doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.012

α-预不变凸函数的一个可导性质*

王海英,符祖峰,吴永武,甘 松
(安顺学院 数理学院,贵州 安顺 561000)

摘 要:利用 α-预不变凸函数的二次连续可微性,建立了 α-预不变凸函数的一个等价条件,然后研究了 α-预不变凸函数在多目标优化中的应用.

关键词:α-预不变凸函数;二次连续可微;弱有效解
中图分类号:O211.4 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)11-0051-03

0 引 言

在研究最优化问题时,凸性和广义凸性起着很重要的作用.1988 年,Avriel[1] 给出了可微的凸函数的一个等价条件.

引理 1[1] 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的二次连续可微函数,则 $f(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数的充要条件为其二阶导数 $f''(x)\geqslant 0$ 在 (a,b) 上成立.

引理 1 不但为研究函数的凸性提供了新的思路,而且也为研究广义凸函数、广义凸模糊映射提供了一种新的研究方法[2,3],比如 2010 年,赵[3] 将凸函数的这个可导性质推广到预不变凸函数,得到了预不变凸函数的一个等价条件.

引理 2[3] 设 X 是关于 η 的开不变凸集,η 满足条件 $\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$,$f(x)$ 二次连续可微且满足条件 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$,那么 $f(x)$ 是关于 η 的预不变凸函数的充要条件为 $\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\nabla^2 f(y)\eta(x,y)\geqslant 0$ 对于 $\forall x,y\in X$ 总成立.

2006 年,Noor 和 Noor[4] 提出了一类广义凸函数:α-预不变凸函数.

定义 1[4] 如果对于 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y)\in K$$

则称 K 是关于 η 和 α 的 α-不变凸集.

定义 2[4] 设 $f(x)$ 为 α-不变凸集 K 上的函数,如果 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant(1-\lambda)f(y)+\lambda f(x)$$

那么就称 $f(x)$ 为 K 上的 α-预不变凸函数.

由于预不变凸函数是 α-预不变凸函数的特殊情形,因此考虑将引理 1 和引理 2 的结果进一步推广到 α-预不变凸函数情形.在一定条件下,给出二次连续可微的 α-预不变凸函数的一个充要条件,为判断函数的 α-预不变凸性提供一种新的思路.最后,将讨论 α-预不变凸函数在多目标优化中的应用,得到 α-预不变凸多目标优化的局部弱有效解与其全局弱有效解之间的关系.

下面的讨论中将用到条件 A 和条件 B,为此先给出这两个条件的内容.

条件 A[5] $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,η 和 α 满足下列关系式:

收稿日期:2015-05-18;**修回日期**:2015-06-23.
* **基金项目**:贵州省科技厅、安顺市政府、安顺学院三方联合基金(黔科合 J 字 LKA[2013]19 号).
作者简介:王海英(1982-),女,河南南阳人,副教授,硕士研究生,从事优化理论的研究.

$$\eta(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$$
$$\eta(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$$

显然,$t=0,\eta(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

条件 B[5] $f(y+\alpha(x,y)\eta(x,y))\leqslant f(x),\ \forall x,y\in K$.

1 α-预不变凸函数的一个等价条件

在文献[6]中建立了 α-预不变凸函数的一个结果:

引理 3[6] 设 K 是关于 $\alpha:K\times K\to\mathbf{R}$ 和 $\eta:K\times K\to H$ 的 α-不变凸集,η 满足条件 A,α 满足条件 $\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$,$f(x)$ 满足条件 B,那么 $f(x)$ 关于相同的 η 和 α 是 α-预不变凸函数$\Leftrightarrow$ $\forall x,y\in K$,$\lambda\in[0,1]$,$g(\lambda)=f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$ 是$[0,1]$上的凸函数.

下面利用这个结果,建立二次连续可微的 α-预不变凸函数的一个等价条件.

