

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0003.008

# 一类分数阶最优控制问题的高阶快速算法\*

黄秋月

(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

**摘要:**分数阶扩散方程约束的分布式最优控制问题广泛地应用于科学和工程领域,包括优化设计、控制和参数识别;针对这类问题,提出了一种高阶的快速算法。对于求解该问题的一阶最优条件所产生的耦合两点边值问题,在空间上利用紧差分,时间上利用边值方法对该问题进行离散,离散后得到一个 $2 \times 2$ 块线性系统;然后使用带有 Kronecker 积分裂的迭代算法求解该线性系统,该算法是块状的 Kronecker 积结构,通过交替的 Kronecker 积分裂迭代方法得到了这个 Kronecker 积,并证明了该分裂迭代算法是收敛的;同时使用 GMRES 方法来加速 Kronecker 积分裂迭代的收敛;最后数值实验表明了该算法的精确性和计算效率。

**关键词:**边值方法;预处理;两点边值问题;FDE-约束优化

中图分类号:O241

文献标志码:A

文章编号:1672-058X(2020)03-0052-08

## 0 引言

主要研究了分数阶微分方程(FDE)约束下的最优控制问题的数值解,该问题作用于空间-时间区域 $(x, t) \in (x_L, x_R) \times (t_0, T)$ ,使如下的目标函数最小化:

$$\min_{y,u} \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (y - y_d)^2 dx dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \int_0^1 u^2 dx dt \quad (1)$$

它由状态变量  $y(x, t)$  扩散方程的初边值问题式(2)控制:

$$\begin{aligned} Jy &= f + u, (x, t) \in (x_L, x_R) \times (t_0, T] \\ y(0, t) &= y(1, t) = 0, t \in [t_0, T] \\ y(x, 0) &= y_0(x), x \in [x_L, x_R] \end{aligned} \quad (2)$$

这里,  $y(x, t)$  表示问题的状态变量,人们希望在某种意义上“尽可能接近”所需要的状态  $y_d(x, t)$ ,  $y_d(x, t)$  代表一个状态变量  $y$  的规定或观测值,  $u$  表示控制变量,  $\beta > 0$  是 Tikhonov 正则化参数,决定在多大程度上实现所期望的状态和最小化控制,  $J$  代

表一个分数阶扩散算子:

$$Jy = \frac{\partial y}{\partial t} - d \left( \frac{\partial^{\alpha} y}{\partial_{+} x^{\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha} y}{\partial_{-} x^{\alpha}} \right)$$

$$(x, t) \in (x_L, x_R) \times (t_0, T]$$

这里的扩散系数  $d$  是正常数,  $\alpha \in (1, 2)$  是控制方程的反常扩散阶数。而且,左边和右边的分数导数在 Riemann-Liouville 具有如下形式的定义:

$$\frac{\partial^{\alpha} y}{\partial_{+} x^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{x_L}^x \frac{y(\xi, t)}{(x - \xi)^{\alpha-1}} d\xi$$

$$\frac{\partial^{\alpha} y}{\partial_{-} x^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_x^{x_R} \frac{y(\xi, t)}{(\xi - x)^{\alpha-1}} d\xi$$

这里  $\Gamma(\cdot)$  是 gamma 函数。

FDE-约束优化问题广泛应用于科学和工程领域,包括优化设计、控制和参数识别。它们在空气动力学、金融数学、地球物理、医学和环境工程等多个研究领域被提出和研究<sup>[1-3]</sup>。

由于时间相关的 FDE-约束优化问题的全局性质,它们的数值解通常代表非常密集的计算任务。更具体地说,求解时间相关的 FDE-约束优化问题的

收稿日期:2019-11-02;修回日期:2019-12-15.

\* 基金项目:重庆市基础研究与前沿探索项目(重庆市自然科学基金(CSTC2018JCYJAX0113)).

作者简介:黄秋月(1991—),女,广西柳州人,硕士研究生,从事微分方程数值解研究.

数值方法通常产生大的、稀疏的和病态的线性系统。为了降低计算成本,提出了基于多重网格的快速求解方法和预处理迭代方法<sup>[4-8]</sup>。

本文采用先优化后离散的方法求解优化问题。从连续一阶最优条件出发,推导了 FDEs 的耦合系统。在适当的空间离散化之后,得到了一个耦合的常微分方程系统(ODEs),它是一个时间上的边值问题(BVP)。对于 ODEs 的时间离散化,使用边值方法(BVMs)。BVMs 是一类基于线性多步法求解 ODEs 初值和边界值问题的数值方法<sup>[9-10]</sup>。该方法具有精度高、稳定性好等优点。因此,与欧拉方法相比,BVMs 允许更少的时间步长来满足精度要求,从而导致更小的内存消耗。当计算的解足够光滑时,这种方法可以达到很好的工作效果。

