doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.020

求解丢番图方程$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}$ *

王恒丰, 陈 星

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:利用高斯二平方和定理求解一个特殊的丢番图方程$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}$,将其转化为 $a^2+b^2=c^2+d^2$.经讨论得知,$a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv 1,2 \pmod 4$,当$(k_1-k_3)(k_1+k_3-1)\equiv(k_4+k_2)(k_4-k_2)$时,$a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv 1 \pmod 4$;当$(k_1-k_3)(k_1+k_3-1)\equiv(k_4-k_2)(k_4+k_2-1)\equiv 0,2 \pmod 4$时,$a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv 2 \pmod 4$.

关键词:丢番图方程;高斯二平方和定理;整数解

中图分类号:O157 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-058X(2015)11-0086-03

1 引 理

求解丢番图方程$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}$时需要用到一下几个引理.

引理 1[1](高斯二平方和定理) 设 n 为正整数,$n=m^2n_0$,$m\in\mathbf{Z}$,n_0 是 n 的无平方因子部分,则 n 是两个有理整数的平方和$\Leftrightarrow n_0$ 没有素因子 $p\equiv 3 \pmod 4$.

引理 2[2] 设 a,b 是任意两个不全为零的整数,

(i) 若 m 是任一整数,则$(am,bm)=(a,b)m$;

(ii) 若 δ 是 a,b 的任一公因数,则$\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)=\frac{(a,b)}{\delta}$,特别地$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=1$.

引理 3[2] 不定方程 $p=x^2+y^2$ 有正整数解的充分与必要条件是 $p=4m+1$.

引理 4[2]

(i) 若 $a_1=b_1 \pmod m$,$a_2=b_2 \pmod m$,则 $a_1+a_2=b_1+b_2 \pmod m$;

(ii) 若 $a=b \pmod m$,$b=c \pmod m$,则 $a\equiv c \pmod m$;

(iii) 若 $a_1=b_1 \pmod m$,$a_2=b_2 \pmod m$,则 $a_1a_2=b_1b_2 \pmod m$.

在求解齐次方程时,把只相差一个公因子的解视为同一个解.

2 丢番图方程$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}$的求解

定理 1 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}$($x>0,y>0,z>0,w>0$)与 $a^2+b^2=c^2+d^2$($a>0,b>0,c>0,d>0$)有相同的整数解.

收稿日期:2015-04-11;**修回日期:**2015-05-24.

* **基金项目:**数学天元基金(11426050).

作者简介:王恒丰(1992-),女,重庆长寿人,从事数学与应用数学研究.

证明　首先证明$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}(x>0,y>0,z>0,w>0)$可以转化为方程 $a^2+b^2=c^2+d^2(a>0,b>0,c>0,d>0)$.

在方程$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}(x>0,y>0,z>0,w>0)$两端同时乘以 $x^2y^2z^2w^2$,有

$$y^2z^2w^2+x^2z^2w^2=x^2y^2w^2+x^2y^2z^2$$

令 $a=yzw,b=xzw,c=xyw,d=xyz$,则 $a>0,b>0,c>0,d>0$,且 $a^2+b^2=c^2+d^2$.

现在证明 $a^2+b^2=c^2+d^2(a>0,b>0,c>0,d>0)$转化为$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}(x>0,y>0,z>0,w>0)$.

情形Ⅰ　当 $d=(x,y,z,w)=1$ 时,令 $a=yzw,b=xzw,c=xyw,d=xyz,m=xyzw$,则 $abc=m^2w,abd=m^2z,acd=m^2y,bcd=m^2x$,此时$(abc,abd,acd,bcd)=(m^2w,m^2z,m^2y,m^2x)=m^2(w,z,y,x)=m^2$.

$$x=\frac{m^2x}{m^2}=\frac{bcd}{(abc,abd,acd,bcd)}\in\mathbf{N}^+,y=\frac{m^2y}{m^2}=\frac{acd}{(abc,abd,acd,bcd)}\in\mathbf{N}^+$$
$$z=\frac{m^2z}{m^2}=\frac{abd}{(abc,abd,acd,bcd)}\in\mathbf{N}^+,w=\frac{m^2w}{m^2}=\frac{abc}{(abc,abd,acd,bcd)}\in\mathbf{N}^+$$

情形Ⅱ　$d=(x,y,z,w)>1$ 时,有

$$\frac{1}{\left(\frac{x}{d}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y}{d}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{z}{d}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{w}{d}\right)^2}$$

即$\left(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d},\frac{w}{d}\right)=1$,此即化为情形Ⅰ.

在方程 $a^2+b^2=c^2+d^2(a>0,b>0,c>0,d>0)$两边同时除以 $a^2b^2c^2d^2$,可以得到$\frac{1}{b^2c^2d^2}+\frac{1}{a^2c^2d^2}=\frac{1}{b^2b^2d^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}$,令 $x=bcd,y=acd,z=abd,w=abc$,则

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}(x>0,y>0,z>0,w>0)\tag{*}$$

因此,丢番图方程$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}(x>0,y>0,z>0,w>0)$与丢番图方程 $a^2+b^2=c^2+d^2(a>0,b>0,c>0,d>0)$具有相同的整数解.

所以,丢番图方程$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}(x>0,y>0,z>0,w>0)$的求解可以转化为丢番图方程 $a^2+b^2=c^2+d^2(a>0,b>0,c>0,d>0)$的求解.

