

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0001.015

随机利率和通货膨胀下 DC 养老金的鲁棒最优投资策略*

吴津津,王传玉,张 静

(安徽工程大学 数理学院,安徽 芜湖,241000)

摘 要:针对通货膨胀、随机利率、随机薪酬和模型不确定性影响下的确定缴费(Defined Contribution, DC)型养老金的鲁棒最优投资策略问题,首先假设市场是由无风险资产、滚动债券以及股票 3 种资产组成,给出这 3 种资产以及随机薪酬的动力学公式;然后通过消费者价格指数刻画通货膨胀的水平,应用伊藤公式,得到通货膨胀环境下 3 种资产价格以及随机薪酬的动力学公式;接着应用 Girsanov 定理,得到新测度下随机利率、3 种资产以及随机薪酬的动力学公式,并得到养老金账户的财富过程;最后在期望效用最大化的原理下,应用随机控制理论求解 HJB 方程(Hamilton-Jacobi-Bellman equation),得到了 DC 养老金的鲁棒最优投资策略;通过数值分析得出通货膨胀对鲁棒最优投资策略的影响。

关键词:随机利率;通货膨胀;随机薪酬;模糊厌恶;DC 养老金;鲁棒最优投资

中图分类号:F840.32

文献标志码:A

文章编号:1672-058X(2020)01-0095-09

0 引 言

随着我国平均寿命的延长,为了保障退休后的个人生活,人们对养老金的关注越来越高。有两种常见的养老金类型:确定收益型(Defined Benefit, DB)和确定缴费型养老金计划。由于人口变化和金融市场的发展,许多国家为了减轻社会保障项目的压力,将养老金计划从 DB 改为 DC,从而将养老金的投资风险转移给养老金的持有者。随着 DC 型养老金计划的广泛应用,市场上出现了各种养老金的投资计划,导致 DC 养老金投资者面临多种投资风险。

本文探讨了 DC 养老金计划中有关风险,包括市场回报风险、通货膨胀风险以及收入和经济不确定性风险。而且养老金资产的积累取决于养老金持有人缴纳的养老金以及养老金投资者的投资回报,养老金持有人缴纳的养老金与他们的工资收入有关。从长远来看,养老金的投资者还面临模型不

确定性和资产收益的变动。文献[1]表明,投资者不仅面临着已知的概率分布风险,还面临着未知的概率分布的厌恶模糊性。此外,资产投资预期的回报是极难估计的,养老金的投资者对使用标准历史估计投资资产产生的预期回报可靠性持有怀疑态度,所以需要将模糊厌恶考虑进 DC 养老金的投资策略中。

本文涉及 4 种类型的文献。第一种文献是关于 DC 养老金的资产配置问题。DC 养老金计划在实践中有着广泛的应用,大量的文献都讨论了 DC 养老金的资产配置问题。现有文献采用了多种目标,Sun 等^[2]研究了由一个无风险资产和一个风险资产组成的市场在均值-方差准则下利用随机动态规划方法得到的策略,并与平衡策略作对比,保障退休前去世的计划成员的权利;Chen 等^[3]研究了在应用 S 型效用函数刻画的风险厌恶框架下采用期望效用最大化的方法得到了 DC 养老金计划的最优投资组合。本文假设 DC 养老金的资产配置效用函数,应用期望效用最大化方法得到 DC 养老金的最优投资

收稿日期:2019-05-27;修回日期:2019-06-27.

* 基金项目:国家自然科学基金资助项目(61503001);安徽省高等学校自然科学研究重点项目(KJ2018A0120);安徽省高等学校重大质量工程项目(2017JYXM0329);安徽工程大学研究生实践与创新项目(Y412019018)。

作者简介:吴津津(1995—),女,安徽泾县人,硕士研究生,从事金融风险研究。

策略。

第二种文献是关于随机薪酬的文献。在 DC 养老金中,人力资本是投资者财富不可或缺的一部分,关于养老金持有者未来的工资收入是典型的背景风险;Bodie 等^[4]考虑了带有薪酬风险的投资组合的问题;Munk 等^[5]表明:工资增长与利率之间的关系仍然是决定最优投资策略的一个重要因素。为了探讨随机薪酬对投资者投资行为的影响,本文假设薪酬过程遵循一个与随机利率和股价相关的一般随机过程。

第三种文献是由养老金的投资期限引起的。养老金的投资期限一般为 20 到 40 年,在长期的投资中,利率不是恒定的,Vasicek 在风险中性的条件下,假设经济状况完全由一个单一因素短期利率影响,并遵循 Ornstein-Uhlenbeck 过程,得到了 Vasicek 模型。在利率的建模中应用 Ornstein-Uhlenbeck 过程,Bonlir 等^[6]考虑了在随机利率下的 DC 养老金的最优管理问题,获得了确保退休后的个人生活的 CRRA 效用最大化终端财富;Munk 等^[5]基于收入动态数据的面板研究,在随机利率及随机薪酬的环境下得到了最优投资组合;Zhang 等^[7]应用对偶理论、Legendre 变换及 HJB 方程在随机收入与仿射利率模型下得到了 CRRA 及 CARA 效用函数的显示解,从而得到了 DC 养老金的最优投资策略。在这长期的投资期限内,存在着通货膨胀因素,Li 等^[8]利用中国的经济数据进行实证分析,结果表明:消费模式和商品服务价格上涨的差异导致家庭的不平等通货膨胀经历,通货膨胀对收入不同家庭的资产配置和消费决策产生重大影响;Chou 等^[9]在名义利率和预期通货膨胀率下,解决了随机通货膨胀下期中消费与非期中消费的跨期投资组合选择问题。

第四种是投资组合选择的模糊性参考文献。Eusberg 等^[10]首次提出大多数人都是模糊厌恶的人与概率未知的彩票相比,他们更喜欢有已知概率的彩票,许多理论研究探讨了模糊对经济行为的影响;Dimmock 等^[11]基于 Ellsberg 文章中的定制问题衡量模糊厌恶,通过实证研究分析了模糊厌恶对 5 种不同家庭投资组合选择的影响,结果表明模糊厌恶在影响投资者行为方面具有很重要的意义。

此处结合以前的研究,假设市场中存在无风险资产即存款、滚动债券以及股票 3 种资产,同时考虑随机利率、随机通货膨胀、随机薪酬下模糊厌恶型的 DC 养老金的鲁棒最优投资策略。以往的研究都是只考虑其中的几种因素,本文同时考虑几种因素对 DC 养老金最优投资策略的影响。

1 构建模型

假设在金融市场上是没有交易成本和费用的,并且交易是连续的。DC 养老金在投资时不仅面临着金融风险 and 薪酬风险,还面临着通货膨胀风险。此外,养老金的投资者对股票以及通货膨胀的动力学公式的不确定性存在模糊厌恶性。本文假设 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ 是一个完备的概率空间,其中, F_t 代表的是 t 时刻之前的信息流, T 是一个有限的正数,代表养老金的投资期限, P 是一个标准的测度。在概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ 上定义了下面的所有随机过程。