本文主要目的是构建一个  $2 \times 2$  块线性系统的预处理方法,该方法是由优化问题式(1)(2)的 BVMs 离散化引起的。此处提出一种带有 Kronecker 积分裂<sup>[11-12]</sup> 预处理的 GMRES 方法,通过交替的 Kronecker 积分裂迭代方法得到了这个 Kronecker 积,并且证明该方法是收敛的。数值实验表明,该预处理迭代方法的收敛与网格大小和正则化参数  $\beta$  无关。

## 1 分数阶最优控制的离散化

求解 FDE-约束优化问题式(1)有两种策略。第一个是所谓的先离散后优化的方法,这意味着首先离散了目标泛函和 FDE,然后写下了一阶或 Karush-Kuhn-Tucke (KKT) 条件。第二种是先优化后离散方法,涉及推导无穷维一阶条件,然后选择适当的离散化。这里采用的是先优化再离散的方法。

### 1.1 最优条件

为了推导状态函数的伴随状态方程,首先把状态方程式(2)重写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - d \left( \frac{\partial^\alpha y}{\partial_+ x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha y}{\partial_- x^\alpha} \right) &= u + f \\ y(0, t) = y(1, t) &= 0, t \in [t_0, T] \\ y(x, 0) = y_0(x), x &\in [x_L, x_R] \end{aligned}$$

然后,对  $u$  求导得到梯度方程:

$$\beta y - \lambda = 0$$

最后,将方程乘以任意具有指定边界条件和终端条件的函数,得到  $\lambda(x, t)$  的伴随状态方程的终端边值问题:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \lambda}{\partial t} - d \left( \frac{\partial^\alpha \lambda}{\partial_+ x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha \lambda}{\partial_- x^\alpha} \right) &= -y + y_d \\ \lambda(0, t) = \lambda(1, t) &= 0, t \in [t_0, T] \\ \lambda(x, T) &= 0, x \in [x_L, x_R] \end{aligned}$$

现在利用梯度方程给出的控制和伴随比例关系,如  $y = \lambda/\beta$ ,将该表达式代入状态方程,可以将该条件简化为一个分数阶微分方程的耦合系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - d \left( \frac{\partial^\alpha y}{\partial_+ x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha y}{\partial_- x^\alpha} \right) = \frac{\lambda}{\beta} + f \\ -\frac{\partial \lambda}{\partial t} - d \left( \frac{\partial^\alpha \lambda}{\partial_+ x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha \lambda}{\partial_- x^\alpha} \right) = -y + y_d \end{cases} \quad (3)$$

这表示一阶最优性条件(Karush-Kuhn-Tucke 条件),且这个系统包含了  $y$  的初值条件和  $\lambda$  的终值条件、 $y$  和  $\lambda$  的边界条件。

### 1.2 离散化

设  $N$  是一个正整数,  $\Delta x = \frac{x_R - x_L}{N+1}$  是空间网格大小。定义一个空间划分  $x_i = x_L + i\Delta x, i = 0, 1, \dots, N+1$ 。在空间上采用紧差分方法进行离散<sup>[13]</sup>,结合齐次 Dirichlet 边界条件  $y_0(t) = y_{N+1}(t) = 0$ ,可以将方程组式(3)改写成矩阵形式:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{y}'(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) = \frac{1}{\beta}\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{M}\mathbf{f}(t) + \mathbf{P}_1 \\ -\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}'(t) + \mathbf{L}\mathbf{y}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{y}(t) + \mathbf{M}\mathbf{y}_d(t) + \mathbf{P}_2 \end{cases} \quad (4)$$

这里  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_N(t)]^T$

$\mathbf{f}(t) = [f_1(t), \dots, f_N(t)]^T$

$\boldsymbol{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)]^T$

$\mathbf{y}_d(t) = [y_{d1}(t), \dots, y_{dN}(t)]^T$

$\mathbf{M} = \text{tridiag}[c_\alpha, 1 - 2c_\alpha, c_\alpha]$

$c_\alpha = (-\alpha^2 + \alpha + 4)/24$

$\mathbf{P}_1 = [c_\alpha f_0(t), 0, \dots, 0, c_\alpha f_{N+1}(t)]^T$

$\mathbf{P}_2 = [c_\alpha y_{d0}(t), 0, \dots, 0, c_\alpha y_{dN+1}(t)]^T$

$\mathbf{D} = \Delta x^{-\alpha} d \cdot \mathbf{I}_N, \mathbf{L} = \mathbf{D}(\mathbf{G}_\alpha + \mathbf{G}_\alpha^T), \mathbf{I}_N$  为  $N$  维单位