定理 1 设 K 是关于 $\alpha:K\times K\to\mathbf{R}$ 和 $\eta:K\times K\to H$ 的开 α-不变凸集,η 满足条件 A,α 满足条件 $\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$,$f(x)$ 二次连续可微且满足条件 B,那么 $f(x)$ 是 K 上的 α-预不变凸函数$\Leftrightarrow\forall x,y\in K,\alpha^{\mathrm{T}}(x,y)\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\nabla^2 f(y)\eta(x,y)\alpha(x,y)\geqslant 0$.

证明 设 $f(x)$ 是 α-预不变凸函数且二次连续可微,则由题设条件,引理 3 成立,从而对于 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,$g(\lambda)=f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$ 是$[0,1]$上的凸函数且二次连续可微.利用引理 1,有 $\forall\lambda\in[0,1]$,$g''(\lambda)\geqslant 0$,而

$$g'(\lambda)=\alpha^{\mathrm{T}}(x,y)\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\ \nabla f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$
$$g''(\lambda)=\alpha^{\mathrm{T}}(x,y)\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\ \nabla^2 f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\eta(x,y)\alpha(x,y)$$

这里

$$g''(\lambda)=\alpha^{\mathrm{T}}(x,y)\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\ \nabla^2 f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\eta(x,y)\alpha(x,y)\geqslant 0$$

由 $f(x)$ 的二次连续可微性,令 $\lambda\to 0^+$,则有

$$\alpha^{\mathrm{T}}(x,y)\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\ \nabla^2 f(y)\eta(x,y)\alpha(x,y)\geqslant 0$$

另一方面,假设对于 $\forall x,y\in K$,有

$$\alpha^{\mathrm{T}}(x,y)\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\ \nabla^2 f(y)\eta(x,y)\alpha(x,y)\geqslant 0$$

则由条件 A 及式(1)

$$\alpha(x,y)=\alpha(y,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\tag{1}$$

可得

$$\alpha^{\mathrm{T}}(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\eta^{\mathrm{T}}(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\ \nabla^2 f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))$$
$$\eta(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\alpha(x,y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))=$$
$$(1-\lambda)^2\alpha^{\mathrm{T}}(x,y)\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\ \nabla^2 f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\eta(x,y)\alpha(x,y)\geqslant 0$$

也即

$$\alpha^{\mathrm{T}}(x,y)\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\ \nabla^2 f(y+\lambda\alpha(x,y)\eta(x,y))\eta(x,y)\alpha(x,y)\geqslant 0$$

于是得到 $g''(\lambda)\geqslant 0$,再由引理 1 和引理 3,即可得到 $f(x)$ 是 K 上的 α-预不变凸函数.

定理 1 提供了一种新的判断函数 α-预不变凸性的方法,如例 1 所示.

例 1 设 $X=(-2,-1)\cup(1,2)$,$\alpha(x,y)=1$,

$$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,\ -2<x<-1,\ -2<y<-1\\ x-y,1<x<2,1<y<2\\ y-x,1<x<2,\ -2<y<-1\\ y-x,\ -2<x<-1,1<y<2\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}(x+\dfrac{\pi}{2})^2,\ -2<x<-1\\ (x-\dfrac{\pi}{2})^2,1<x<2\end{cases}$$

可以验证 η 满足条件 A,$f(x)$ 二次连续可微且满足条件 B.此外,对于 $\forall x,y\in X$,可以验证

$$\alpha^{\mathrm{T}}(x,y)\eta^{\mathrm{T}}(x,y)\ \nabla^2 f(y)\eta(x,y)\alpha(x,y)\geqslant 0$$

故由定理 1,$f(x)$是 X 上的 α-预不变凸函数.

2　α-预不变凸函数在多目标优化中的应用

考虑下面的多目标优化问题:

$$(\mathrm{VP})\ \min_{x\in K} F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x))^{\mathrm{T}}$$

其中 $F:K\to\mathbf{R}^P,f_i:K\to\mathbf{R}(K\subseteq\mathbf{R}^n)$是关于 α 和 η 的 α-不变凸集.

