doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0001.009

n 人非合作博弈弱 Nash 均衡点的存在性*

蔡阳洋, 向淑文

(贵州大学 数学与统计学院,贵阳 550025)

摘 要:根据 Nash 均衡的定义,也即是局中人单独改变自己的策略不能使自己支付更大这一结论,提出了一种新的均衡,其思想是局中人通过改变自己的策略的确可以增加自己的支付,但是由于局中人改变策略会产生成本这一事实,当成本高于或等于增加的支付时使得局中人没有改变自己的策略。基于这样的事实背景,在博弈模型中引入了局中人的成本函数,重新建立了 n 人非合作博弈模型,以及 n 人非合作广义博弈模型,并给出了弱 Nash 均衡点的定义,在此基础上研究博弈模型中弱 Nash 均衡点的存在性;通过定义最优回应映射,应用相关引理证明最优回应映射是 usco 的、非空的、凸的;通过 Fan-Glicksberg 不动点定理证明了 n 人非合作博弈,以及 n 人非合作广义博弈弱 Nash 均衡点的存在性。

关键词:非合作博弈;弱 Nash 均衡点;存在性;

中图分类号:O225 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2020)01-0054-05

0 引 言

1944 年,Von Neumann 和 Morgenstern 出版了对博弈论具有深远影响的名著《Theory of Games and Economic Behavior》[1],随后 Nash 提出了一种均衡思想,即 Nash 均衡[2-3],其核心思想是在非合作博弈中,当其他局中人不改变策略时,任何一个局中人都不能通过单独改变自己的策略让自己获得比当前更大的收益。由于 Nash 均衡的多重性问题,通过本质 Nash 均衡[4]的提出,文献[5-8]对 Nash 均衡的存在性与稳定性进行了进一步的研究。Nash 均衡作为非合作博弈的核心,有着举足轻重的地位,但是对于改变策略这一过程忽略了一个事实,那就是,策略之间的改变,通常会伴随着成本的产生,在文献[9]中就讨论过关于成本的博弈问题。以汽车的售卖为例,设 S 是一个汽车售卖商,现在其售出一辆二手车可获得 5 万元,如果将二手车伪装成新车售出,则可获得 6 万元,那么此时把车当作二手车售出就不是局中人 S 的 Nash 均衡点(因为改变策略后其支付增加了),但是考虑到这样的事实,将二手车伪装成新车是需要成本的,如果伪装的成本高于或等于 1 万元,显然 S 是不会选择将车进行伪装并售卖的,所以,直接卖二手车就变成了 S 的最终选择。这样的例子在生活中比比皆是。基于这样的事实背景,即局中人通过改变自己的策略的确可以使支付增加,但是由于改变策略产生的成本高于或等于增加的支付时,使得局中人最终没有改变策略,重新定义了一种较 Nash 均衡条件弱一点的均衡,即弱 Nash 均衡,并且通过引入局中人的成本函

收稿日期:2019-05-30;**修回日期**:2019-06-20.

* **基金项目**:国家自然科学基金(11161008).

作者简介:蔡阳洋(1991—),女,贵州毕节人,硕士研究生,从事博弈论与非线性分析研究.

数，建立了 n 人非合作博弈模型，以及 n 人非合作广义博弈模型，并证明了弱 Nash 均衡点的存在性。

1　预备知识

1.1　相关定义

定义 1[10]　设 X 与 Y 为两个 Hausdorff 拓扑空间，$T:X\to 2^Y$ 为集值映射，如果对 Y 中的任意开集 G，$T(x)\subset G$，存在 x 的开邻域 $O(x)$，使 $\forall x'\in O(x)$，有 $T(x')\subset G$，称 T 在 x 处为上半连续，如果 $\forall x\in X$，集值映射 T 在 x 处是上半连续的则称集值映射 T 在 X 是上半连续的。

定义 2[10]　设 C 为线性空间中的一个非空凸集，$f:C\to\mathbf{R}$，如果 $\forall x_1,x_2\in C$，$\forall t\in(0,1)$，有 $f(tx_1+(1-t)x_2)\geqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$，则称 f 在 C 上是凹的。

1.2　相关引理

引理 1[10]　设 X 和 $Y_i(i=1,2,\cdots n)$ 都是 Hausdorff 拓扑空间，$F_i:X\to P_0(Y_i)$ 在 X 上是上半连续的，且 $\forall x\in X$，$F_i(x)$ 是紧的，则集值映射