1.1 金融市场和薪酬

假设 1 根据文献[12],假设第一种无风险资产的价格 $S'_0(t)$ 为

$$\frac{dS'_0(t)}{S'_0(t)} = r(t) dt, S'_0(t) = s'_0$$

其中,在时刻 t 时的随机利率 $r(t)$,将其定义为

$$dr(t) = (a - br(t)) dt - \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dW_r(t) \quad (1)$$

$$r(0) = r_0$$

a, b, η_1, η_2 为正常数, $W_r(t)$ 是一维标准布朗运动。

假设 2 根据文献[13],定义一个到期日为 s 的零息债券 $B'(t, s)$ 的动力学公式为

$$\frac{dB'(t, s)}{B'(t, s)} = r(t) dt + D(s-t) \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} (dW_r(t) + \lambda_r \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dt)$$

$$B'(s, s) = 1$$

其中, $D(t) = \frac{2(e^{-t} - 1)}{z - (b - \eta_1 \lambda_r)}$, $z = \sqrt{(b - \eta_1 \lambda_r)^2 + 2\eta_1}$,

$\lambda_r \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2}$ 为利率风险的市场价格, $D(s-t) \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2}$ 为零息债券 $B'(t, s)$ 的波动率。实际的投资过程中,在市场中并不能找到所有的零息债券,所以在基于零息债券的基础上,引入一个带有常数期限 K 的滚动债券,它的动力学方程式为

$$\frac{dB'_K(t)}{B'_K(t)} =$$

$$r(t) dt + D(K) \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} (dW_r(t) + \lambda_r \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dt)$$

在实际市场中,利用无风险资产和零息债券的组合可以复制出任何固定期限的滚动债券。对于任意的 $s > t$,滚动债券的复制组合的表达式为

$$\frac{dB'(t, s)}{B'(t, s)} = \left(1 - \frac{D(s-t)}{D(K)}\right) \frac{dS'_0(t)}{S'_0(t)} + \frac{D(s-t)}{D(K)} \frac{dB'_K(t)}{B'_K(t)}$$

假设 3 对于第三种资产股票,根据文献[6]可以得到其随机微分方程为

$$\frac{dS'(t)}{S'(t)} =$$

$$r(t)dt + \sigma_s \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} (\lambda_r \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dt + dW_r(t)) + \sigma_1 (\lambda_1 dt + dW_s(t)), S'(0) = s_0$$

$\sigma_s, \sigma_1, \lambda_1$ 为正常数, σ_s 为利率波动所引起股票价格的波动, λ_1 为风险因素 $W_s(t)$ 的风险溢价, σ_1 是股票波动引起的股价波动的波动比例因子, $W_s(t)$ 是概率空间上标准的一维布朗运动,且 $W_r(t)$ 与 $W_s(t)$ 相互独立。

假设 4 在考虑 DC 养老金计划时,薪资流程是必不可缺的。假设一名 DC 养老金计划成员退休薪资是随机的,并根据其薪资连续向其养老金账户缴纳固定比例为 $\xi (0 \leq \xi \leq 1)$ 的养老金,随机工资 $C'(t)$ 满足下面的微分方程:

$$\frac{dC'(t)}{C'(t)} =$$

$$(r(t) + \eta(t))dt + \sigma_c \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} (\lambda_r \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dt + dW_r(t)) + \sigma_2 (\lambda_1 dt + dW_s(t)), C'(0) = c'$$

σ_c, σ_2 为正常数, σ_c 表示利率波动对随机薪酬的影响, σ_2 表示股票价格波动所引起的随机工资的波动, $\eta(t)$ 是一个与时间 t 相关的函数。

假设 5 通货膨胀一直存在于金融市场中,通过居民消费价格指数 (CPI) 定义一个通货膨胀的随机过程 $P(t)$, 满足如下随机微分方程:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \mu_p dt + \sigma_p dW_p(t), P(0) = p_0$$

μ_p 是 t 时的期望通货膨胀率, σ_p 表示的是通货膨胀的波动率, $W_p(t)$ 为一维的标准布朗运动, $W_p(t)$ 与 $W_r(t)$ 是独立的, $W_p(t)$ 与 $W_s(t)$ 具有相关关系:

$$\text{Cov}(W_p, W_s) = \rho_2 t \quad (-1 \leq \rho_2 \leq 1)$$

考虑通货膨胀 $P(t)$, 应用 Itô 公式, 可以得到真实的无风险资产 $S_0 = \frac{S'_0(t)}{P(t)}$ 、滚动债券 $B_K(t) = \frac{B'_K(t)}{P(t)}$ 、股票价格 $S(t) = \frac{S'(t)}{P(t)}$ 以及随机薪酬 $C(t) = \frac{C'(t)}{P(t)}$ 的动力学公式:

$$\begin{aligned} dS_0(t) &= \frac{1}{P(t)} dS'_0(t) + S'_0(t) d \frac{1}{P(t)} + dS'_0(t) d \frac{1}{P(t)} = \\ &= \frac{dS'_0(t)}{P(t)} + \frac{S'_0(t)}{P(t)} ((\sigma_p^2 - \mu_p) dt - \sigma_p dW_p) = \\ &= \frac{S'_0(t)}{P(t)} ((r(t) + \sigma_p^2 - \mu_p) dt - \sigma_p dW_p) = \end{aligned}$$

$$S_0(t) ((r(t) + \sigma_p^2 - \mu_p) dt - \sigma_p dW_p) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} dS(t) &= \frac{1}{P(t)} dS'(t) + S'(t) d \frac{1}{P(t)} + dS'(t) d \frac{1}{P(t)} = \\ &= S(t) ((r(t) + \sigma_p^2 - \mu_p) + \lambda_r \sigma_s (\eta_1 r(t) + \eta_2) - \sigma_1 \sigma_p \rho_2) dt + S(t) (\sigma_s \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dW_r + \sigma_1 dW_s - \sigma_p dW_p) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dB_K(t) &= \frac{1}{P(t)} dB'_K(t) + B'_K(t) d \frac{1}{P(t)} + dB'_K(t) d \frac{1}{P(t)} = \\ &= B_K(t) ((r(t) + \sigma_p^2 - \mu_p) + \lambda_r D(K) (\eta_1 r(t) + \eta_2)) dt + B_K(t) (D(K) \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dW_r - \sigma_p dW_p) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dC(t) &= \frac{1}{P(t)} dC'(t) + C'(t) d \frac{1}{P(t)} + dC'(t) d \frac{1}{P(t)} = \\ &= C(t) ((r(t) + \eta(t) + \sigma_p^2 - \mu_p) + \lambda_r \sigma_c (\eta_1 r(t) + \eta_2) - \sigma_2 \sigma_p \rho_2) dt + C(t) (\sigma_c \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dW_r + \sigma_2 dW_s - \sigma_p dW_p) \quad (5) \end{aligned}$$