矩阵。

$$\mathbf{G}_\alpha = - \begin{bmatrix} w_1^{(\alpha)} & w_0^{(\alpha)} & 0 & 0 & 0 \\ w_2^{(\alpha)} & w_1^{(\alpha)} & w_0^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ w_3^{(\alpha)} & w_2^{(\alpha)} & w_1^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_N^{(\alpha)} & w_{N-1}^{(\alpha)} & \cdots & w_2^{(\alpha)} & w_1^{(\alpha)} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$G_\alpha$  是一个  $N$  阶的 Toeplitz 矩阵, 其中系数  $w_k^{(\alpha)}$  定义为

$$w_0^{(\alpha)} = \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{12}, w_1^{(\alpha)} = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{12}$$

$$w_k^{(\alpha)} = \left[ \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{12(k-1)} - \frac{(\alpha+1)^2(\alpha+2)^2}{12k} + 1 \right] (-1)^k \binom{\alpha}{k-2}, k \geq 2$$

注意, 式(4) 是一个时间边值问题。为了离散时间维数, 考虑使用边值方法。BVMs 是初值问题 (IVPs) 的隐式线性多步法的推广, 它使用初始条件和终值条件的组合来代替初始条件。关于这些方法的详细信息, 参考文献 [10] 和其中的参考资料。注意到, BVMs 已成功地应用于广泛微分和积分-微分方程。

为具体说明算法, 考虑如下常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), t_0 \leq t \leq T \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

令  $\tilde{u} = (u_0^T, u_1^T, \dots, u_s^T)^T, \tilde{f} = (f(t_0, u_0)^T, f(t_1, u_1)^T, \dots, f(t_s, u_s)^T)^T$ , 则边值方法可写为如下形式:

$$(A^e \otimes I_N) \tilde{u} = h(B^e \otimes I_N) \tilde{f} \quad (5)$$

这里  $I_N$  为  $N$  维单位矩阵,  $\otimes$  表示 Kronecker 积。

矩阵  $A^e = [a_0 \ A_1] = [A_2 \ a_s] \in \mathbf{R}^{s \times (s+1)}$ , 有如下结构

$$A^e = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_k^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_0^{(k_1-1)} & \alpha_1^{(k_1-1)} & \cdots & \alpha_k^{(k_1-1)} \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ & & & \alpha_0^{(s-k_2+1)} & \alpha_1^{(s-k_2+1)} & \cdots & \alpha_k^{(s-k_2+1)} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \alpha_0^{(s)} & \alpha_1^{(s)} & \cdots & \alpha_k^{(s)} \end{pmatrix}$$

矩阵  $B^e = [b_0 \ B_1] = [B_2 \ b_s]$  有着类似的结构,

只需要将  $\alpha_j(\alpha_j^{(i)})$  替换为  $\beta_j(\beta_j^{(i)})$  即可。

利用 BVMs 求解耦的两点边值问题式(4), 对式(4)应用式(5), 通过将  $y_0$  和  $\lambda_s$  (由于给出了初始值和终端值) 移动到右边, 可以得到:

$$\begin{cases} (A_1 \otimes M + hB_1 \otimes L)y + \left(-\frac{h}{\beta}\right)(B_2 \otimes M)\lambda = h_1 \\ h(B_1 \otimes M)y + (-A_2 \otimes M + hB_2 \otimes L)\lambda = h_2 \end{cases} \quad (6)$$

这里

$$y = (y_1^T, y_2^T, \dots, y_s^T)^T$$

$$\lambda = (\lambda_0^T, \lambda_1^T, \dots, \lambda_{s-1}^T)^T$$

$$\tilde{f} = (f(t_0)^T, f(t_1)^T, \dots, f(t_s)^T)^T$$

$$\tilde{Y}_d = (y_{d0}^T, y_{d1}^T, \dots, y_{ds}^T)^T$$

$$A^e = [a_0, a_1, \dots, a_s], B^e = [b_0, b_1, \dots, b_s]$$

$$A_1 = [a_1, a_2, \dots, a_s], B_1 = [b_1, b_2, \dots, b_s]$$

$$A_2 = [a_0, a_1, \dots, a_{s-1}], B_2 = [b_0, b_1, \dots, b_{s-1}]$$

$$h_1 = (-a_0 \otimes M - hb_0 \otimes L)y_0 + \frac{h}{\beta}(b_s \otimes M)\lambda_s + h(B^e \otimes I_N)(M\tilde{f} + P_1)$$

$$h_2 = (a_s \otimes M - hb_s \otimes L)\lambda_s - h(b_0 \otimes M)y_0 + h(B^e \otimes I_N)(M\tilde{Y}_d + P_2)$$

因此式(6) 可以写成:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \otimes M + hB_1 \otimes L & -\frac{h}{\beta}B_2 \otimes M \\ hB_1 \otimes M & -A_2 \otimes M + hB_2 \otimes L \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ \lambda \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}_b \quad (7)$$

