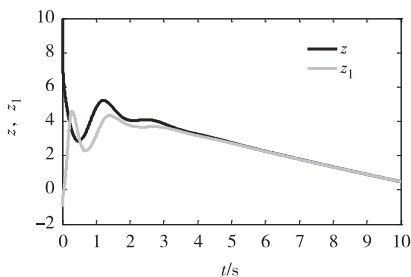


图 4 状态变量 $z-z_1$ 同步状态曲线图

Fig. 4 The synchronization state graph of state variable $z-z_1$

4 结束语

基于整数阶混沌系统,构建一个新型的分数阶混沌系统,通过对于新分数阶三维自治系统的分析,研究了该系统的平衡点、稳定性等一系列基本特征量,基于分数阶有限时间同步理论,设计出有限时间同步控制器,数值仿真验证了所设计的控制器非常有效,能够在较短的时间内完成系统同步。对比整数阶系统而言,当系统采用分数阶进行描述时,使得整个混沌系统的应用范围不仅局限于整数阶系统,延伸了整个系统的应用范围,也使得混沌系统的描述更加准确。在混沌同步的研究过程中采用有限时间同步控制理论,设计出了更加高效的同步控制器,灵活地应用于整个混沌系统同步控制中,该控制增强了混沌系统在保密通讯,图像加密等领域的不可预测性,提高可靠性与安全性。

参考文献 (References):

[1] LORENZ E N. Deterministic Non Periodic Flow [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963(20):130

[2] HILBOOM, ROBERT C. Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers [J]. American Journal of Physics, 1994, 62(9):861

[3] ROSSLER O E. An Equation for Continuous Chaos. Phys, Lett A 57, 1976, 397—398

[4] CHEN G, UETA T. Yet Another Chaotic Attractor [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2011, 9(7):1465—1466.

[5] LV J H, CHEN G R. A New Chaotic Attractor Coined. [J] Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 659—661

[6] CHONGXIN L, LING L, TAO L, et al. A New Butterfly-shaped Attractor of Lorenz-like System [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 28(5):1196—1203

[7] 党红刚, 刘晓君. 一个混沌复系统的同步与混沌控制 [J]. 四川大学学报(自然科学版), 2013, 50(5): 1049—1052

DANG H G, LIU X J. Synchronization and Chaos Control of a Chaotic Complex System [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2013, 50(5): 1049—1052 (in Chinese)

[8] SPARROW R B C. The Fractal Geometry of Nature [J]. Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General), 1984, 147(4):616—618

[9] 雷腾飞, 陈恒, 付海燕. 分数阶 Liu 混沌系统的 Adomian 分解法求解及数字实现 [J]. 天津科技大学学报, 2018, 33(5):73—78

LEI T F, CEHN H, FU H Y, Solution to the Fractional-order Liu Chaotic System Based on Adomian Decomposition and Its Digital Implementation [J]. Journal of Tianjin University of Science and Technology, 2018, 33(5):73—78 (in Chinese)

[10] 贾雅琦. 时滞分数阶混沌系统的完全同步 [J]. 计算机产品与流通, 2018(7):276—277

JIA Y Q. Complete Synchronization of Fractional-order Chaotic Systems with Time-delay [J]. Computer Products and Circulation, 2018(7):276—277 (in Chinese)

[11] 郝孟丽, 任勤. 标量控制下的分数阶 Lü 系统的参数辨识和自适应同步 [J]. 河南理工大学学报(自然科学版), 2017, 36(1):144—148

- HAO M L, REN Q, Parameters Identification and Adaptive Synchronization of Fractional-order Lü System via a Scalar Controller [J]. Journal of Henan Polytechnic University (Natural Science Edition), 2017, 36 (1): 144—148 (in Chinese)
- [12] PEHLIVAN, IHSAN; UYAROGLU, YILMAZ. A New Chaotic Attractor From General Lorenz System Family and Its Electronic Experimental Implementation [J]. Turkish Journal of Electrical of Electrical Engineering and Computer Science, 2010, 18(2): 171—184
- [13] ELIKOVSKY S, CHEN G. On the Generalized Lorenz Canonical Form[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 26(5): 1271—1276 (in Chinese)
- [14] 胡建兵. 分数阶混沌稳定性理论及同步方法研究 [D]. 太原: 中北大学, 2008
- HU J B. Study on Stable Theorem and Synchronizing Approach About Fractional Chaotic System [D]. Taiyuan: North University of China, 2008 (in Chinese)
- [15] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory & Applications of Fractional Differential Equations [M]. Amsterdam: Elsevier, 2006

Analysis of Fractional-order Generalized Chaotic Systems and Finite Time Synchronization

ZHOU Liu-yuan, SUN Guan, CUI Yan, HE Hong-jun, LU Chen hui

(School of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering and Science, Shanghai 201620, China)

Abstract: Chaos is a special form of motion in nonlinear dynamical system. It is the main form to explore the application of chaos in abstract chaotic system into mathematical model and to control it. With the deepening of chaotic system research, fractional order system gradually stands out from integer order system. By studying a new class of integer order chaotic systems, a fractional order 3d autonomous system is proposed. According to Lyapunov stability theory, the equilibrium points in chaotic systems are distinguished by the linear terms of the system, and it is found that the equilibrium points generated by the new fractional-order system are unstable saddle points. For this fractional-order system, the finite-time stability theory is adopted to design the synchronization controller in the drive system and response system, and the finite-time synchronization relation graph is drawn through numerical simulation to verify the realization of chaotic synchronization control in a short time.

Key words: chaos systems, Lyapunov stability theory, finite time, synchronization control

责任编辑: 罗姗姗

引用本文/Cite this paper:

周六圆, 孙观, 崔岩, 等. 分数阶广义混沌系统分析及有限时间同步[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2020, 37(3): 60—65

ZHOU L Y, SUN G, CUI Y, et al. Analysis of Fractional-order Generalized Chaotic Systems and Finite Time Synchronization[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020, 37(3): 60—65