doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.017

关于 k-严格伪非扩展映象的不动点问题*

罗光耀[1], 龚黔芬[2]

(1.重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067;2.重庆工商大学 计算机与信息工程学院,重庆 400067)

摘　要:介绍了一类新的 k-严格伪非扩展映象,举例说明了该类映象的存在性,并在 Hilbert 空间中建立严格伪扩展映象的不动点与变分不等式问题解集的等价关系. 利用该等价关系和求解变分不等式问题的投影技巧、预解算子技巧和松弛迭代等方法,可以研究逼近 k-严格伪非扩展映象不动点的数值方法.

关键词:非扩展映象;k-严格伪非扩展映象;不动点;变分不等式;Hilbert 空间

中图分类号:O117.91　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)11-0071-04

0 引　言

设 H 为一实 Hilbert 空间,其内积和范数分别表示为$\langle \cdot,\cdot \rangle$和$|\cdot|$,设 C 为 H 的一个非空闭凸子集,称 $T:C\to C$ 为非扩展映象,如果

$$2\|Tx-Ty\|^2 \leqslant \|Tx-y\|^2+\|x-Ty\|^2,\ \forall x,y\in C \tag{1}$$

从文献[1]可知,式(1)等价于

$$\|Tx-Ty\|^2 \leqslant \|x-y\|^2+2\langle x-Tx,y-Ty\rangle,\ \forall x,y\in C$$

称 $T:C\to C$ 为 k-严格伪压缩映象[2],如果存在常数 $k\in[0,1)$,使得

$$\|Tx-Ty\|^2 \leqslant \|x-y\|^2+k\|(I-T)x-(I-T)y\|^2,\ \forall x,y\in C \tag{2}$$

如果 $k=0$,称 T 为非扩张映象,即$\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|$, $\forall x,y\in C$. 称 $T:C\to C$ 为 k-严格伪非扩展映象,如果存在常数 $k\in[0,1)$,使得

$$\|Tx-Ty\|^2 \leqslant \|x-y\|^2+k\|(I-T)x-(I-T)y\|^2+2\langle x-Tx,y-Ty\rangle,\ \forall x,y\in C \tag{3}$$

显然,每一个非扩展映象都是拟非扩张映象且 0-严格伪非扩展映象,但其逆命题并不成立.所以,k-严格伪非扩展映象是非扩展映象的推广形式. 此处以 $Fix(T)$ 表示 T 的不动点集合,即 $Fix(T)=\{x\in C,Tx=x\}$.

不动点理论是现代非线性分析的重要组成部分,广泛应用于经济决策、最优化理论、算子理论、数值分析和动力系统等经济和工程技术领域. 近年来,非线性映象的不动点定理及其逼近算法引起了数学研究者的极大兴趣,他们努力寻求各种关于不动点问题的数值算法、变分不等式、平衡问题和鞍点问题等,并获得了一系列很好的研究成果[2-13].文章目的是在 Hilbert 空间中建立 k-严格伪非扩展映象的不动点与不等式问题解的等价关系,为进一步探索变分不等式和平衡问题的数值解提供必要的理论基础.

1 预备知识

设 C 为 Hilbert 空间 H 的一个非空闭凸子集,$A:C\to H$ 为一非线性映象. 考虑如下变分不等式问题: 求一

收稿日期:2015-06-15;**修回日期**:2015-07-16.

* **基金项目**:重庆市自然科学基金项目(CSTC 2012jjA00039); 重庆市教委科技研究项目(KJ130731).

作者简介:罗光耀(1956-),男,重庆人,讲师,从事基础数学研究.

点 $x\in C$,使得

$$\|Ax,y-x\|\geqslant 0,\ \forall y\in C \tag{4}$$

用 $VI(C,A)$表示变分不等式问题(4)的解集. 对任意 $x\in H$,在 C 中存在唯一的最近点 P_{cx},即

$$\|x-P_Cx\|\leqslant\|x-y\|,\ \forall y\in C$$

称 P_C 为 H 到 C 上的度量投影. 从文献[5]可知,P_C 是非扩张的,且 $u=P_Cx$ 的充分必要条件是

$$\langle x-u,u-y\rangle\geqslant 0,\ \forall y\in C$$

称映象 $A:C\to H$ 是 α-逆强单调的,如果存在常数 $\alpha>0$,使得

$$\langle Ax-Ay,x-y\rangle\geqslant\alpha\|Ax-Ay\|^2,\ \forall x,y\in C$$

现举例说明该类推广的 k-严格伪非扩展映象及其不动点问题的存在性.

例 1[7] 设 $\mathbf{R}$ 表示实数集,如下定义映象 $T:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$Tx=\begin{cases}x,x\in(-\infty,0)\\-2x,x\in[0,+\infty)\end{cases}$$

不难验证,T 是 k-严格伪非扩展映象,却不是非扩展映象且 $Fix(T)=(-\infty,0]$.