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x):X\to\prod_{i=1}^{n}Y_i=Y$$

在 X 上是上半连续的。

引理 2[11]　设集值映射 $F:X\to P_0(Y)$ 是闭的，而 Y 是紧的，则 F 必是 X 上的一个 usco 映射，即 $\forall x\in X$，F 在 x 是上半连续的且 $F(x)$ 是紧集。

引理 3[11]　（Fan-Glicksberg 不动点定理）设 X 是 Hausdorff 局部凸空间 E 中的非空凸紧集，$G:X\to P_0(X)$，满足 $\forall x\in X$，$G(x)$ 是非空凸紧集，且 G 在 X 上是上半连续的，则 $\exists x^*\in X$，使 $x^*\in B(x^*)$。

2　n 人非合作博弈模型

（1）用有限集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 表示局中人的集合。

（2）对每一局中人 $i\in N$，用非空集合 X_i 表示局中人 i 的策略集，$x_i\in X_i$ 为每一局中人 i 的可选策略，记

$$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$$

为该博弈的策略组合集，则 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$ 为该博弈的某一策略组合，记

$$X_{-i}=\prod_{j\neq i}X_j,x_{-i}=(x_1,x_2\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$$

则 $X=(X_i,X_{-i})$，$x=(x_i,x_{-i})\in X$。

（3）对每一局中人 $i\in N$，定义 $V(x_i,x'_i)$ 为局中人 i 将策略 x_i 换为策略 x'_i 的成本，则

$$V:X_i\times X_i\to\mathbf{R}$$

（4）对每一局中人 $i\in N$，定义 $f_i:X\to\boldsymbol{R}$ 为局中人 i 赢得的支付，称 $\Gamma=(N,X,V,f_i)$ 为 n 人非合作博弈模型。

定义 3　$x^*=(x_i^*,x_{-i}^*)\in X$ 称为博弈 Γ 的弱 Nash 均衡点，如果对 $\forall i\in N$ 满足 $\forall x'_i\in X_i$，有

$$f_i(x_i^*,x_{-i}^*)\geqslant f_i(x'_i,x_{-i}^*)-V(x_i^*,x'_i)$$

下面给出博弈 Γ 弱 Nash 均衡点的存在性。

定理 1　设博弈 Γ 满足以下条件：

（1）对每一 $i\in N$，X_i 为局部凸线性拓扑空间中的非空凸紧子集。

（2）对每一 $i\in N$，$f_i:X\to\mathbf{R}$ 连续。

（3）对每一 $i\in N$，$\forall x_{-i}\in X_{-i}$，$x_i\to f_i(x_i,x_{-i})$ 在 X_i 上凹。

（4）对每一 $i\in N$，$\forall x'_i\in X_i$，$x_i\to V(x_i,x'_i)$ 在 X_i 上连续。

（5）对每一 $i\in N$，$\forall x'_i\in X_i$，$x_i\to V(x_i,x'_i)$ 在 X_i 上凹。

则博弈 Γ 的弱 Nash 均衡点必存在。

证明　$\forall i\in N$，定义集值映射 $B_i:X_{-i}\to P_0(X_i)$ 如下：

$$B_i(x_{-i})=\{w_i\in X_i\mid f_i(w_i,x_{-i})\geqslant f_i(u_i,x_{-i})-V(w_i,u_i),\ \forall u_i\in X_i\}$$

（1）$B_i(x_{-i})\neq\varnothing$，且 $B_i(x_{-i})$ 紧。

由 f_i 和 V 的连续性，以及 X_i 的紧性可得 $B_i(x_{-i})\neq\varnothing$，$B_i(x_{-i})$ 闭，又因为紧集的闭子集是紧的，则 $B_i(x_{-i})$ 紧。

（2）$B_i(x_{-i})$ 凸。

设 $w_1, w_2 \in B_i(x_{-i})$，则有 $\forall u_i \in X_i$，

$$f_i(w_1, x_{-i}) \geqslant f_i(u_i, x_{-i}) - V(w_1, u_i)$$
$$f_i(w_2, x_{-i}) \geqslant f_i(u_i, x_{-i}) - V(w_2, u_i)$$