式(7) 通常是大而稀疏的, 为了有效求解该式, 需要采用预处理迭代方法。

## 2 预处理方法

一般来说, 式(7) 是非对称的, 因此使用 GMRES 算法求解, 这是一个用于非对称线性系统的 Krylov 子空间方法。为了获得令人满意的收敛性, 必须将 GMRES 与一个预处理器耦合, 也就是说, 想要找到一个矩阵  $P$ , 其中  $P^{-1}Q$  具有更好的光谱性质 (并且对于任意给定的向量  $v, P^{-1}v$  都很容易计算)。然后求解一个等价的预处理系统:

$$P^{-1}Qx = P^{-1}b$$

预处理的目的是选择一个矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}Q$  的特征值是聚集的。

### 2.1 Kronecker 积分裂迭代

为了让式(7)具有比较对称的形式, 对  $Qx = b$  左乘了一个矩阵  $K^{-1}$ , 使式(7)变形为

$$K^{-1}QKK^{-1}x = K^{-1}b$$

令  $K^{-1}QK = \bar{Q}, K^{-1}x = \bar{x}, K^{-1}b = \bar{b}$ , 则式(7)也变形为

$$\bar{Q}\bar{x} = \bar{b}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta}}I_{sN} & 0 \\ 0 & I_{sN} \end{bmatrix}, K^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta}I_{sN} & 0 \\ 0 & I_{sN} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} A_1 \otimes M + hB_1 \otimes L & -\frac{h}{\sqrt{\beta}}B_2 \otimes M \\ \frac{h}{\sqrt{\beta}}B_1 \otimes M & -A_2 \otimes M + hB_2 \otimes L \end{bmatrix}$$

在文献[11,12]中, 提出了一种 Kronecker 积分裂预处理, 其思想是将两个 Kronecker 乘积之和近似为一个 Kronecker 积。根据上述的观点, 可以得到 KPS 迭代的标准形式:

$$\bar{x}^{k+1} = G(\zeta, \eta)\bar{x}^k + H(\zeta, \eta)\bar{b} \quad (8)$$

这里设参数  $\zeta, \eta > 0$ , 其中

$$G(\zeta, \eta) = [(\zeta B + A)^{-1}(\eta B - A)] \otimes [(\eta M + hL)^{-1}(\zeta M - hL)]$$

$$H(\zeta, \eta) = (\zeta + \eta)(\zeta B + A)^{-1} \otimes (\eta M + hL)^{-1}$$

这里

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -\frac{h}{\sqrt{\beta}}B_2 \\ \frac{h}{\sqrt{\beta}}B_1 & -A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

注意  $G(\zeta, \eta)$  是 KPS 迭代方法的迭代矩阵, 同时利用这个概念来近似  $\bar{Q}$ , 很容易看出  $\bar{Q}$  具有如下分裂:

$$\bar{Q} = P(\zeta, \eta) - R(\zeta, \eta)$$

这里

$$P(\zeta, \eta) = \frac{1}{\zeta + \eta}(\zeta B + A) \otimes (\eta M + hL)$$

$$R(\zeta, \eta) = \frac{1}{\zeta + \eta}(\eta B + A) \otimes (\zeta M - hL)$$

分裂矩阵  $P(\zeta, \eta)$  可以用来近似  $\bar{Q}$ ,  $P(\zeta, \eta)$  有 Kronecker 积结构且很容易转化, 可以得到:

$$P(\zeta, \eta)^{-1}\bar{Q} = I_{sN} - P(\zeta, \eta)^{-1}R(\zeta, \eta) = I_{sN} - G(\zeta, \eta)$$

### 2.2 KPS 迭代的收敛性

为了分析 KPS 迭代方法的收敛性, 考虑不动点形式的迭代式(8)。式(8)收敛当且仅当  $\rho(G(\zeta, \eta)) < 1$  成立, 其中  $\rho(G(\zeta, \eta))$  表示  $G(\zeta, \eta)$  的谱半径, 定理1描述了 KPS 迭代的收敛性。

定理1 假设  $\zeta, \eta$  是两个正常数, 满足

$$-\min_{\nu \in \sigma(B^{-1}A)} \Re(\nu) < \frac{\zeta - \eta}{2} < \min_{\mu \in \sigma(hL)} \Re(\mu) \quad (9)$$

其中  $\sigma(B^{-1}A)$  是矩阵  $B^{-1}A$  的谱,  $\sigma(hL)$  是矩阵  $hL$  的谱, 然后 KPS 迭代矩阵  $G(\zeta, \eta)$  的谱半径  $\rho(G(\zeta, \eta))$  是有界的:

$$\gamma(\zeta, \eta) := \max_{\nu \in \sigma(B^{-1}A + \frac{\zeta - \eta}{2}I_s)} \left| \frac{\frac{\eta + \zeta}{2} - \nu}{\frac{\eta + \zeta}{2} + \nu} \right| = \max_{x+iy \in \sigma(B^{-1}A + \frac{\zeta - \eta}{2}I_s)} \sqrt{\frac{\left(\frac{\eta + \zeta}{2} - x\right)^2 + y^2}{\left(\frac{\eta + \zeta}{2} + x\right)^2 + y^2}}$$

