doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.014

再谈关于 L^p 空间的几种收敛关系*

聂东明

(安徽新华学院 公共课教学部,合肥 230088)

摘　要:讨论了 L^p 空间弱收敛、强收敛、几乎处处收敛、依测度收敛的相互转换关系,给出了证明,并通过举例的方式说明了一些定理的特殊情况.

关键词:强收敛;弱收敛;几乎处处收敛;依测度收敛

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)11-0057-04

在实变函数课程中,如文献[1,2],L^p 空间函数序列的收敛主要有依测度收敛、几乎处处收敛,在可积函数空间中既有强收敛又有弱收敛,这些收敛关系既相互联系又有区别,关于这些收敛之间的关系也有很多作者做出了一些结果.如文献[3-5]主要给出 L^p 空间的强收敛和弱收敛之间的关系;文献[6]给出弱收敛序列的一些性质.此处讨论了序列收敛与积分意义下的强收敛弱收敛之间的关系.

1　几个预备知识

定义 1　设 $f(x)$ 是 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 的可测函数,定义 L^p 范数为

$$\|f(x)\|_p=\begin{cases}\left(\int_\Omega |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},1\leqslant p<\infty\\ \inf\sup|u(x)|,p=\infty\end{cases}\tag{1}$$

称 $\|u\|_p<\infty$ 的全体为 L^p 空间.

定义 2　设 $f_n(x)\in L^p(\Omega)(n=1,2,\cdots)$.若存在 $f(x)\in L^p(\Omega)$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_p=0\tag{2}$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 依 $L^p(\Omega)$ 的意义收敛于 $f(x)$.

定义 3　设 $1\leqslant p\leqslant\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,f_n(x),f(x)\in L^p(\Omega)(n=1,2,\cdots)$,若有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x\quad(g(x)\in L^q(\Omega))\tag{3}$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛于 $f(x)$.

定义 4　设 $\{f_n(x)\}(n\in\mathbf{N}),f(x)$ 是 Ω 上几乎处处有限的可测函数,若对任给的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}m(\{x\in\Omega:|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0\tag{4}$$

收稿日期:2015-05-14;**修回日期**:2015-06-17.

* **基金项目**:安徽省教育厅自然科学基金(KJ2013B107);安徽新华学院自然科研项目(2014zr014).

作者简介:聂东明(1981-),男,河南南阳人,讲师,硕士,从事微分方程研究.

则称$\{f_n(x)\}$在Ω上依测度收敛于$f(x)$

定义 5 $\{f_n(x)\}(n\in\mathbf{N})$,$f(x)$是$\Omega$上几乎处处有限的可测函数,若存在$\Omega$中点集$Z$,有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in\Omega\backslash Z \tag{5}$$

其中$m(Z)=0$,则称$\{f_n(x)\}$在Ω上几乎处处收敛于$f(x)$.

注 1 这些收敛关系在一定条件下相互联系,又有区分,如知道的结论有[1,2]

1) 强收敛一定弱收敛,但反之不成立.

2) 弱收敛不一定依测度收敛.如函数列$\{\cos nx\}$在$L^2([0,2\pi])$中弱收敛于0,但不是依测度收敛于0.因为对$g(x)=\chi_{[\alpha,\beta]}(x)([\alpha,\beta]\subset[0,2\pi])$,易知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\cos nx\cdot\chi_{[\alpha,\beta]}(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n\beta)-\sin(n\alpha)}{n}=0$$

对$g(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i\chi_{[\alpha_i,\beta_i]}(x)$,其中$\{[\alpha_i,\beta_i]\}_1^m$是$[0,2\pi]$中互不相交子区间组,则$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}g(x)\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0$.对$g\in L^2([0,2\pi])$,注意到简单函数族在$L^2([0,2\pi])$中稠密,即有$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}g(x)\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0$. 然而$m\left(\left\{x\in[0,2\pi]:|\cos nx|\geqslant\frac{1}{2}\right\}\right)=\frac{4\pi}{3}$,所以$\{\cos nx\}$不是依测度收敛于0.

3) 依测度收敛但不一定弱收敛.

又函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}n,x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\0,x\in\left(\frac{1}{n},1\right]\end{cases}\quad(n\in\mathbf{N})$$

在$[0,1]$上依测度收敛于0,但不在$L^p([0,1])$中弱收敛.