1.2 鲁棒最优投资策略

在传统的 DC 养老金计划框架中, DC 养老金的投资者都是模糊中性的, 这意味着投资者对概率测度 P 提供的上述模型是完全信任的。事实上在许多情况下, DC 养老金的投资者不能准确地知道真正的模型, 因此, 任何用于描述模型的特定概率度量都可能会导致潜在模型的错误描述。所以本文把养老金的投资者看成模糊厌恶型的, 并在其做投资决策时考虑模型的不确定性。模糊厌恶型养老金投资者的最优投资问题是在参考测度 P 下考虑的, 但是参考测度 P 与真实测度可能十分接近, 所以本文重新定义了一个与参考测度 P 等价的转换测度 Q :

$$Q := \{Q | Q \ll P\}$$

在测度 Q 下, 定义一个逐步可测的过程: $\Gamma := (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)), t \in [0, T]$, 满足 $E^P \left\{ \exp \left[\left(\frac{1}{2} \int_0^t (\phi_1(S)^2 + \phi_2(S)^2 + \phi_3(S)^2) dS \right) \right] \right\} < \infty$, 并将没有满足 Γ 的过程设定为 Θ , 定义一个真实的价值过程:

$$\begin{aligned} \Lambda^\Gamma(t) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t (\phi_1(S)^2 + \phi_2(S)^2 + \phi_3(S)^2) dS + \int_0^t \phi_1(S) dW_r(S) + \int_0^t \phi_2(S) dW_s(S) + \int_0^t \phi_3(S) dW_p(S) \right\} \end{aligned}$$

对于每一个 Γ , 在完全连续的测度 P 上的 F_T 在新的概率测度 Q 下有:

$$\frac{dQ}{dP} \Big|_{F_T} = \Lambda^\Gamma(T)$$

在新的转换测度 Q 下, 通过 Girsanov 定理

可得:

$$\begin{cases} dW_r^Q = dW_r - \phi_1(t) dt \\ dW_s^Q = dW_s - \phi_2(t) dt \\ dW_p^Q = dW_p - \phi_3(t) dt \end{cases} \quad (6)$$

根据式(6),对式(1)一(5)进行测度转换,得到如下结果:

$$dr(t) = (a - br(t) - \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} \phi_1(t)) dt - \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dW_r^Q(t) \quad (7)$$

$$dS_0(t) = S_0(t) ((r(t) + \sigma_p^2 - \mu_p - \sigma_p \phi_4) dt - \sigma_p dW_p) \quad (8)$$

$$dS(t) = S(t) ((r(t) + \sigma_p^2 - \mu_p) + \lambda_s \sigma_s (\eta_1 r(t) + K_2) - \sigma_1 \sigma_p \rho_2 + \sigma_1 \lambda_1) + \sigma_s \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} \phi_1(t) + \sigma_1 \phi_2(t) - \sigma_p \phi_4(t) dt + S(t) (\sigma_s \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dW_r^Q + \sigma_1 dW_s^Q - \sigma_p dW_p^Q) \quad (9)$$

$$dB_K(t) = B_K(t) ((r(t) + \sigma_p^2 - \mu_p) + \lambda_r D(K) (\eta_1 r(t) + \eta_2) + D(K) \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} \phi_1 - \sigma_p \phi_4) dt + B_K(t) (D(K) \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dW_r^Q - \sigma_p dW_p^Q) \quad (10)$$

$$dC(t) = C(t) ((r(t) + \eta(t) + \sigma_p^2 - \mu_p) + \lambda_c \sigma_c (\eta_1 r(t) + \eta_2) - \sigma_2 \sigma_p \rho_2 + \sigma_2 \lambda_1 + \sigma_c \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} \phi_1(t) + \sigma_2 \phi_2(t) - \sigma_p \phi_4(t)) dt + C(t) * (\sigma_c \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dW_r^Q + \sigma_2 dW_s^Q - \sigma_p dW_p^Q) \quad (11)$$

假设 6 假定一个投资策略 $\omega := \{(\omega_s(t), \omega_B(t))\}_{t \in [0, T]}$, $X^\omega(t)$ 是在投资策略 ω 下的财富过程,其中 $\omega_s(t)$ 是投资在股票上的比例, $\omega_B(t)$ 是投资在债券的比例,相对应的 $1 - \omega_s(t) - \omega_B(t)$ 即为投资在无风险资产上的比例。在测度 Q 下,财富过程 $X^\omega(t)$ 的随机微分方程为

$$dX^\omega(t) = X^\omega(t) \left[\omega_s(t) \frac{dS(t)}{S(t)} + \omega_B(t) \frac{dB_K(t)}{B_K(t)} + (1 - \omega_s(t) - \omega_B(t)) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} \right] + \xi C(t) = X^\omega(t) [(r(t) + \sigma_p^2 - \mu_p) + \lambda_r \theta_r(t) (\eta_1 r(t) + \eta_2) - \sigma_p \sigma_1 \theta_s(t) \rho_2 + \theta_s(t) \lambda_1 \sigma_1 + \theta_r(t) * \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} \phi_1(t) + \sigma_1 \theta_s(t) \phi_2(t) - \sigma_p \phi_3(t)] dt + X^\omega(t) [\theta_r(t) \sqrt{\eta_1 r(t) + \eta_2} dW_r^Q + \sigma_1 \theta_s(t) dW_s^Q - \sigma_p dW_p^Q] + \xi C(t) \quad (12)$$

$X^\omega(0) = x_0$

其中, $\theta_r(t) = \omega_B(t) D(K) + \omega_s(t) \sigma_s$, $\theta_s(t) = \omega_s(t)$ 。 $\theta_r(t)$ 代表的是资产风险 W_r^Q 的风险暴露, $\theta_s(t)$ 代表的是资产风险 W_s^Q 的风险暴露。

定义 1 令 $\omega := \{(\omega_s(t), \omega_B(t))\}_{t \in [0, T]}$ 为可被接受的投资策略,满足:

(1) 对于任意的 $t \in [0, T]$, $\omega_s(t)$ 和 $\omega_B(t)$ 关于 F_t 逐步可测。

(2) $E_{t,x,r,c}^{Q^*} \left\{ \int_0^T X(t)^2 [(\omega_B(t) D(K) + \omega_s(t) \sigma_s)^2 (\eta_1 r(t) + \eta_2) + (\omega_s(t))^2 \sigma_1^2 + \sigma_p^2 - 2\sigma_1 \sigma_p \omega_s(t)] dt \right\} < \infty$ 。

(3) 对于任意的 $(t, x, r, c) \in [0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$, 式(12)有唯一解 $\{X^\omega(t)\}_{t \in [0, T]}$, 且 $E_{t,x,r,c}^{Q^*} [U(X^\omega(T))] < \infty$ 。

用 Π 表示所有可容许策略的集合。

假设 7 养老保险投资者具有常相对风险规避效用函数 (Coefficient of Relative Risk Aversion, CRRA), 在模糊厌恶的框架下, 推导出 $[0, T]$ 时间间隔内的投资策略, 可以得到最大化的终端财富预期效用。这样, 投资者的优化问题就可以写成:

$$\sup_{\omega \in \Pi} \inf_{\phi \in \Gamma} \left[U(X^\omega(T)) + \int_0^T \left(\frac{(\phi_1(S))^2}{2\psi_1(S, X^\omega(S), r(S), C(S))} + \frac{(\phi_2(S))^2}{2\psi_2(S, X^\omega(S), r(S), C(S))} + \frac{(\phi_3(S))^2}{2\psi_3(S, X^\omega(S), r(S), C(S))} \right) ds \right] \quad (13)$$

