第 32 卷第 11 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 11 月
Vol.32 NO.11 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Nov.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.021

求二层线性规划最优解的极点方法*

赵礼阳[1], 霍永亮[2]

(1.重庆师范大学 数学学院,重庆 401331;2.重庆文理学院 数学与财经学院,重庆 402160)

摘 要:根据二层线性规划的最优解一定可以在约束集的极点找到这一理论,给出了求解二层线性规划的极点方法,通过上层目标函数值的排序,避免了盲目验证极点这一缺陷,最后通过算例描述了算法求解过程,并验证了算法的有效性.

关键词:二层线性规划;约束条件;全局最优解;极点

中图分类号:O221.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)11-0089-04

0 引 言

考虑如下二层线性规划问题(LBP):

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{a}) \quad \min_{x\in X} F(x,y)=c_1^{\mathrm{T}}x+d_1^{\mathrm{T}}y\\
&\qquad\quad x\geqslant 0,\text{其中 } y \text{ 是解}\\
&(\mathrm{b}) \quad \min_{y\in Y} F(x,y)=c_2^{\mathrm{T}}x+d_2^{\mathrm{T}}y\\
&\qquad\quad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}x\leqslant b\\
&\qquad\quad y\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中 $x\in X\subset\mathbf{R}^n$,$y\in Y\subset\mathbf{R}^m$,$X\subset\mathbf{R}^n$,$Y\subset\mathbf{R}^m$ 是变量 x,y 的定义域.$F:X\times Y\to\mathbf{R}$,以及 $f:X\times Y\to\mathbf{R}$ 均是线性函数.$c_1^{\mathrm{T}},c_2^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,$d_1^{\mathrm{T}},d_2^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^m$,$b\in\mathbf{R}^p$,$A,B$ 分别是约束函数的系数矩阵.

二层线性规划问题是二层规划问题中最简单的一种类型,在二层线性规划问题中,其目标函数和约束条件都是线性存在的[1,2].对于二层规划,由于下层目标函数要以上层决策变量作为参数,上层又要以下层最优解反馈作为条件达到上层的最优,使得二层规划比一般的数学规划为更为复杂[3].

Candler[4] 和 Townsley[5] 在研究上层为无约束,且下层有唯一解的二层线性规划时得到一个有趣的性质:假设二层线性规划的最优解个数为有限个,那么在约束集的极点(顶点)处,至少存在一个极点是该问题的最优解.之后,Bard 在约束集有界的前提下,证明了这是二层线性规划的一个共性[6].

此处根据二层线性规划的全局最优解一定可以在约束域极点找到的理论,首先求出约束域的所有极点,根据极点处上层目标函数的值由小到大进行极点排序,然后按照这个顺序进行最优解检验,最终确定问题的全局最优,此处最后通过算例验证了算法的有效性.

收稿日期:2015-04-14;**修回日期**:2015-05-20.

* **基金项目**:重庆高校创新团队建设计划项目(KJ301321).

作者简介:赵礼阳(1990-),男,重庆大足人,硕士研究生,从事最优化理论研究.

1 基本理论

记 $S\triangleq\{(x,y):x\in X,y\in Y,\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}y\leqslant b,x,y\geqslant 0\}$ 为式(1)的约束域.下层问题对每个给定的上层变量 x 的可行集为 $S(x)\triangleq\{y\in Y,\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}y\leqslant b,y\geqslant 0\}$.上层变量的决策空间为 $S(X)\triangleq\{x\in X,\exists y\in Y,\text{s.t.}\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}y\leqslant b,x,y\geqslant 0\}$.下层问题对于给定的上层变量 x 的合理反应集为 $P(x)\triangleq\{y\in Y:y\in\arg\min\{f(x,\hat{y}),\hat{y}\in S(x)\}\}$.

定义 1 $IR=\{(x,y):(x,y)\in S,y\in P(x)\}$ 为式(1)的可归纳域(可行集).

为了保证式(1)有解,假设 S 为非空有界闭集;并且对于任意给定的上层决策变量,下层都只有唯一最优解反馈给上层.

定义 2 称 $(x*,y*)$ 为问题(LBP)的全局最优解,简称最优解.如果存在 $(x*,y*)\in IR$,使得对任意的 $(x,y)\in IR$,都有 $F(x*,y*)\leqslant F(x,y)$ 成立[7].

定义 3 如果 (x_0,y_0) 是 S 的任意一个极点(顶点),则对于 S 中相异于 (x_0,y_0) 的任意两点 (x_1,y_1),$(x_2,y_2)\in S$,以及任意的实数 $\lambda>0,\lambda\in(0,1)$,下面等式(2)不成立.

$$\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)=(x_0,y_0) \tag{2}$$

定理 1 如果 (x_0,y_0) 是式(1)的唯一最优解,则 (x_0,y_0) 必是式(1)约束集的极点.