4) 几乎处处收敛且弱收敛不一定L^p强收敛.如函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}\sqrt{n},x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\0,x\in\left(\frac{1}{n},1\right]\end{cases}\quad(n\in\mathbf{N})$$

在$[0,1]$上几乎处处收敛于0,且在$L^2([0,1])$中弱收敛于0,但不是在$L^2([0,1])$意义下收敛.

2 弱收敛与强收敛的关系

熟知在L^p意义下强收敛一定弱收敛,反之不成立,但是弱收敛在一定条件下可以强收敛,如

定理 1(Radon) 设$1<p<\infty$,$\{f_n(x)\}$在$L^p(\Omega)$中弱收敛于$f(x)$,若$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)\|_p=f(x)_p$,则$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_p=0$.

但该定理对$p=1,+\infty$不成立,例如

① $f_n(x)=\begin{cases}0,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}\\1,\frac{1}{n}<x\leqslant1\end{cases}$,则$\{f_n(x)\}$在$L^\infty([0,1])$上弱收敛于$f(x)=1$,且$\|f_n(x)\|_\infty\to1(n\to\infty)$,但$\|f_n(x)-f(x)\|_\infty=1(n\in\mathbf{N})$.

② $f_n(x)=4+\sin x(n\in\mathbf{N},0<x<2\pi)$,则$\{f_n\}$在$L^1((0,2\pi))$中弱收敛于$f(x)=4$,且$\|f_n(x)\|_1\to\|f(x)\|_1$

$(n\to\infty)$,但$\|f_n-f\|_1=4(n\in\mathbf{N})$.

但在一维空间 R^1 中,上述结果可以弱化为

定理 2　设$f_n(x)\in L^p(R^1)(1<p<\infty)$且$f_n(x)\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则$\|f_n(x)-f(x)\|_p\to 0(n\to\infty)$当且仅当$\|f_n^p(x)-f^p(x)\|_1\to 0(n\to\infty)$.

证明　必要性:记$\underline{f_n(x)}=\min\{f_n(x),f(x)\}$,$\overline{f_n(x)}=\max\{f_n(x),f(x)\}$,则由$\|\overline{f_n(x)}-f(x)\|_p\to 0$ $(n\to\infty)$以及$\underline{f_n^p(x)}+\overline{f_n^p(x)}=f_n^p(x)+f^p(x)$,可知$\|\overline{f_n(x)}\|_p\to\|f(x)\|_p$,$\|\underline{f_n(x)}\|_p\to\|f(x)\|_p(n\to\infty)$.

从而得$\|f_n^p(x)-f^p(x)\|_1=\|\overline{f_n^p(x)}-\underline{f_n^p(x)}\|_1=\|\overline{f_n(x)}\|_p^p-\|\underline{f_n(x)}\|_p^p\to 0(n\to\infty)$.

充分性:依题设知$f_n(x)$在 R^1 上依测度收敛于$f(x)$.其次,由$\left|\int[f_n^p(x)-f^p(x)]\mathrm{d}x\right|\leqslant\int|f_n^p(x)-f^p(x)|\mathrm{d}x$可知,对任给的$\varepsilon>0$,存在正整数$N_1$及$\delta>0$,使得当$m(e)<\delta,n>N_1$时,$\int_e f^p(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon^p}{2},\int_e f_n^p(x)\mathrm{d}x<\varepsilon^p$.

此外,还存在$E\subset R^1,m(E)<+\infty$,使得$\int_{E^c}f^p(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon^p}{2},\int_{E^c}f_n^p(x)\mathrm{d}x<\varepsilon^p$.

现取$\sigma=\frac{\varepsilon}{m(E)^{\frac{1}{p}}}$,以及$N>N_1$,使得当$n>N$时,$m(\{x\in R^1:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\})<\delta$.