其中, $U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, $\gamma > 1$ 是相对风险厌恶系数。

对式(13)进行求解, 定义一个值函数:

$$H(t, x, r, c) = \sup_{\omega \in \Pi} \inf_{\phi \in \Gamma} E_{t,x,r,c}^{Q^*} [U(X^\omega(T))] + \frac{1}{2} \int_t^T \left(\frac{(\phi_1(S))^2}{2\psi_1(S, X^\omega(S), r(S), C(S))} + \frac{(\phi_2(S))^2}{2\psi_2(S, X^\omega(S), r(S), C(S))} + \frac{(\phi_3(S))^2}{2\psi_3(S, X^\omega(S), r(S), C(S))} \right) ds \quad (14)$$

其中:

$$\psi_i(t, x, r, c) = \frac{\beta_i}{(1-\gamma)H(t, x, r, c)}, i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

$\beta_i (i = 1, 2, 3)$ 为模糊厌恶参数, 分别代表模糊厌恶型投资者对于随机利率、股票价格、股价波动率以及通货膨胀的模糊厌恶特性, 且满足 $\beta_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ 。

2 最优投资策略

定义 2 为了从式(13)中获得最优投资策略, 定义 $C^{1,2,2,2}([0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+) = \{\varphi(t, x, r, c) \mid \varphi(t, \cdot, \cdot, \cdot) \text{ 在 } [0, T] \text{ 上一阶连续可导, 且 } \varphi(\cdot, x, r,$

c) 分别在 $x \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}^+$ 上二阶连续可导, 对于任意的 $\varphi(t, x, r, c) \in [0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$, 定义一个生成元算子:

$$\begin{aligned} Z^{\omega, \phi} \varphi(t, x, r, c) = & \varphi_t + [(r + \sigma_p^2 - \mu_p)x + \\ & \lambda_r \theta_r (\eta_1 r + \eta_2)x + \theta_s \lambda_1 \sigma_1 x + \xi c - \sigma_p \sigma_1 \theta_s \rho_2 x + \\ & \theta_r \sqrt{(\eta_1 r + \eta_2)} \phi_1 x + \sigma_1 \theta_s \phi_2 x - \sigma_p \phi_3] \varphi_x + \\ & [a - br - \sqrt{(\eta_1 r + \eta_2)} \phi_1] \varphi_r + \\ & [(r + \sigma_p^2 - \mu_p + \eta)c + \lambda_r \sigma_c (\eta_1 r + \eta_2)c + \sigma_2 \lambda_1 c - \\ & \sigma_2 \sigma_p \rho_2 c + \sigma_c \sqrt{(\eta_1 r + \eta_2)} \phi_1 c + \sigma_2 \phi_2 c - \sigma_p \phi_3 c] \varphi_c + \\ & [\theta_r^2 (\eta_1 r + \eta_2) + \sigma_1^2 \theta_s^2 + \sigma_p^2 - 2\sigma_1 \sigma_p \theta_s \rho_2] \frac{x^2 \varphi_{xx}}{2} + \\ & (\eta_1 r + \eta_2) \frac{\varphi_{rr}}{2} + [\sigma_c^2 (\eta_1 r + \eta_2) + \sigma_2^2 + \sigma_p^2 - \\ & 2\sigma_2 \sigma_p \rho_2] \frac{c^2}{2} \varphi_{cc} - x \theta_r (\eta_1 r + \eta_2) \varphi_{xr} + \\ & [\sigma_c \theta_r (\eta_1 r + \eta_2) + \sigma_1 \sigma_2 \theta_s \rho_2 + \sigma_p^2 - \sigma_1 \sigma_p \theta_s \rho_2 - \\ & \sigma_2 \sigma_p \rho_2] x c \varphi_{xc} - \sigma_c (\eta_1 r + \eta_2) c \varphi_{rc} \end{aligned} \quad (16)$$

$\varphi_t, \varphi_x, \varphi_r, \varphi_c, \varphi_{xx}, \varphi_{rr}, \varphi_{cc}, \varphi_{xr}, \varphi_{xc}, \varphi_{rc}$ 表示函数 $\varphi(t, x, r, c)$ 各个变量相对应的偏导数。为了便于后面的计算, 令 $\theta_r = \theta_r(t), \theta_s = \theta_s(t)$, 根据动态规划原理, 得到带有模糊厌恶性的 HJB 方程:

$$\sup_{\omega \in \mathcal{H}} \inf_{\theta \in \Gamma} \left\{ Z^{\omega, \phi} H(t, x, r, c) + \frac{\phi_1^2}{2\varphi_1} + \frac{\phi_2^2}{2\varphi_2} + \frac{\phi_3^2}{2\varphi_3} \right\} = 0 \quad (17)$$

本文假设 $J(t, x, r, c)$ 是式 (17) 的解, 由一阶的最优性条件可知, $\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*$ 为

$$\begin{aligned} \phi_1^* &= -\frac{\beta_1 \sqrt{\eta_1 + \eta_2}}{(1-\gamma)J} (x \theta_r J_r + \sigma_c c J_c - J_r) \\ \phi_2^* &= -\frac{\beta_2 \sqrt{c}}{(1-\gamma)J} (x \theta_s J_x + c \sigma_c J_c) \\ \phi_3^* &= \frac{\beta_3 \sigma_p}{(1-\gamma)J} (x J_x + c J_c) \end{aligned} \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (17), 可以得到:

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mathcal{H}} \{ & J_t + [(r + \sigma_p^2 - \mu_p)x + \lambda_r \theta_r (\eta_1 r + \eta_2)x + \theta_s \lambda_1 \sigma_1 x + \xi c - \\ & \sigma_p \sigma_1 \theta_s \rho_2 x] J_x + [a - br] J_r + [(r + \sigma_p^2 - \mu_p + \eta)c + \lambda_r \sigma_c (\eta_1 r + \\ & \eta_2)c - \sigma_p \sigma_2 \rho_2 c + \sigma_2 \lambda_1 c] J_c + [\theta_r^2 (\eta_1 r + \eta_2) + \sigma_1^2 \theta_s^2 + \sigma_p^2 - \\ & 2\sigma_1 \sigma_p \theta_s \rho_2] \frac{x^2 J_{xx}}{2} + (\eta_1 r + \eta_2) \frac{J_{rr}}{2} + [\sigma_c^2 (\eta_1 r + \eta_2) + \sigma_2^2 + \\ & \sigma_p^2 - 2\sigma_2 \sigma_p \rho_2] \frac{c^2}{2} J_{cc} - x \theta_r (\eta_1 r + \eta_2) J_{xr} + [\sigma_c \theta_r (\eta_1 r + \eta_2) + \\ & \sigma_1 \sigma_2 \theta_s + \sigma_p^2 - \sigma_1 \sigma_p \theta_s \rho_2 - \sigma_2 \sigma_p \rho_2] x c J_{xc} - \\ & \sigma_c (\eta_1 r + \eta_2) c J_{rc} - \frac{\beta_1 (\eta_1 r + \eta_2)}{2(1-\gamma)J} (x \theta_r J_x + c \sigma_c J_c - J_r)^2 - \end{aligned}$$

$$\frac{\beta_2 l}{2(1-\gamma)J} (x \sigma_1 \theta_s J_x + c \sigma_2 J_c)^2 - \frac{\beta_3 \sigma_p^2}{2(1-\gamma)J} (x J_x + c J_c)^2 \} = 0 \quad (19)$$