因此, 接下来

$$\rho(G(\zeta, \eta)) \leq \gamma(\zeta, \eta) < 1$$

证明 由 Kronecker 积性质, 迭代矩阵  $G(\zeta, \eta)$  的特征值  $\lambda$  具有以下形式:

$$\lambda = \frac{\zeta - \mu}{\eta + \mu} \cdot \frac{\eta - \nu}{\zeta + \nu}, \mu \in \sigma(hL)$$

$$\nu \in \sigma(B^{-1}A) =$$

$$\frac{\frac{\zeta + \eta}{2} - \left(\mu - \frac{\zeta - \eta}{2}\right)}{\frac{\zeta + \eta}{2} + \left(\mu - \frac{\zeta - \eta}{2}\right)} \cdot \frac{\frac{\zeta + \eta}{2} - \left(\nu + \frac{\zeta - \eta}{2}\right)}{\frac{\zeta + \eta}{2} + \left(\nu + \frac{\zeta - \eta}{2}\right)}$$

这就等于

$$\lambda = \frac{\frac{\zeta + \eta}{2} - \mu}{\frac{\zeta + \eta}{2} + \mu} \cdot \frac{\frac{\zeta + \eta}{2} - \nu}{\frac{\zeta + \eta}{2} + \nu}$$

$$\mu \in \sigma\left(hL - \frac{\zeta - \eta}{2}I_N\right), \nu \in \sigma\left(B^{-1}A + \frac{\zeta - \eta}{2}I_s\right)$$

利用式(9)可以看到矩阵  $hL - \frac{\zeta - \eta}{2}I_N$  的所有特征值有非负实部, 得到:

$$\left| \frac{\eta + \zeta}{2} - \mu \right| \leq 1, \mu \in \sigma \left( hL - \frac{\zeta - \eta}{2} I_N \right)$$

接下来

$$\rho(G(\zeta, \eta)) = \max_{\substack{\mu \in \sigma(hL - \frac{\zeta - \eta}{2} I_N) \\ \nu \in \sigma(B^{-1}A + \frac{\zeta - \eta}{2} I_s)}} \left| \frac{\frac{\zeta + \eta}{2} - \mu}{\frac{\zeta + \eta}{2} + \mu} \right| \cdot \left| \frac{\frac{\zeta + \eta}{2} - \nu}{\frac{\zeta + \eta}{2} + \nu} \right| \leq \max_{\nu \in \sigma(B^{-1}A + \frac{\zeta - \eta}{2} I_s)} \left| \frac{\frac{\zeta + \eta}{2} - \nu}{\frac{\zeta + \eta}{2} + \nu} \right| = \max_{\nu = x + iy \in \sigma(B^{-1}A + \frac{\zeta - \eta}{2} I_s)} \left| \frac{\frac{\zeta + \eta}{2} - (x + iy)}{\frac{\zeta + \eta}{2} + (x + iy)} \right| = \max_{x + iy \in \sigma(B^{-1}A + \frac{\zeta - \eta}{2} I_s)} \sqrt{\frac{(\frac{\eta + \zeta}{2} - x)^2 + y^2}{(\frac{\eta + \zeta}{2} + x)^2 + y^2}} = \gamma(\zeta, \eta) \quad (10)$$

当  $\frac{\zeta - \eta}{2} = \min_{\mu \in \sigma(hL)} R(\mu)$  时, 式(10)成立。类似地,

因为  $B^{-1}A + \frac{\zeta - \eta}{2} I_s$  的所有特征值有正实部, 这很容易

证明  $\rho(G(\zeta, \eta)) \leq \gamma(\zeta, \eta) < 1$ 。

为了使分裂迭代的收敛性尽可能快, 可以选择  $\zeta, \eta$  使  $\gamma(\zeta, \eta)$  尽可能小。定理 2 描述了式(8)的最优迭代参数和相应的最优渐进收敛因子。

**定理 2** 用  $\mu_{\min}$  表示  $hL$  的特征值实部最小值,  $x_{\max}$  和  $x_{\min}$  表示  $B^{-1}A$  的特征值实部的最大值和最小值,  $y_{\max}$  和  $y_{\min}$  表示矩阵  $B^{-1}A$  的特征值虚部的最大值和最小值的绝对值, 设  $\zeta, \eta$  为 2 个正常数且满足

$$-y_{\min} < \frac{\zeta - \eta}{2} \leq \mu_{\min}$$

矩阵  $B^{-1}A + \frac{\zeta - \eta}{2} I_s$  包含在  $\Omega =$

$$\left[ x_{\min} + \frac{\zeta - \eta}{2}, x_{\max} + \frac{\zeta - \eta}{2} \right] \cdot i[y_{\min}, y_{\max}]。$$