$\forall t \in (0,1)$，由 X_i 的凸性可知，$tw_1+(1-t)w_2 \in X_i$，又因为 f_i 在 X_i 上是凹的，V 在 X_i 上是凹的，所以有

$$f_i(tw_1+(1-t)w_2, x_{-i}) \geqslant tf_i(w_1, x_{-i})+(1-t)f_i(w_2, x_{-i})$$
$$V(tw_1+(1-t)w_2, u_i) \geqslant tV(w_1, u_i)+(1-t)V(w_2, u_i)$$

可推出

$$\begin{gathered} tf_i(w_1, x_{-i})+(1-t)f_i(w_2, x_{-i}) \geqslant \\ t(f_i(u_i, x_{-i})-V(w_1, u_i))+ \\ (1-t)(f_i(u_i, x_{-i})-V(w_2, u_i))= \\ f_i(u_i, x_{-i})-tV(w_1, u_i)-(1-t)V(w_2, u_i) \geqslant \\ f_i(u_i, x_{-i})-V(tw_1+(1-t)w_2, u_i) \end{gathered}$$

所以

$$\begin{gathered} f_i(tw_1+(1-t)w_2, x_{-i}) \geqslant \\ tf_i(w_1, x_{-i})+(1-t)f_i(w_2, x_{-i}) \geqslant \\ f_i(u_i, x_{-i})-V(tw_1+(1-t)w_2, u_i) \end{gathered}$$

也即

$$\begin{gathered} f_i(tw_1+(1-t)w_2, x_{-i}) \geqslant \\ f_i(u_i, x_{-i})-V(tw_1+(1-t)w_2, u_i) \end{gathered}$$

所以 $tw_1+(1-t)w_2 \in B_i(x_{-i})$，$B_i(x_{-i})$ 凸。

(3) $B_i(x_{-i})$ 是上半连续的。

由引理 2 知，只需证明 $B_i(x_{-i})$ 的图像闭即可，也即是对 $x_i^a \in B_i(x_{-i}^a)$，$(x_i^a, x_{-i}^a) \to (x_i, x_{-i})$，有 $x_i \in B_i(x_{-i})$。

首先，由 X 的紧性知 $x_i \in X_i$，$x_{-i} \in X_{-i}$。

反证法：假设 $x_i \notin B_i(x_{-i})$，则 $\exists c_i \in X_i$，使

$$f_i(x_i, x_{-i}) < f_i(c_i, x_{-i}) - V(x_i, c_i)$$

由 f_i 及 V 的连续性知，$\exists a^0 > 0$，当 $a > a^0$ 时，$\forall \varepsilon > 0$，有

$$|f_i(x_i^a, x_{-i}^a) - f_i(x_i, x_{-i})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|f_i(c_i, x_{-i}) - f_i(c_i, x_{-i}^a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|V(x_i^a, c_i) - V(x_i, c_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

又因为

$$\begin{gathered} |f_i(x_i^a, x_{-i}^a) - f_i(x_i, x_{-i}) + f_i(c_i, x_{-i}) - \\ f_i(c_i, x_{-i}^a) + V(x_i^a, c_i) - V(x_i, c_i)| \leqslant \\ |f_i(x_i^a, x_{-i}^a) - f_i(x_i, x_{-i})| + |f_i(c_i, x_{-i}) - \\ f_i(c_i, x_{-i}^a)| + |V(x_i^a, c_i) - V(x_i, c_i)| < \\ \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{gathered}$$

现取

$$\varepsilon = f_i(c_i, x_{-i}) - V(x_i, c_i) - f_i(x_i, x_{-i})$$

可得 $f_i(x_i^a, x_{-i}^a) < f_i(c_i, x_{-i}^a) - V(x_i^a, c_i)$，与 $x_i^a \in B_i(x_{-i}^a)$ 矛盾，所以假设不成立。所以，$x_i \in B_i(x_{-i})$，$B_i(x_{-i})$ 的图像闭，$B_i(x_{-i})$ 上半连续。

定义集值映射 $B: X \to P_0(X)$ 如下：

$$B(x) = \prod_{i=1}^{n} B_i(x_{-i}), \ \forall x \in X$$

由引理 1 知，$B(x)$ 是上半连续的，且 $B(x)$ 是非空凸紧集，由引理 3(Fan-Glicksberg)不动点定理知 $\exists x^* = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$，使 $x^* \in B(x^*)$，于是对 $\forall i \in N$，有 $x_i^* \in B_i(x_{-i}^*)$，故 $\forall u_i \in X_i$，有