利用式 (19) 中关于 θ_r 和 θ_s 的一阶微分条件, 可以得到:

$$\begin{aligned} \theta_r^* (t) &= \\ & \frac{\lambda_r J_x + c \sigma_c J_{xc} - J_{xr} - \frac{\beta_1}{(1-\gamma)J} (c \sigma_c J_x J_c - J_x J_r)}{x \left(\frac{\beta_1}{(1-\gamma)J} J_x^2 - J_{xx} \right)} \\ \theta_s^* (t) &= \\ & \frac{\lambda_1 J_x + c \sigma_2 J_{xc} - \frac{\beta_2}{(1-\gamma)J} c \sigma_2 J_x J_c - (\sigma_p \rho_2 J_x + c \sigma_p \rho_2 J_{xc} + x \sigma_p \rho_2 J_{xx})}{x \left(\frac{\beta_2}{(1-\gamma)J} J_x^2 - J_{xx} \right)} \sigma_1 \end{aligned} \quad (20)$$

将式 (20) 代入式 (19), 可以得到:

$$\begin{aligned} & J_t + [(r + \sigma_p^2 - \mu_p)x + \xi c] J_x + (a - br) J_r + \\ & [(r + \sigma_p^2 - \mu_p + \eta)c + \lambda_r \sigma_c (\eta_1 r + \eta_2)c - \\ & \sigma_p \sigma_2 \rho_2 c + \sigma_2 \lambda_1 c] J_c + \frac{x^2 \sigma_p^2 J_{xx}}{2} + (\eta_1 r + \eta_2) \frac{J_{rr}}{2} + \\ & [\sigma_c^2 (\eta_1 r + \eta_2) + \sigma_2^2 + \sigma_p^2 - 2\sigma_2 \sigma_p \rho_2] \frac{c^2}{2} J_{cc} + \\ & [\sigma_p^2 - \sigma_2 \sigma_p \rho_2] x c J_{xc} - c \sigma_c (\eta_1 r + \eta_2) J_{rc} - \\ & \frac{\beta_1 (\eta_1 r + \eta_2)}{2(1-\gamma)J} (c \sigma_c J_c - J_r)^2 - \frac{\beta_2 l}{2(1-\gamma)J} c^2 \sigma_c^2 J_c^2 - \\ & \frac{\beta_3 \sigma_p^2}{2(1-\gamma)J} (x J_x + c J_c)^2 + \\ & \frac{[\lambda_1 J_x + c \sigma_2 J_{xc} - \frac{\beta_2}{(1-\gamma)J} c \sigma_2 J_x J_c - \sigma_p \rho_2 (J_x + c J_{xc} + x J_{xx})]^2}{2 \left[\frac{\beta_2}{(1-\gamma)J} J_x^2 - J_{xx} \right]} + \\ & \frac{[\lambda_r J_x + c \sigma_c J_{xc} - J_{xr} - \frac{\beta_1}{(1-\gamma)J} (c \sigma_c J_x J_c - J_x J_r)]^2}{2 \left[\frac{\beta_2}{(1-\gamma)J} J_x^2 - J_{xx} \right]} * \\ & (\eta_1 r + \eta_2) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

为了对式 (21) 进行求解, 做出如下假设:

$$\begin{aligned} J(t, x, r, c) &= \frac{(x+h(t, c))^{1-\gamma}}{1-\gamma} g(t, r) \\ h(T, c) &= 0, g(T, r) = 1 \end{aligned} \quad (22)$$

其中:

$$\begin{aligned} J_t &= g_t \frac{(x+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + g(x+h)^{-\gamma} h_t, J_x = g(x+h)^{-\gamma} \\ J_{xx} &= -\gamma g(x+h)^{-\gamma-1}, J_r = g_r \frac{(x+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ J_{rr} &= g_{rr} \frac{(x+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, J_c = g(x+h)^{-\gamma} h_c \end{aligned}$$

$$J_{xr} = g_r(x+h)^{-\gamma}, J_{xc} = -\gamma g(x+h)^{-\gamma-1} h_c \quad J_{xc} = -\gamma g(x+h)^{-\gamma-1} h_c, J_{rc} = g_r(x+h)^{-\gamma} h_c \quad (23)$$

将式(22)和式(23)代入式(21),得到:

$$g_r \frac{(x+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + g(x+h)^{-\gamma} h_r + [(r+\sigma_p^2-\mu_p)x+\xi c]g(x+h)^{-\gamma} + (a-br)g_r \frac{(x+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + [(r+\sigma_p^2-\mu_p+\eta)c+\lambda, \sigma_c(\eta_1 r + \eta_2)c + \sigma_2 \lambda_1 c - \sigma_p \sigma_2 \rho_2 c]g(x+h)^{-\gamma} h_c - \frac{\gamma x^2 \sigma_p^2}{2} g(x+h)^{-\gamma-1} + \frac{g_{rr}(\eta_1 r + \eta_2)(x+h)^{1-\gamma}}{2(1-\gamma)} + [\sigma_c^2(\eta_1 r + \eta_2) + \sigma_2^2 + \sigma_p^2 - 2\sigma_2 \sigma_p \rho_2] \frac{c^2}{2} (-\gamma g(x+h)^{-\gamma-1} h_c^2 + g(x+h)^{-\gamma} h_{cc}) + [\sigma_p^2 - \sigma_2 \sigma_p \rho_2] xc (-\gamma g(x+h)^{-\gamma-1} h_c) - \sigma_c(\eta_1 r + \eta_2) c g_r(x+h)^{-\gamma} h_c - \frac{\beta_1(\eta_1 r + \eta_2)}{2(1-\gamma)J} \left(c \sigma_c g(x+h)^{-\gamma} h_c - g_r \frac{(x+h)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)^2 - \frac{\beta_2}{2(1-\gamma)J} c^2 \sigma_2^2 (g(x+h)^{-\gamma} h_c)^2 + \frac{\beta_3 \sigma_p^2}{2(1-\gamma)J} (xg(x+h)^{-\gamma} + cg(x+h)^{-\gamma} h_c)^2 + \frac{[(\lambda_1 g(x+h)^{-\gamma} - (\beta_2 + \gamma) c \sigma_2 g h_c(x+h)^{-1-\gamma} + \sigma_p \rho_2 (c \gamma h_c - (x+h) + x \gamma) g(x+h)^{-\gamma-1})^2]}{2(\beta_2 + \gamma) g(x+h)^{-\gamma-1}} + \frac{[\lambda_r g(x+h)^{-\gamma} - \frac{1-(\beta_1 + \gamma)}{1-\gamma} g_r(x+h)^{-\gamma} - (\beta_1 + \gamma) c \sigma_{c1} g(x+h)^{-\gamma-1} h_c]^2}{2(\beta_1 + \gamma) g(x+h)^{-\gamma-1}} (\eta_1 r + \eta_2) = 0 \quad (24)$$