接下来考虑丢番图方程 $a^2+b^2=c^2+d^2(a>0,b>0,c>0,d>0)$的解.

若 $a=b=c=d$,此即最简单的情形,方程有无穷多个解.

若 $a=c,b=d$,方程有无穷多个解.

若 a,b,c,d 全不相等时,由于$\forall a\in\mathbf{Z}$,有 $a^2\equiv0,1\pmod 4$;$\forall b\in\mathbf{Z}$,有 $d^2\equiv0,1\pmod 4$;$\forall c\in\mathbf{Z}$,有 $c^2\equiv0,1\pmod 4$;$\forall d\in\mathbf{Z}$,有 $d^2\equiv0,1\pmod 4$.故 $a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv0,1\pmod 4$.

当 $a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv1\pmod 4$时,不妨设 $a^2\equiv c^2\equiv1\pmod 4$,$b^2\equiv d^2\equiv0\pmod 4$.令

$$\begin{aligned}a^2&=4k_1(k_1-1)+1,k_1\in\mathbf{Z};b^2=4k_2^2,k_2\in\mathbf{Z}\\c^2&=4k_3(k_3-1)+1,k_3\in\mathbf{Z};d^2=4k_4^2,k_4\in\mathbf{Z}\end{aligned}\tag{1}$$

由 $a^2+b^2=c^2+d^2$ 得$(k_1-k_3)(k_1+k_3-1)=(k_4+k_2)(k_4-k_2)$.显然$(k_1-k_3)(k_1+k_3-1)=0,2\pmod 4$,$(k_4+k_2)$

$(k_4-k_2)\equiv 0,1,3(\bmod 4)$.故

$$(k_1-k_3)(k_1+k_3-1)\equiv(k_4+k_2)(k_4-k_2)\equiv 0(\bmod 4) \tag{2}$$

从而当式(2)成立时,有 $4k_1(k_1-1)+1+4k_2^2=4k_3(k_3-1)+1+4k_4^2$,亦即 $a^2+b^2=c^2+d^2$.故方程 $a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv 1(\bmod 4)$的通解具有方程(1)的形式,其条件为 k_1,k_2,k_3,k_4 满足方程(2).

当 $a^2+b^2\equiv c^2+d^2$ 时,只能 $a^2\equiv b^2\equiv c^2\equiv d^2\equiv 1(\bmod 4)$.令

$$\begin{aligned} a^2&=4k_1(k_1-1)+1,k_1\in\mathbf{Z},b^2=4k_2^2,k_2\in\mathbf{Z}\\ c^2&=4k_3(k_3-1)+1,k_3\in\mathbf{Z},b^2=4k_4^2,k_4\in\mathbf{Z}\end{aligned} \tag{3}$$

由 $a^2+b^2=c^2+d^2$ 得$(k_1-k_3)(k_1+k_3-1)=(k_4+k_2)(k_4-k_2)$.故

$$(k_1-k_3)(k_1+k_3-1)\equiv(k_4-k_2)(k_4+k_2-1)\equiv 0,2(\bmod 4) \tag{4}$$

从而当式(4)成立时,有 $4k_1(k_1-1)+1+4k_2(k_2-1)+1=4k_3(k_3-1)+1+4k_4(k_4-1)+1$,亦即 $a^2+b^2=c^2+d^2$.故方程 $a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv 2(\bmod 4)$的通解具有方程(3)的形式,其条件为 k_1,k_2,k_3,k_4 满足方程(4).

综上所述,方程 $a^2+b^2=c^2+d^2$ 的解的情况已经完全讨论清楚.给定 a,b,c,d 可求出丢番图方程的解.又$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}(x>0,y>0,z>0,w>0)$与 $a^2+b^2=c^2+d^2(a>0,b>0,c>0,d>0)$有相同的解.故根据式(*)可以求出对应的 x,y,z,w.

参考文献:

[1] 冯克勤.代数数论[M].北京:科学出版社,2000
[2] 闵嗣鹤,严士健.初等数论[M].北京:高等教育出版社,2003
[3] HARDY G H,WRIGHT E M.数论导论[M].北京:人民邮电出版社,2008
[4] 科斯特利金.代数学引论[M].北京:高等教育出版社,2007
[5] 张杰.关于不定方程 $x^2+64=y^7$ 的解的讨论[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(3):27-28

A Solution to the Diophantus Equation $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}$.

WANG Heng-feng, CHEN Xing

(College of Mathematical and Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this article, the sum of two squares and Gauss theorem is used to solve a particular diophantus equation $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}$. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}$ will be converted to $a^2+b^2=c^2+d^2$. After discussion, $a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv 1,2(\bmod 4)$. We say that $a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv 1(\bmod 4)$ if and only if $(k_1-k_3)(k_1+k_3-1)\equiv(k_4+k_2)(k_4-k_2)\equiv 0(\bmod 4)$; we say that $a^2+b^2\equiv c^2+d^2\equiv 2(\bmod 4)$ if and only if $(k_1-k_3)(k_1+k_3-1)\equiv(k_4-k_2)(k_4+k_2-1)\equiv 0,2(\bmod 4)$.

Key words: diophantus equation; the sum of two squares and Gauss theorem; integer solution