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant f_i(u_i, x_{-i}^*) - V(x_i^*, u_i)$$

也即是 $\forall x'_i \in X_i$，有

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant f_i(x'_i, x_{-i}^*) - V(x_i^*, x'_i)$$

综上，博弈 Γ 的弱 Nash 均衡点的存在性得证。

3 n 人非合作广义博弈模型

(1) 用有限集合 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 表示局中人的集合。

(2) 对每一局中人 $i \in N$，用非空集合 X_i 表示局中人 i 的策略集，$x_i \in X_i$ 为每一局中人 i 的可选策略，记

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

为该博弈的策略组合集，则 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$ 为该博弈的某一策略组合，记

$$X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j, \ x_{-i} = (x_1, x_2 \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

则 $X = (X_i, X_{-i})$，$x = (x_i, x_{-i}) \in X$。

(3) 对每一局中人 $i \in N$，$G_i: X_{-i} \to P_0(X_i)$ 是第 i 个局中人的可行策略映射。

(4) 对每一局中人 $i\in N$,定义 $V(x_i,x'_i)$ 为局中人 i 将策略 x_i 换为策略 x'_i 的成本 $V:X_i\times X_i\to\mathbf{R}$。

(5) 对每一局中人 $i\in N$,定义 $f_i:X\to\mathbf{R}$ 为局中人 i 赢得的支付,称 $\Gamma'=(N,X,G_i,V,f_i)$ 为 n 人非合作广义博弈模型。

定义 4　$x^*=(x_i^*,x_{-i}^*)\in X$,且 $x_i^*\in G_i(x_{-i}^*)$ 称为博弈 Γ'的弱 Nash 均衡点,如果对 $\forall i\in N$,满足: $\forall x'_i\in G_i(x_{-i}^*)$,$f_i(x_i^*,x_{-i}^*)\geqslant f_i(x'_i,x_{-i}^*)-V(x_i^*,x'_i)$

下面给出博弈 Γ'弱 Nash 均衡点的存在性。

定理 2　设博弈 Γ'满足:对每一 $i\in N$,有

(1) X_i 为局部凸线性拓扑空间中的非空凸紧子集。

(2) $G_i:X_{-i}\to P_0(X_i)$ 连续,$\forall x_{-i}\in X_{-i}$,$G_i(x_{-i})$ 是非空凸紧集。

(3) $f_i:X\to\mathbf{R}$ 连续。

(4) $\forall x_{-i}\in X_{-i}$,$x_i\to f_i(x_i,x_{-i})$ 在 X_i 上凹。

(5) $\forall x'_i\in X_i$,$x_i\to V(x_i,x'_i)$ 在 X_i 上连续。

(6) $\forall x'_i\in X_i$,$x_i\to V(x_i,x'_i)$ 在 X_i 上凹。

则博弈 Γ'的弱 Nash 均衡点必存在。

证明　$\forall i\in N$,定义集值映射 $B'_i:X_{-i}\to P_0(X_i)$ 如下:

$$B'_i(x_{-i})=\{w_i\in G_i(x_{-i})\mid f_i(w_i,x_{-i})\geqslant f_i(u_i,x_{-i})-V(w_i,u_i),\ \forall u_i\in G_i(x_{-i})\}$$

与定理 1 的证明类似,可得 $B'_i(x_{-i})$ 是非空凸紧集,且 $B'_i:X_{-i}\to P_0(X_i)$ 是上半连续的。

定义集值映射 $B':X\to P_0(X)$ 如下:

$$B'(x)=\prod_{i=1}^{n}B'_i(x_{-i}),\ \forall x\in X$$

则 $B'(x)$ 是上半连续的,且 $B'(x)$ 是非空凸紧集。

由引理 3(Fan-Glicksberg)不动点定理知,$\exists x^*=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$,使 $x^*\in B'(x^*)$,于是对 $\forall i\in N$,有 $x_i^*\in B'_i(x_{-i}^*)$,从而有 $x_i^*\in G_i(x_{-i}^*)$,且 $\forall u_i\in G_i(x_{-i}^*)$,有