为了求解式(24),假设

$$h(t, c) = h_1(t)c, g(t, r) = e^{g_1(t)r + g_2(t)} \quad (25)$$

其中 $h_1(T) = 0, g_1(T) = g_2(T) = 0$, 对式(25)中两个函数求其各自变量的一阶和二阶导数,得到:

$$h_t = h_{1t}c, h_c = h_1, h_{cc} = 0$$

$$g_t = g(g_{1t}r + g_{2t}), g_r = g g_1, g_{rr} = g g_1^2 \quad (26)$$

将式(25)和(26)代入式(24)中,化简得到:

$$\frac{x+h}{1-\gamma} r \left[g_{1t} + \left(-b - \frac{\lambda_r(1-(\beta_1+\gamma))\eta_1}{\beta_1+\gamma} \right) g_1 + \frac{(1-(\beta_1+\gamma))\eta_1}{2(\beta_1+\gamma)(1-\gamma)} g_1^2 + \frac{\lambda_r^2(1-\gamma)}{2(\beta_1+\gamma)} + (1-\gamma) \right] + \frac{x+h}{1-\gamma} \left[g_{3t} + \left(a - \frac{\lambda_r(1-(\beta_1+\gamma))\eta_2}{\beta_1+\gamma} \right) g_1 + \frac{(1-(\beta_1+\gamma))\eta_2}{2(\beta_1+\gamma)(1-\gamma)} g_1^2 + \frac{\lambda_r^2(1-\gamma)}{2(\beta_1+\gamma)} + \frac{(\lambda_1 - \sigma_p \rho_2)^2(1-\gamma)}{2(\beta_1+\gamma)} - \frac{\lambda_1 \sigma_p \rho_2 \gamma(1-\gamma)}{(\beta_1+\gamma)} + \frac{\sigma_p^2 \rho_2^2 \gamma(1-\gamma)(\gamma-2)}{2(\beta_2+\gamma)} - \frac{\sigma_p^2(1-\gamma)(\beta_4+\gamma)}{2} + (\sigma_p^2 - \mu_p)(1-\gamma) \right] + c(h_{1t} + h_1 \eta + \xi) = 0 \quad (27)$$

由式(27)可得:

$$\frac{x+h}{1-\gamma} r \left[g_{1t} + \left(-b - \frac{\lambda_r(1-(\beta_1+\gamma))\eta_1}{\beta_1+\gamma} \right) g_1 + \frac{(1-(\beta_1+\gamma))\eta_1}{2(\beta_1+\gamma)(1-\gamma)} g_1^2 + \frac{\lambda_r^2(1-\gamma)}{2(\beta_1+\gamma)} + (1-\gamma) \right] = 0$$

$$\frac{x+h}{1-\gamma} \left[g_{3t} + \left(a - \frac{\lambda_r(1-(\beta_1+\gamma))\eta_2}{\beta_1+\gamma} \right) g_1 + \frac{(1-(\beta_1+\gamma))\eta_2}{2(\beta_1+\gamma)(1-\gamma)} g_1^2 + \frac{\lambda_r^2(1-\gamma)}{2(\beta_1+\gamma)} + \frac{(\lambda_1 - \sigma_p \rho_2)^2(1-\gamma)}{2(\beta_1+\gamma)} - \frac{\lambda_1 \sigma_p \rho_2 \gamma(1-\gamma)}{(\beta_1+\gamma)} + \frac{\sigma_p^2 \rho_2^2 \gamma(1-\gamma)(\gamma-2)}{2(\beta_2+\gamma)} - \frac{\sigma_p^2(1-\gamma)(\beta_4+\gamma)}{2} + (\sigma_p^2 - \mu_p)(1-\gamma) \right] = 0$$

$$c(h_{1t} + h_1 \eta + \xi) = 0 \quad (28)$$

从式(28)可以解得:

$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{\delta_1 \delta_2 - \delta_1 \delta_2 e^{\tau_2(\delta_1 - \delta_2)(T-t)}}{\delta_2 - \delta_1 e^{\tau_2(\delta_1 - \delta_2)(T-t)}}, \eta_1 \neq 0 \\ \frac{1-\gamma}{b} [1 - e^{-b(T-t)}], \eta_1 = 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$g_2(t) = \int_t^T \tau_4 g_1(s) + \tau_3 g_1^2(s) + \tau_6 ds \quad (30)$$

$$h_1(t) = e^{\int_t^T \eta(s) ds} \times \int_t^T \xi e^{-\int_s^T \eta(y) dy} ds \quad (31)$$

其中:

$$\tau_1 = -b - \frac{\lambda_r(1-(\beta_1+\gamma))\eta_1}{\beta_1+\gamma}, \tau_2 = \frac{(1-(\beta_1+\gamma))\eta_1}{2(\beta_1+\gamma)(1-\gamma)}$$

$$\tau_3 = \frac{\lambda_r^2(1-\gamma)}{2(\beta_1+\gamma)} \eta_1 + (1-\gamma), \tau_4 = a - \frac{\lambda_r(1-(\beta_1+\gamma))\eta_2}{\beta_1+\gamma}$$

$$\tau_5 = \frac{1-(\beta_1+\gamma)}{2(\beta_1+\gamma)(1-\gamma)} \eta_2$$

$$\tau_6 = \left[\frac{\lambda_r^2 \eta_2}{2(\beta_1+\gamma)} + \frac{(\lambda_1 - \sigma_p \rho_2)^2}{2(\beta_1+\gamma)} + \frac{\lambda_1 \sigma_p \rho_2 \gamma}{(\beta_1+\gamma)} + \frac{\sigma_p^2 \rho_2^2 \gamma(\gamma-2)}{2(\beta_1+\gamma)} - \frac{\sigma_p^2(\beta_3+\gamma)}{2} + (\sigma_p^2 - \mu_p) \right] (1-\gamma)$$

$$\delta_{1,2} = \frac{-\tau_1 \pm \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_2\tau_3}}{2\tau_2} \quad (32)$$

定理 1 鲁棒最优投资问题式(17)在限定条件

$J(t, x, r, c) = U(x)$ 下的解为

$$J(t, x, r, c) = \frac{(x+h_1(t, c))^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{g_1(t)r + g_2(t)}$$

其中最优化风险暴露为

$$\begin{cases} \theta_r^*(t) = m(t) \left(1 + h_1(t) \frac{C(t)}{X^{\omega^*}(t)} \right) - h_1(t) \frac{\sigma_c C(t)}{X^{\omega^*}(t)} \\ \theta_s^*(t) = n(t) \left(1 + h_1(t) \frac{C(t)}{X^{\omega^*}(t)} \right) - h_1(t) \frac{\sigma_2 C(t)}{X^{\omega^*}(t)} \sigma_1 \end{cases}$$

最优投资策略 ω^* 为

$$\begin{cases} \omega_B^*(t) = \frac{\theta_r^*(t) - \theta_s^*(t)\sigma_s}{D(K)} \\ \omega_s^*(t) = \theta_s^*(t) \end{cases}$$