存在

$$\{\zeta^*, \eta^*\} := \arg \min_{\zeta, \eta} \left\{ \max_{x + iy \in \Omega} \sqrt{\frac{(\frac{\zeta + \eta}{2} - x)^2 + y^2}{(\frac{\zeta + \eta}{2} + x)^2 + y^2}} \right\}$$

如果

$$y_{\max} < \sqrt{(x_{\min} + \mu_{\min})(x_{\max} + \mu_{\min})}$$

$$\zeta^* = \sqrt{(x_{\min} + \mu_{\min})(x_{\max} + \mu_{\min}) - y_{\max}^2} + \mu_{\min}$$

$$\eta^* = \sqrt{(x_{\min} + \mu_{\min})(x_{\max} + \mu_{\min}) - y_{\max}^2} - \mu_{\min}$$

在定理 1 的假设下, 由

$$P(\zeta, \eta)^{-1} \bar{Q} = I_{sN} - G(\zeta, \eta)$$

很容易看出来预处理矩阵  $P(\zeta, \eta)^{-1} \bar{Q}$  的特征值是包含在一个圆心为  $(1, 0)$ , 半径小于 1 的圆中。因此, 如果将 KPS 迭代应用于 GMRES 预处理, 将会提高 GMRES 的收敛速度。

### 3 数值实验

本节进行数值实验, 以证明 BVMs 求解优化问题的精确度和基于 Kronecker 积的预处理器的有效性。所有实验均在 Matlab 中进行, 使用 GMRES 作为 Krylov 子空间方法, 并使用 Matlab 函数 gmres 作为 GMRES 求解器。这里选择了一个四阶 BVM, 称为第二类扩展的梯形公式 (ETR<sup>2</sup>-4), 用于时间离散化。

考虑如下的控制问题:

$$\begin{cases} y = \left( \frac{4}{\pi^2 \beta} e^T - \frac{4}{(4 + \pi^2) \beta} e^t \right) x^4 (2 - x)^4 \\ \lambda = (e^T - e^t) x^4 (2 - x)^4, \left[ y = \frac{1}{\beta} \lambda \right] \end{cases}$$

其中  $q_5 = 16, q_6 = -32, q_7 = 24, q_8 = -8, q_9 = 1, d = 100, T = 4$ 。

数值实验的结果如表 1—表 3 所示, 在表 1—表 2 中, “误差”表示数值解与精确解之间的差值, “收敛阶”表示此时精确解和由基于 Kronecker 积的块预处理器  $P(\zeta^*, \eta^*)$  的 GMRES 方法预处理得到的数值解之间的收敛阶数。这里设  $N = 399, \alpha = 1.8$ , GMRES 的停止准则是  $\|r^{(k)}\|_2 / \|r^{(0)}\|_2 \leq 10^{-12}$ , 其中  $r^{(k)}$  是迭代  $k$  次后的残差向量, 选择零向量为初始向量。测量近似值  $y$  的“误差”为

$$E = \max_{j=0,1,\dots,s} \|y(t_j) - y_j\|_{\infty}$$

其中  $y(t)$  是解析解在空间网格点的求值相对应的向量函数,  $\lambda$  也采用了类似的误差测量方法。

表 1 控制问题在不同  $\beta$  下  $y$  的误差和收敛阶

Table 1 Error in  $y$  and temporal convergence order of control problem with different  $\beta$

$s$	$\beta=1$		$\beta=10^{-1}$		$\beta=10^{-2}$		$\beta=10^{-3}$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
5	4.241e-04	—	4.241e-03	—	4.238e-02	—	4.216e-01	—
10	3.507e-05	3.60	3.507e-04	3.60	3.505e-03	3.60	3.487e-02	3.60
20	2.762e-06	3.67	2.762e-05	3.67	2.760e-04	3.67	2.751e-03	3.66
40	2.027e-08	3.77	2.065e-06	3.74	2.023e-05	3.77	2.019e-04	3.77

表 2 控制问题在不同  $\beta$  下  $\lambda$  的误差和收敛阶

Table 2 Error in  $\lambda$  and temporal convergence order of control problem with different  $\beta$

$s$	$\beta=1$		$\beta=10^{-1}$		$\beta=10^{-2}$		$\beta=10^{-3}$	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
5	1.457e-03	—	1.466e-03	—	1.557e-03	—	2.460e-03	—
10	1.066e-04	3.77	1.073e-04	3.77	1.139e-04	3.77	1.797e-04	3.77
20	5.213e-06	4.35	5.248e-06	4.35	5.578e-06	4.35	8.683e-06	4.37
40	2.921e-07	4.16	2.937e-07	4.16	3.094e-07	4.17	4.657e-07	4.22