$$f_i(x_i^*,x_{-i}^*)\geqslant f_i(u_i,x_{-i}^*)-V(x_i^*,u_i)$$

也即是 $\forall x'_i\in G_i(x_{-i}^*)$,有

$$f_i(x_i^*,x_{-i}^*)\geqslant f_i(x'_i,x_{-i}^*)-V(x_i^*,x'_i)$$

综上,博弈 Γ'的弱 Nash 均衡点的存在性得证。

4　结　语

本文根据 Nash 均衡中局中人不能通过单独改变自己的策略获得比当前更大收益的思想,提出了一种较 Nash 均衡弱一点的均衡。通过列举生活中的实例,立足于局中人改变自己的策略会产生成本这一事实,给出了弱 Nash 均衡点的定义。在博弈模型中引入了局中人的成本函数,建立了 n 人非合作博弈模型,以及 n 人非合作广义博弈模型,通过相关引理证明了博弈模型中弱 Nash 均衡点的存在性。

将其推广到 n 人非合作广义多目标博弈模型中证明 Pareto-弱 Nash 均衡点的存在性,以及各种博弈模型下弱 Nash 均衡点的稳定性将是下一步的研究目标。

参考文献(References):

[1] NEUMANNJ V, MORGENSTERN O. Theory of Games and Economic Behavior[M]. Princeton: Princeton University Press, 1953

[2] NASH J. Non-Cooperative Games[J]. Annals of Mathematics (Second Series), 1951, 54(2):286—295

[3] NASH J. Equilibrium Points in n-Person Games[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1950, 36(1): 48—49

[4] WU W T, JIANG J H. Essential Equilibrium Points of n-Person Non-Cooperative Games[J]. Scientia Sinica, 1962, 11(10): 1307—1322

[5] YU J, YANG H, XIANG S W. Unified Approach to Existence and Stability of Essential Components[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2005, 63(5):2415—2425

[6] GLICKSBERG I L, BURGESS D C J, GOCHBERG I C. A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, With Application to Nash Equilibrium Points[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1952, 3(1):170—174

[7] TAN K K, YU J, YUAN X Z. Existence Theorems of Nash Equilibria for Non-Cooperative n-Person Games[J].

International Journal of Game Theory, 1995, 24 (3): 217—222

[8] 俞建. Nash 平衡的存在性与稳定性[J]. 系统科学与数学, 2002, 22(3):296—311

YU J. Existence and Stability of Nash Equilibrium[J]. Systems Science and Mathematics, 2002, 22 (3): 296—311(in Chinese)

[9] 张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海:上海人民出版社,2004

ZHANG W Y. Game Theory and Information Economics [M]. Shanghai: Shanghai People´s Publishing House, 2004(in Chinese)

[10] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京:科学出版社, 2008

YU J. Game Theory and Nonlinear Analysis [M]. Beijing:Science Press, 2008(in Chinese)

[11] 俞建. 有限理性与博弈论中平衡点集的稳定性[M]. 北京:科学出版社, 2017

YU J. Bounded Rationality and the Stability of Equilibrium Set in Game Theory [M]. Beijing: Science Press, 2017(in Chinese)

The Existence of Weak Nash Equilibrium in *n*-Person Non-Cooperative Game

CAI Yang-yang, XIANG Shu-wen

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University,Guiyang 550025,China)

Abstract:According to the definition of Nash equilibrium, the player can not change his own strategy alone to make his own payment larger,this paper puts forward a new kind of equilibrium, which is that the player can really increase his own payment by changing his own strategy. Because of the fact that the player's change of strategy will produce cost,however,when the cost is higher than or equal to the increased payment, the player does not change his strategy. Based on this factual background, the cost function of players is introduced into the game model, the n-person non-cooperative game model and n-person non-cooperative generalized game model are reestablished, and the definition of weak Nash equilibrium point is given. On this basis, the existence of weak Nash equilibrium in the game model is studied. By defining the optimal response mapping, it is proved that the optimal response mapping is usco, non-empty and convex by using the correlation lemma. The existence of weak Nash equilibrium point of n-person non-cooperative game and n-person non-cooperative generalized game is proved by Fan-Glicksberg fixed point theorem.

Key words:non-cooperative game; weak Nash equilibrium point;existence

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

蔡阳洋, 向淑文. n 人非合作博弈弱 Nash 均衡点的存在性[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(1):54—58

CAI Y Y, XIANG S W. The Existence of Weak Nash Equilibrium in n-Person Non-Cooperative Game[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(1):54—58