最坏测度为

$$\begin{cases} \phi_1^*(t) = -\beta_1 \sqrt{(K_1 r + K_2)} \left(\frac{\lambda_r}{\beta_1 + \gamma} - \frac{g_1(t)}{(\beta_1 + \gamma)(1 - \gamma)} \right) \\ \phi_2^*(t) = -\beta_2 \left(\frac{\lambda_1}{\beta_2 + \gamma} - \frac{\sigma_p \rho_2}{\beta_2 + \gamma} + \frac{\sigma_l \rho_2 \gamma}{\beta_2 + \gamma} \right) \\ \phi_3^*(t) = \beta_3 \sigma_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(t) = \frac{\lambda_r}{\beta_1 + \gamma} - \frac{(1 - (\beta_1 + \gamma))}{(\beta_1 + \gamma)(1 - \gamma)} g_1(t) \\ n(t) = \left(\frac{\lambda_1}{\sigma_1(\beta_2 + \gamma)} + \frac{\sigma_p \rho_2(\gamma - 1)}{\sigma_1(\beta_2 + \gamma)} \right) \end{cases}$$

其中 $g_1(t)$, $g_2(t)$, $h_1(t)$, 如式 (29) — (32) 所示。

3 数值分析

本节根据文献 [13] 和 [14] 为模型确定了一组基例参数, 利用 MATLAB 软件进行画图并对参数进行分析。表 1 是模型的参数。

表 1 数值模拟参数值表

Table 1 Numerical simulation parameter value

a	b	r_0	η_1	η_2	λ_r	K	σ_s
0.02	0.2	0.05	0.007	0	1	1	0.2
σ_p	γ	ρ_2	σ_L	σ_C	σ_1	γ	
1	2	0.3	0.25	0.04	0.7	0.2	2
β_1	β_2	β_3	σ_2	T	t	ξ	x_0
1	1.5	1	0.1	10	0	0.1	4

图 1 和图 2 描述的是股票的风险溢价 λ_1 以及股票价格的波动引起股价波动的波动比例因子 σ_1 对股票的最优投资比例 ω_s^* 和债券的最优投资比例 ω_B^* 的影响。由图 1 和图 2 可以看出: 随着 λ_1 的增加, 养老金投资者投资在股票的比例增加, 投资在债券的减少; 随着 σ_1 的增加, 养老金投资者投资在股票的比例减少, 投资在债券的增加。当 λ_1 增加时, 股票的风险溢价增加, 养老金的投资者会增加股票的投资来获取更多的收益, 由于替代效应, 会相应的降低债券的投资比例。当参数 σ_1 增加时, 股票波动引起股价波动的风险增大, 投资者将会降低股票的投资比例, 相应地将更多资金投资在债券上。

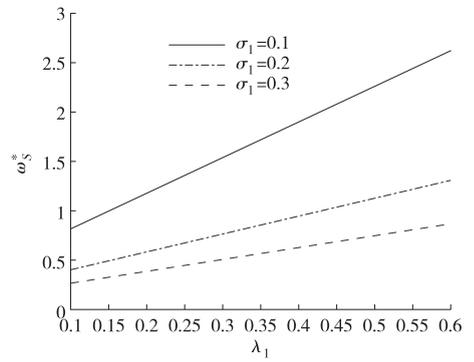


图 1 λ_1, σ_1 对 ω_s^* 的影响

Fig. 1 Effects of λ_1 and σ_1 on ω_s^*

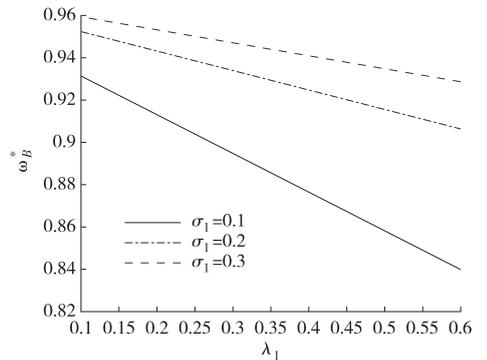


图 2 λ_1, σ_1 对 ω_B^* 的影响

Fig. 2 Effects of λ_1 and σ_1 on ω_B^*

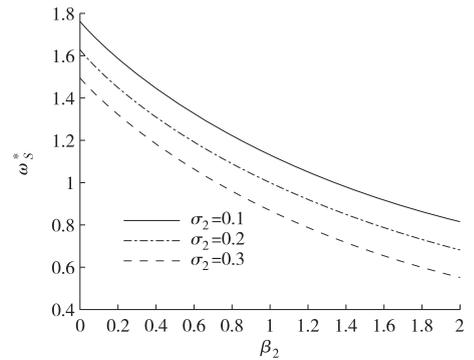


图 3 β_2, σ_2 对 ω_s^* 的影响

Fig. 3 Effects of β_2 and σ_2 on ω_s^*

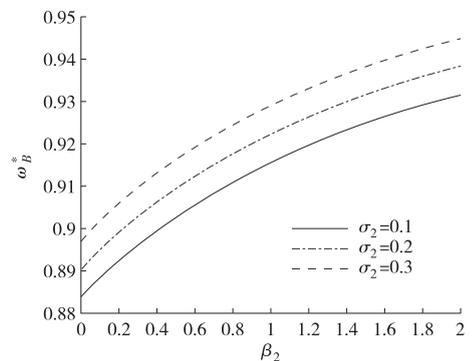


图 4 β_2, σ_2 对 ω_B^* 的影响

Fig. 4 Effects of β_2 and σ_2 on ω_B^*

图 3 和图 4 描述的是模糊厌恶参数 β_2 和股票

波动引起薪酬变动的波动因子 σ_2 对股票的最优投资比例 ω_s^* 和债券的最优投资比例 ω_b^* 的影响。由图 3 和图 4 可以看出:随着 β_2 和 σ_2 的增加,股票的投资比例减少,债券的投资比例增加。 β_2 增加时,养老金的投资者对股票的模型更加模糊,所以会降低股票的投资比例,相应地增加债券的投资比例。 σ_2 增加时,股票波动引起薪酬的变动增大,从而增加了随机薪酬的不确定性,养老金的投资者为了保险起见,会将更多的资金投入到了债券中,减少对股票投资的资金。