证明 反证法.假设 (x_0,y_0) 是式(1)的唯一最优解,但 (x_0,y_0) 不是式(1)约束集的顶点,则由定义 3 可得,存在 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in S$,且 $(x_1,y_1)\neq(x_0,y_0)$,$(x_2,y_2)\neq(x_0,y_0)$,存在一正数 $\lambda\in(0,1)$,等式(3)成立:

$$\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)=(x_0,y_0) \tag{3}$$

于是有 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x_0,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2=y_0$,那么 $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$ 也是式(1)的最优解,显然成立等式(4):

$$F(x_0,y_0)=F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2) \tag{4}$$

又因为 (x_0,y_0) 是式(1)的唯一最优解,则

$$F(x_0,y_0)<F(x_1,y_1)=c_1^{\mathrm{T}}x_1+d_1^{\mathrm{T}}y_1 \tag{5}$$

$$F(x_0,y_0)<F(x_2,y_2)=c_1^{\mathrm{T}}x_2+d_1^{\mathrm{T}}y_2 \tag{6}$$

λ 与 $(1-\lambda)$ 分别乘入式(5)(6),相加得

$$\begin{gathered}F(x_0,y_0)<\lambda(c_1^{\mathrm{T}}x_1+d_1^{\mathrm{T}}y_1)+(1-\lambda)(c_1^{\mathrm{T}}x_2+d_1^{\mathrm{T}}y_2)<\\ \lambda c_1^{\mathrm{T}}x_1+(1-\lambda)c_1^{\mathrm{T}}x_2+\lambda d_1^{\mathrm{T}}y_1+(1-\lambda)d_1^{\mathrm{T}}y_2=\\ c_1^{\mathrm{T}}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+d_1^{\mathrm{T}}(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)=\\ F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\end{gathered}$$

这就与 $F(x_0,y_0)=F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$ 矛盾,故定理得证.

定理 2 如果 (x_0,y_0) 是式(1)的全局最优解,假设存在 (x_0,y_1) 是下层线性规划问题 $\min f(x,y)=c_2^{\mathrm{T}}x+d_2^{\mathrm{T}}y$ 最优解,则 $y_0=y_1$.

证明 因为 (x_0,y_0) 是线性规划式(1)的全局最优解,则上层给定的 x_0,y_0 是下层问题的最优解.又因为存在 (x_0,y_1) 是下层问题的最优解,则当 $x=x_0,y_1$ 也是下层问题的最优解.于是,对于上层给定一个决策 x_0,y_0 和 y_1 均是下层问题 $\min f(x,y)=c_2^{\mathrm{T}}x+d_2^{\mathrm{T}}y$ 的最优解,这与假设上层任意给定决策 x,下层都只有唯一反馈最优解矛盾,所以 $y_0=y_1$.

定理 3 若 (x_0,y_0) 是问题 $\min F(x,y)=c_1^{\mathrm{T}}x+d_1^{\mathrm{T}}y$ 的最优解,(x_0,y_1) 是问题 $\min f(x,y)=c_2^{\mathrm{T}}x+d_2^{\mathrm{T}}y$ 的最优解,则 $y_0=y_1$ 当且仅当 $F(x_0,y_0)=F(x_0,y_1)$.

证明 必要性.如果 (x_0,y_0) 是问题 $\min F(x,y)=c_1^{\mathrm{T}}x+d_1^{\mathrm{T}}y$ 的最优解,并且 $y_0=y_1$,那么 (x_0,y_1) 也是问

题 $\min F(x,y) = c_1^{\mathrm{T}}x + d_1^{\mathrm{T}}y$ 的最优解.

于是成立等式：

$$F(x_0,y_0) = F(x_0,y_1) \tag{7}$$

充分性：因为 $F(x_0,y_0)=F(x_0,y_1)$，于是 (x_0,y_0) 和 (x_0,y_1) 都是问题 $\min F(x,y) = c_1^{\mathrm{T}}x + d_1^{\mathrm{T}}y$ 的最优解. 对于上层给定 x_0，下层反馈最优解为 y_0，y_1，并且 $y_0 \neq y_1$，这与假设任意给定 x 以后，下层只有唯一最优解反馈给上层矛盾，故得证.

2 算法描述

因为线性二层规划的全局最优解一定出现在该问题约束集的极点处，因此在约束集空间的极点上面就能搜索到问题的全局最优解.基于这种思想，设计一种快速极点算法，具体步骤描述如下：

第 1 步：求出二层线性规划约束集合 S 的所有极点 (x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,n$，不妨假设对于任意 (x_p,y_p) 和 (x_q,y_q)，满足 $p<q$，则成立 $F(x_p,y_p) \leqslant F(x_q,y_q)$，$p,q \in \mathbf{N}^+$，转第 2 步；

第 2 步：给定问题一个初始解 (x_i,y_i)，$i=1$，$i \leqslant n$，转第 3 步；

第 3 步：把 x_i 带入下层目标函数 $f(x,y)$，求解 $f(x_i,y)$ 在约束集 S 中的最优解 y_{i+1}，转第 4 步；

第 4 步：比较 y_{i+1} 和 y_i 值，如果 $y_{i+1}=y_i$，停止计算，输出全局最优解 (x_i,y_i)；否则令 $i=i+1$，转第 3 步.