表 3 控制问题在预处理 GMRES 下的迭代次数和时间

Table 3 Iteration count and time of preconditioned GMRES for control problem

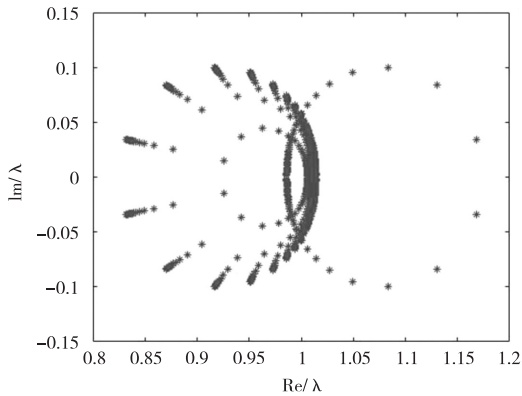
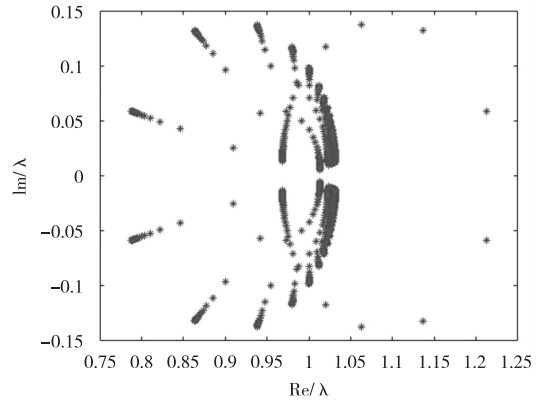
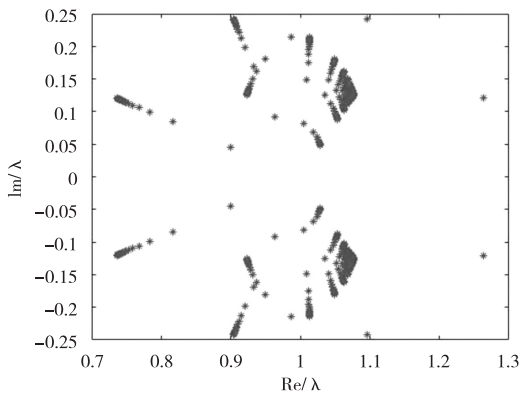
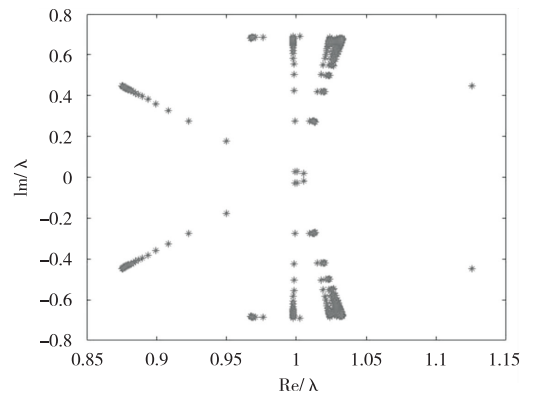
$s$	$N+1$	$\beta=1$		$\beta=10^{-2}$		$\beta=10^{-4}$		$\beta=10^{-6}$	
		迭代次数	时间/s	迭代次数	时间/s	迭代次数	时间/s	迭代次数	时间/s
20	100	8	0.14	8	0.16	10	0.13	16	0.17
	200	8	0.24	8	0.23	10	0.23	16	0.27
	300	8	0.34	8	0.29	10	0.31	16	0.34
	400	8	0.49	8	0.46	10	0.46	16	0.51
40	100	11	0.20	12	0.18	13	0.20	18	0.21
	200	11	0.34	12	0.32	13	0.34	18	0.41
	300	11	0.46	12	0.48	13	0.45	18	0.53
	400	11	0.63	12	0.61	13	0.64	18	0.75
80	100	16	0.34	17	0.32	20	0.35	22	0.37
	200	16	0.64	17	0.64	20	0.71	22	0.74
	300	16	0.88	17	0.84	20	0.92	22	1.00
	400	16	1.13	17	1.14	20	1.21	22	1.33

从表 1—表 2 可以看出,所提出的 BVM 在时间方向上对不同的  $\beta$  值可以达到四阶收敛速度。

在表 3 中,“迭代次数”表示求解控制问题所需要预处理 GMRES 的迭代次数。“时间”表示使用预处理  $P(\zeta^*, \eta^*)$  的 GMRES 方法求解问题的总时间,以  $s$  为单位。这里设置  $\alpha = 1.8$ ,预处理 GMRES 方法的停止条件设置为  $\|r^{(k)}\|_2 / \|r^{(0)}\|_2 \leq 10^{-10}$ 。

由表 3 可以看出,随着  $s, N$  的增大,含有预处理  $P(\zeta^*, \eta^*)$  的 GMRES 方法的迭代次数几乎保持不变。此外,预处理 GMRES 迭代的收敛性在所有情况下都表现为与  $\beta$  无关。

预处理矩阵  $P^{-1}(\zeta^*, \eta^*)Q$  在不同的  $\beta$  下特征值的分布如图 1—图 4 所示,这些图很清楚地表明该预处理矩阵的特征值很紧密,具有很好的处理效果。