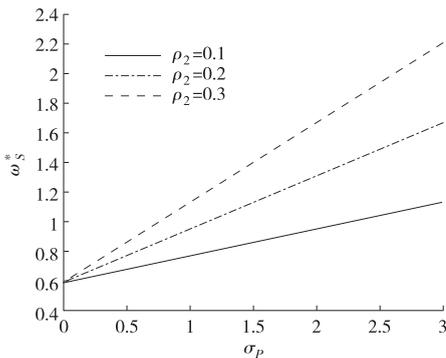


图 5 σ_p, ρ_2 对 ω_s^* 的影响

Fig. 5 Effects of σ_p and ρ_2 on ω_s^*

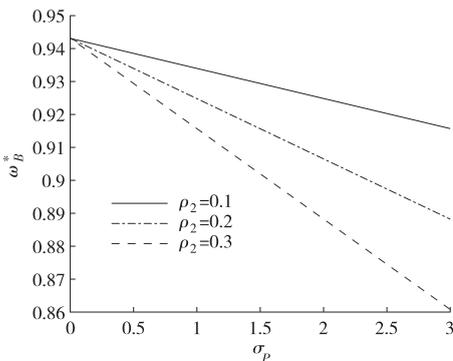


图 6 σ_p, ρ_2 对 ω_b^* 的影响

Fig. 6 Effects of σ_p and ρ_2 on ω_b^*

图 5 和图 6 描述的是通货膨胀的波动率增值率 σ_p 和通货膨胀与股价的波动系数 ρ_2 对股票的最优投资比例 ω_s^* 和债券的最优投资比例 ω_b^* 的影响。由图 5 和图 6 可以看出:随着 σ_p 和 ρ_2 的增加,养老金投资者投资在股票的比例增加,投资在债券的减少。这是因为随着 σ_p 的增加,通货膨胀的波动率增加了,对养老金资产具有腐蚀性,所以需要多投资收益高的股票来对冲通货膨胀给养老金资产带来的腐蚀性。由于通货膨胀的存在,增加了一部分投机性需求 $\frac{\sigma_p \rho_2 (1-\gamma)}{\beta_2 + \gamma}$, 因为 σ_p 和 ρ_2 都为正,而相对风险厌恶参数 $\gamma > 1$, 所以 σ_p 和 ρ_2 的增加,会导致投资在股票的比例增加;同时由于替代效用使得投资在债券的比例增加。

4 结 论

本文分析了 DC 养老金的最优投资组合问题,使其终端实际财富的预期效用最大化。因此,在这种条件下,养老金的持有者将他们工资的一部分按照一定的比例投资到养老金账户中。养老金的投资者面临着三种风险:一是长期投资中利率变动的风险,即随机利率风险;二是与养老金投资者薪酬挂钩的风险,即随机薪酬风险;三是与通货膨胀随机过程相关的风险,即随机通胀风险。假设金融市场是由股票、滚动债券和无风险的资产组成。

在给出了描述模型的随机过程系数的函数形式后,通过 HJB 方程给出了资产配置问题的解,通过第三节数值分析,可以得到:

随着股票的风险溢价 λ_1 的增加,DC 养老金的投资者会增加股票的投资比例,降低债券的投资比例;随着股票价格的波动引起股价波动的比例因子 σ_1 的增加,DC 养老金的投资者会增加债券的投资比例,降低股票的投资比例。

随着股票的模糊厌恶参数 β_2 和股票波动引起薪酬变动的波动因子 σ_2 的增加,DC 养老金的投资者减少其对股票的投资比例,同时增配风险较少的债券的投资比例。

随着通货膨胀的波动参数 σ_p 和通货膨胀与股价的波动系数 ρ_2 的增加,DC 养老金的投资者会增加股票的投资比例,降低债券的投资比例。

参考文献 (References):

- [1] BOSSAERTS P, GHIRARDATO P, Guarnaschelli S, et al. Ambiguity in Asset Markets: Theory and Experiment [J]. Review of Financial Studies, 2010, 23 (4): 1325—1359
- [2] SUN J, LI Z, ZENG Y. Precommitment and Equilibrium Investment Strategies for Defined Contribution Pension Plans under a Jump - Diffusion Model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016(67): 158—172
- [3] CHEN Z, LI Z, ZENG Y, et al. Asset Allocation under Loss Aversion and Minimum Performance Constraint in a DC Pension Plan with Inflation Risk [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2017 (75): 137—150
- [4] BODIE Z, MERTON R C, SAMUELSON W. Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life-Cycle Model [J]. Nber Working Papers, 1992, 16 (3-4): 427—449
- [5] MUNK C, SØRENSEN C. Dynamic Asset Allocation with Stochastic Income and Interest Rates [J]. Journal of

- Financial Economics, 2007, 96(3):433—462
- [6] BOULIR J F, HUANG S J, GRÉGORIY. Optimal Management under Stochastic Interest Rates: the Case of a Protected Defined Contribution Pension Fund [J]. Insurance Mathematics & Economics, 2001, 28(2): 173—189
- [7] ZHANG C B, RONG X M, ZHAO H, et al. Optimal Investment for the Defined-Contribution Pension with Stochastic [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2013, 28(2):187—203
- [8] LI S, WEI L, XU Z. Dynamic Asset Allocation and Consumption under Inflation Inequality: The Impacts of Inflation Experiences and Expectations [J]. Economic Modelling, 2017, 61:113—125
- [9] CHOU Y Y, HAN N W, HUNG M W. Optimal Portfolio-Consumption Choice Under Stochastic Inflation with Nominal and Indexed Bonds [J]. 2011, 27(6): 691—706
- [10] ELLSBERG D. Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms [J]. Quarterly Journal of Economics, 1961, 75(4): 643—669
- [11] DIMMOCK S G, KOUWENBERG R, MITCHELL O S, et al. Ambiguity Aversion and Household Portfolio Choice: Empirical Evidence [J]. J Financ Econ, 2016, 17(3):559—577
- [12] GUAN G, LIANG Z. Optimal Management of DC Pension Plan in a Stochastic Interest Rate and Stochastic Volatility Framework [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014(57):58—66
- [13] DEELSTRA G, GRASSELLI M, KOEHL P F. Optimal Investment Strategies in the Presence of a Minimum Guarantee [J]. 2003, 33(1):189—207
- [14] WANG P, LI Z. Robust Optimal Investment Strategy for an AAM of DC Pension Plans with Stochastic Interest Rate and Stochastic Volatility [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2018(80): 67—83

Robust Optimal Investment Strategy of DC Pension under Stochastic Interest Rate and Inflation

WU Jin-jin, WANG Chuan-yu, ZHANG Jing

(School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Anhui Wuhu 241000, China)

Abstract: For the robust optimal investment strategy of Defined Contribution (DC) pension under the influence of inflation, stochastic interest rate, stochastic salary and model uncertainty; firstly, it is assumed that the market consists of three kinds of assets: risk-free assets, rolling bonds and stocks, and the dynamic formulas of these three kinds of assets and stochastic compensation are given. Then the level of inflation is depicted by the consumer price index, and Ito formula is applied to obtain the dynamic formulas of three asset prices and stochastic compensation under the inflation environment. Secondly, by applying Girsanov theorem, the dynamic formulas of stochastic interest rate, three kinds of assets and stochastic compensation under the new measure are obtained, and the wealth process of pension account is obtained. Finally, based on the principle of maximizing expected utility, the robust optimal investment strategy for DC pension is obtained by solving the HJB equation (Hamilton-Jacobi-Bellman equation) using stochastic control theory. The influence of inflation on robust optimal investment strategy is obtained through numerical analysis.

Key words: stochastic interest rate; inflation; stochastic salary; ambiguity-aversion; DC pension; robust optimal investment strategy

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

吴津津,王传玉,张静. 随机利率和通货膨胀下 DC 养老金的鲁棒最优投资策略[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2020,37(1):95—103

WU J J, WANG C Y, ZHANG J. Robust Optimal Investment Strategy of DC Pension under Stochastic Interest Rate and Inflation [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020, 37(1): 95—103