3 数值实验

例 1

$$\min_{x \geqslant 0} F(x,y) = x - 4y$$
$$\min_{y \geqslant 0} f(x,y) = y$$
$$\text{s.t.} \quad y + 2x \leqslant 12$$
$$2y - 3x \geqslant -4$$
$$y + x \geqslant 3$$
$$y - 2x \leqslant 0$$

很容易，能得到约束域 S 如图 1 所示.

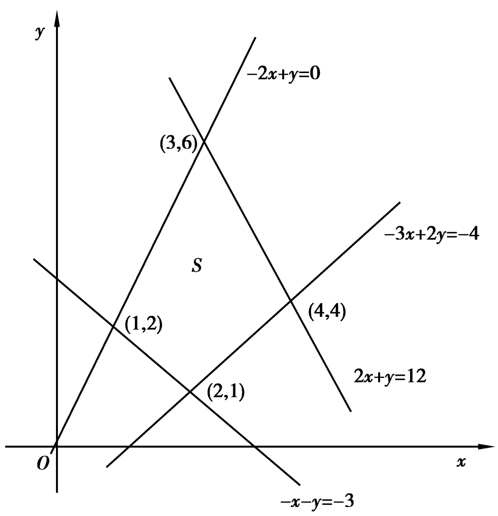

图 1　约束域

于是,根据文献[8]计算极点的算法,并且按照极点对应的上层目标函数值从小到大的顺序排列得到有序极点为(3,6),(4,4),(1,2),(2,1).然后开始检验,当 $x=3$ 时,下层最优解为 $y=\frac{5}{2}$,$\frac{5}{2}\neq 6$,重新寻找初始点迭代.当 $x=4$ 时,下层最优解为 $y=4$,于是停止迭代.则问题最优解为(4,4),这与参考文献[9]中的最优解一致.

4 小 结

因为二层线性规划问题反馈最优解集的非凸性,给求解二层线性规划问题带来了一定困难,此处给出的求解二层规划全局最优解的方法,简单易行,并且具有一定的应用价值.针对极点的重新排序,相对随机取初始迭代点,此方法能更快的找到全局最优解,最后的算例验证了算法的有效性.

参考文献:

[1] BENSION H P. On the Structure and Properities of a Linear Multilevel Programming Problem[J]. Journal of Operation Theory and Applications,1989(60):353-373

[2] BEREANU B. Stable Stochastic Linear Programs and Applications[J]. Mathematischen Operation for Schung and Statistik,1975,6(4):593-607

[3] BIALAS W F,KARWAN M H. Two-level Linear Programming[J]. Managenment Science,1984,30(8):1004-1020

[4] CANDLER W, Norton R. Mulilevel Programming and Development Policy[R]. Technical Report 258, World Bank Staff, Washington DC,1977

[5] CANDLER W, TOWNSLEY R. A Linear Two-level Programming Problem[J]. Computers and Operations Research,1982,9(1):59-76

[6] BARD, J F. An Investigation of the Linear Three Level Programming Problem[J]. IEEE Transaction System, Man and Cybernetics,1984,14(5):711-717

[7] BRACKEN J,MCGILL J T. Mathematical Programs with Optimization Problems in the Constraints[J]. Operation Research,1973,21(1):37-44

[8] 陶玉洁,张永,杨杰.二层线性规划求顶点的算法[J].通化师范学院学报,2007,28(4):8-10

[9] 胡长英.双层规划理论及其在管理中的应用[M].北京:知识产权出版社,2012

[10] 李宏卫,王军.三次型非线性包装系统跌落冲击响应分析[J].包装工程:工程版,2015(19):18-22

The Method of Getting Extreme Point of the Optimal Solution to Bilevel Linear Programming

ZHAO Li-yang[1], HUO Yong-liang[2]

(1.School of Mathematical Sciences,Chongqing Normal University,Chongqing 401331,China; 2.School of Mathematics and Finance,Chongqing University of Arts and Sciences,Chongqing 402160,China)

Abstract: According to the theory that the optimal solution to bilevel linear programming can be found on the extreme point of the constraint set,a method of getting extreme point of bilevel linear programming is presented. Through the top objective function sorting, this method avoids the shortcoming of verifing extreme point aimlessly. Finally, calculation example describles the perocess of algorithm for solving,and the effectiveness of the algorithm is verified.

Key words: bilevel linear programming; constraint condition; globle optimal solution; exeme point