定义 3[7]　若不存在 $x\in K$,使得 $F(x)<F(\bar{x})$,则称$\bar{x}\in K$ 是(VP)的全局弱有效解,

定义 4[7]　若存在$\bar{x}$的一个邻域 $N(\bar{x})$,不存在 $x\in K\cap N(\bar{x})$,使得 $F(x)<F(\bar{x})$,则称$\bar{x}\in K$ 是(VP)的局部弱有效解.

定理 2　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\alpha:K\times K\to\mathbf{R}$ 和 $\eta:K\times K\to H$ 的 α-不变凸集,$x\neq y$,有 $\eta(x,y)\neq 0,f_1(x)$,$f_2(x),\cdots,f_p(x)$为 K 上关于 α 和 η 的 α-预不变凸函数,那么(VP)的局部弱有效解也是其全局弱有效解.

证明　设$\bar{x}\in K$ 是(VP)的局部弱有效解,则存在$\bar{x}$的一个邻域 $N(\bar{x})$,不存在 $x\in K\cap N(\bar{x})$,使得

$$F(x)\ <\ F(\bar{x}) \tag{2}$$

如果$\bar{x}\in K$ 不是(VP)的全局弱有效解,则存在 $x^*\in K,x^*\neq\bar{x}$,使得 $F(x^*)<F(\bar{x})$,即有

$$f_j(x^*)\ <f_j(\bar{x}),j=1,2,\cdots,p$$

因为 $x^*\neq\bar{x}$,则 $\eta(x*,\bar{x})\neq 0$.又因为$f_j(x)(j=1,2,\cdots,p)$是 α-预不变凸函数,则$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$f_j(\bar{x}+\lambda\alpha(x^*,\bar{x})\eta(x^*,\bar{x}))\ \leqslant\ \lambda f_j(x^*)\ +\ (1-\lambda)f_j(\bar{x})\ <f_j(\bar{x}),j=1,2,\cdots,p \tag{3}$$

当 $\lambda>0$ 且充分小时,有

$$\bar{x}+\lambda\alpha(x^*,\bar{x})\eta(x^*,\bar{x})\ \in\ K\cap N(\bar{x})$$

根据式(3)得

$$F(\bar{x}+\lambda\alpha(x^*,\bar{x})\eta(x^*,\bar{x}))\ <\ F(\bar{x})$$

与式(2)矛盾.

参考文献:

[1] AVRIEL M,DIEWERT W E,SCHAIBLE S S,etal. Generalized concavity[M].New York: Penum Press,1988

[2] 张成,刘先.预不变凸模糊映射的一些性质[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2015,32(3):8-11

[3] 赵克全.预不变凸函数的一个等价条件[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2010,27(3):6-8

[4] NOOR M A, NOOR K I. Some Characterizations of Strongly Preinvex Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2006(316):697-706

[5] LIU C P. Some Characterizations and Applications on Strongly α-preinvex and Strongly α-invex Functions[J]. Journal of Industrial and Management Optimization,2008,4(4):727-738

[6] 王海英,符祖峰.α-预不变凸函数的若干性质[J].西南大学学报:自然科学版,2015,37(3):99-105

[7] 林锉云,董加礼.多目标优化的方法与理论[M].长春:吉林教育出版社,1992

A Differentiable Characterization of α-Preinvex Function

WANG Hai-ying, FU Zu-feng, WU Yong-wu, GAN Song

(Department. of Mathematics and Physics, Anshun College, Guizhou Anshun 561000, China)

Abstract: An equivalent characterization of α-preinvex function is set up under the twice continuously differentiable condition. The application of the α-preinvex function is studied in multi-objective optimization.

Key words: α-preinvex function; twice continuously differentiability; weak efficient solution