图 1  $\beta=1$  的特征值分布Fig. 1 The eigenvalue distribution with  $\beta=1$ 图 2  $\beta=10^{-2}$  的特征值分布Fig. 2 The eigenvalue distribution with  $\beta=10^{-2}$ 图 3  $\beta=10^{-4}$  的特征值分布Fig. 3 The eigenvalue distribution with  $\beta=10^{-4}$ 图 4  $\beta=10^{-6}$  的特征值分布Fig. 4 The eigenvalue distribution with  $\beta=10^{-6}$ 

## 4 结束语

考虑应用边值方法求解分数阶约束优化问题,这种方法与传统的欧拉时间离散化方法相比,在解决这类问题上具有更高的精度。所需时间步长的减少导致需要求解的矩阵系统相对较小,需要存储的解向量也少。对于离散化的  $2 \times 2$  块线性系统,使用带有块状的 Kronecker 积分裂迭代预处理的 GMRES 方法,得到了 Kronecker 积。数值计算表明,该预处理的 GMRES 对于网格大小和正则化参数来说具有较强的鲁棒性。

## 参考文献 (References):

- [1] AGRAWAL O. A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems [J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 38(1—4): 323—337
- [2] DORVILLE R, MOPHOU G M, VALMORIN V S.

Optimal Control of a Nonhomogeneous Dirichlet Boundary Fractional Diffusion Equation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62 (3): 1472—1481

- [3] 许文序,周宗福,无穷区间上分数阶耦合微分系统积分边值问题正解的存在性[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2019, 36(1): 6—12  
XU W X, ZHOU Z F. Existence of Positive Solutions for Integral Boundary Problem of Coupled Fractional Differential Systems on Infinite Interval [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2019, 36(1): 6—12 (in Chinese)
- [4] BORZH A. Multigrid Methods for Parabolic Distributed Optimal Control Problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 157(2): 365—382
- [5] HEINKENSCHLOSS M. A Time-domain Decomposition Iterative Method for the Solution of Distributed Linear Quadratic Optimal Control Problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 173(1): 169—198

- [6] MATHEW T P, SARKIS M, SCHAERER C E. Analysis of Block Parareal Preconditioners for Parabolic Optimal Control Problems [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2010, 32(3): 1180—1200
- [7] PEARSON J W, STOLL M, WATHEN A J. Regularization - Robust Preconditioners for Time - Dependent PDE-Constrained Optimization Problems[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2012, 33(4): 1126—1152
- [8] DU N, WANG H, LIU W. A Fast Gradient Projection Method for a Fractional Optimal Control[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2015, 68(1): 1—20
- [9] AXELSSON O, VERWER J G. Boundary Value Techniques for Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations[J]. *Mathematics of Computation*, 1985, 45(171): 153—171
- [10] BRUGNANO L, TRIGIANTE D. Solving Differential Problems by Multistep Initial and Boundary Value Methods[M]. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1998
- [11] CHEN H. A Splitting Preconditioner for the Iterative Solution of Implicit Runge - Kutta and Boundary Value Methods [J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2014, 54(3): 607—621
- [12] CHEN H. Generalized Kronecker Product Splitting Iteration for the Solution of Implicit Runge-Kutta and Boundary Value Methods[J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2015, 22(2): 357—370
- [13] LEI S L, HUANG Y C. Fast Algorithms for High-Order Numerical Methods for Space - Fractional Diffusion Equations [J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2016, 94(5): 1062—1078

## Fast Algorithms for High-order Methods of a Fractional Optimal Control Problem

HUANG Qiu-yue

(School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** Distributed optimal control problem with the constraint of fractional order diffusion equation is widely used in the description of scientific and engineering applications including optimal design, control and parameter identification. Aiming at this problem, a high-order fast algorithm is proposed. For the coupled two point boundary value problems arising from the first order optimality conditions for this problem, the problem is discretized in space by compact difference and in time by boundary value method. After discretization, a two-by-two block linear system is obtained. Then we use Kronecker product splitting preconditioning strategy for solving this linear system. The preconditioner is a bloc Kronecker product structure. We obtain this Kronecker product through an alternating Kronecker product splitting iteration method. We prove the convergence of this preconditioner algorithm and use GMRES method to accelerate the convergence of the Kronecker splitting iteration. Finally, numerical experiments show the accuracy and computational efficiency of the algorithm.

**Key words:** boundary value methods; preconditioning; two point boundary value problem; FDE-constrained optimization

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

黄秋月. 一类分数阶最优控制问题的高阶快速算法[J]. *重庆工商大学学报(自然科学版)*, 2020, 37(3): 52—59

HUANG Q Y. Fast Algorithms for High-order Methods of a Fractional Optimal Control Problem[J]. *Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)*, 2020, 37(3): 52—59