考察

$$\|f_n(x)-f(x)\|_p\leqslant\left(\int_{\{x:|f_n-f|\geqslant\sigma\}}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E\cap\{x:|f_n-f|<\sigma\}}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+$$
$$\left(\int_{E^c}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$
$$\left(\int_{\{x:|f_n-f|\geqslant\sigma\}}|f_n(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E\cap\{x:|f_n-f|<\sigma\}}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+$$
$$\left(\int_{E\cap\{x:|f_n-f|<\sigma\}}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E^c}|f_n(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{E^c}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}<$$
$$4\varepsilon+(\sigma^p\cdot m(E))^{\frac{1}{p}}=5\varepsilon(n>\mathbf{N})$$

即$\|f_n(x)-f(x)\|_p\to 0(n\to\infty)$得证.

3　几乎处处收敛与 L^p 强收敛

由定义 5 的 4)知道几乎处处收敛不一定 L^p 意义下强收敛,但附加一定条件可得

定理 3　若$1\leqslant p<\infty$,$f(x)\in L^p(\Omega)$,$f_n\in L^p(\Omega)(n=1,2,\cdots)$,且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\text{a.e.}x\in\Omega,\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)\|_p=\|f(x)\|_p,\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_p=0$$

证明　由不等式$(a+b)^p\leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p)$,$a>0,b>0$,可得$|f_n(x)-f(x)|^p\leqslant 2^{p-1}(|f_n(x)|^p+|f(x)|^p)$,$x\in\Omega$.因此有

$$2^p\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_\Omega\lim_{n\to\infty}[2^{p-1}(|f_n(x)|^p+|f(x)|^p)-|f_n(x)-f(x)|^p]\mathrm{d}x\leqslant$$
$$2^{p-1}\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x+2^{p-1}\int_\Omega\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|^p\mathrm{d}x+\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega-|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=$$
$$2^p\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}x-\varlimsup_{n\to\infty}\int_\Omega|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x$$

所以得出

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_{\Omega}|f_n(x)-f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int_{\Omega}|f_n(x)-f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant 0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega}|f_n(x)-f(x)|^p \mathrm{d}x = 0$ 得证.

4 几乎处处收敛与依测度收敛

关于几乎处处收敛与依测度收敛有著名的 Riesz 定理.

定理 4(Riesz) 若 $\{f_n(x)\}$ 在 Ω 上依测度收敛于 $f(x)$,则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x)$, a.e.$x\in\Omega$.反之,可以得到以下结论:

定理 5 设 $\{f_n(x)\}$,$f(x)$ 为在 Ω 上几乎处处有限的可测函数,且 $m(\Omega)<\infty$.若 $\{f_n(x)\}$ 的任一子列中均存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列,则 $\{f_n(x)\}$ 在 Ω 上依测度收敛于 $f(x)$.

证明 (反证法)假设 $\{f_n(x)\}$ 在 Ω 上不是依测度收敛于 $f(x)$,则存在 $\varepsilon_0>0$,$\sigma>0$,以及 $\{k_i\}$,使得

$$m(\{x\in\Omega: |f_{k_i}(x)-f(x)|>\varepsilon_0\})\geqslant\sigma_0 \tag{6}$$

但依题设知存在 $\{k_{i_j}\}$,使得 $\lim\limits_{j\to\infty}f_{k_{i_j}}=f(x)$, a.e.$x\in\Omega$.

由此又知 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ 在 Ω 上依测度收敛于 $f(x)$,这与式(6)矛盾.定理得证.

参考文献:

[1] 周民强.实变函数论[M].北京:北京大学出版社,2008

[2] 程其襄.实变函数与泛函分析基础[M].北京:高等教育出版社,2003

[3] 玛哈提.胡斯曼.关于 L^p 空间的几种收敛关系[J].新疆师范大学学报:自然科学版,2009,28(2):33-36

[4] 贺光荣.L^p 空间的几种收敛性的关系[J].甘肃联合大学学报:自然科学版,2011,25(3):27-29

[5] 钟太勇.可积空间 L^p 中的几种收敛的关系[J].四川理工大学学报:自然科学版,2007,20(6):11-14

[6] 刑家省.空间 L^p 中弱收敛序列的一些性质[J].河南科学,2001,19(4):331-336

Several Convergence Relation of L^p Space

NIE Dong-ming

(Department of Public Courses, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China)

Abstract: In this paper, the relations of strong convergence, weak convergence, almost everywhere convergence, convergence in measure in L^p are discussed. In order to explain the special conditions of those theorem, some examples are given.

Key words: strong convergence; weak convergence; almost everywhere convergence; convergence in measure