例 2 取 $C:=[-1,1]$,则 $T:C\to C$ 是 k-严格伪非扩展映象,其中

$$Tx=\begin{cases}\dfrac{3-x}{4},x\in[-1,0]\\[2mm]\dfrac{3+x}{4},x\in[0,1]\end{cases}$$

证明 首先,不妨设 $x,y\in[-1,0]$, 则 $Tx=\dfrac{3-x}{4}$,$Ty=\dfrac{3-y}{4}$,且

$$|Tx-Ty|^2=\left|\frac{3-x}{4}-\frac{3-y}{4}\right|^2=\frac{1}{16}|x-y|^2$$

$$|(I-T)x-(I-T)y|^2=\left|\frac{5x-3}{4}-\frac{5y-3}{4}\right|^2=\frac{25}{16}|x-y|^2$$

由于 $x,y\in[-1,0]$,则

$$2\langle x-Tx,y-Ty\rangle=2\left\langle\frac{5x-3}{4},\frac{5y-3}{4}\right\rangle=\frac{1}{8}(5x-3)(5y-3)=$$

$$\frac{1}{8}(25xy-15x-15y+9)\geqslant 0$$

所以,对任意 $k\in[0,1)$,使得

$$|Tx-Ty|^2\leqslant|x-y|^2+|(I-T)x-(I-T)y|^2+2\langle x-Tx,y-Ty\rangle$$

其次,当 $x\in[-1,0]$,$y\in[0,1]$,即 $Tx=\dfrac{3-x}{4}$,$Ty=\dfrac{3+y}{4}$, 且

$$|Tx-Ty|^2=\left|\frac{3-x}{4}-\frac{3+y}{4}\right|^2=\frac{1}{16}|x+y|^2$$

$$|(I-T)x-(I-T)y|^2=\left|\frac{5x-3}{4}-\frac{3y-3}{4}\right|^2=\frac{1}{16}|5x-3y|^2$$

由于 $x\in[-1,0]$,$y\in[0,1]$,则

$$2\langle x-Tx,y-Ty\rangle=2\left\langle\frac{5x-3}{4},\frac{3y-3}{4}\right\rangle=\frac{3}{8}(5x-3)(y-1)=$$

$$\frac{3}{8}[5x(y-1)-3(y-1)]\geqslant 0$$

所以,对任意 $k\in(0,1)$,式(5)仍然成立. 最后,当 $x,y\in[0,1]$,由第一种情形类似可证.

因此,$T:C\to C$ 是 k-严格伪非扩展映象且 $Fix(T)=\{1\}$.

2 主要结果

定理 1 设 C 为 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集,$T:C\to C$ 为 k-严格伪非扩展映象且 $Fix(T)\neq\varnothing$,则 $Fix(T)=VI(C,I-T)$.

证明 记 $A=I-T$,取 $p\in Fix(T)$,即 $p=Tp(Ap=0)$,则

$$\langle Ap,v-p\rangle=0,\ \forall v\in C$$

即 $p\in VI(C,A)$,进一步得 $Fix(T)\subseteq VI(C,I-T)$.

另一方面,设 $u*\in VI(C,A)$,即$\langle (I-T)u*,v-u*\rangle\geqslant 0,\ \forall v\in C$,且

$$\begin{gathered}\|Tu*-Tp\|^2=\|u*-p-(Au*-Ap)\|^2=\\ \|u*-p\|^2+\|Au*-Ap\|^2-2[u*-p,Au*-Ap]=\\ \|u*-p\|^2+\|Au*\|^2-2[u*-p,Au*]\leqslant\\ \|u*-p\|^2+k\|(I-T)u*-(I-T)p\|^2+2[u*-Tu*,p-Tp]=\\ \|u*-p\|^2+k\|u*-Tu*\|^2\end{gathered}$$

整理得

$$\begin{gathered}\frac{1-k}{2}\|u*-Tu*\|^2\leqslant\langle u*-p,(I-T)u*\rangle=\\ -\langle p-u*,(I-T)u*\rangle\leqslant 0\end{gathered}$$

即 $u*\in Fix(T)$,进一步得 $VI(C,I-T)\subseteq Fix(T)$. 因此,$Fix(T)=VI(C,I-T)$.

注 1　定理 1 建立了 k-严格伪非扩展映象的不动点和变分不等问题解的等价关系,利用该等价关系和求解变分不等式问题的投影技巧、预解算子技巧和松弛迭代等方法,可进一步研究逼近 k-严格伪非扩展映象不动点的数值算法和收敛分析等问题.

参考文献:

[1] IEMOTO S,TAKAHASHI W. Approximating Commom Fixed Points of Nonexpansive Mappings and Nonspreading Mappings in a Hilbert Space[J]. Nonlinear Anal,2009(71):2080-2089

[2] MARINO G,XU H K. Weak and Strong Convergence Theorems for Strict Pseudo-contractions in Hilbert Spaces[J]. J Math Anal Appl,2007(329):336-346

[3] 谷峰.有限个平衡问题与非扩张映象不动点问题的复合迭代方法[J]. 系统科学与数学,2011,31(7):859-871

[4] VERMA R U. General Convergence Analysis for Two-step Projection Methods and Applications to Variational Problems[J]. Appl Math Lett,2005(18):1286-1292

[5] 闻道君,龚黔芬.有限个广义渐近非扩张映射的公共不动点逼近[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(1):11-14

[6] 闻道君,陈义安.广义非凸变分不等式解的存在性与投影算法[J].数学杂志,2012,32(3):475-480

[7] OSILIKE M O,ISIOGUGU F O. Weak and Strong Convergence Theorems for Nonspreading-type Mappings in Hilbert Spaces[J]. Nonlinear Anal,2011(74):1814-1822

[8] CENG L C,Al-HOMIDAN S,ANSARI Q H,et al. An Iterative Scheme for Equilibrium Problems and Fixed Point Problems of Strict Pseudo-contraction Mappings[J]. J Comput Appl Math,2009(223):967-974

[9] BLUM E,OETTLI W. From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems[J]. Math Student,1994(63):123-145

(下转第 **79** 页)