doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.008

连带 Legendre 微分方程边值问题解的相似结构 *

罗　梅, 李顺初

(西华大学 应用数学研究所,成都 610039)

摘　要:利用连带 Legendre 微分方程在 $x=1$ 附近的两个基本解,通过构造相似核函数,得到解的相似结构,由此得出解决这类边值问题的一种简洁方法——相似构造法;该方法大大简化了运算步骤,并且能更直观地观察出解的内在规律.

关键词:边值问题;连带 Legendre 方程;相似结构;相似核函数

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)11-0034-04

众所周知,二阶常系数线性微分方程的求解问题已在数学分析中讨论过,并且较容易得出其解.2004 年以来,文献[1]提出了微分方程解的相似构造理论,进而一些微分方程边值问题的解[2-10]可以利用相似结构理论求解出来.文献[11]为求解变系数微分方程提供了另外一种方法,即通过线性变换把二阶变系数微分方程转变成连带 Legendre 方程来求解,通过求解连带 Legendre 方程,可很容易得出变系数微分方程的解,对于研究连带 Legendre 微分方程的解具有重要的意义.基于此,研究如下连带 Legendre 方程的边值问题:

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{1}$$

$$[ay+(1+ab)y']_{x=\alpha}=c \tag{2}$$

$$[dy+ey']_{x=\beta}=0 \tag{3}$$

其中 ν,a,b,α,β,c 均为已知的实常数,$m=0,1,2,\cdots,0<\alpha<\beta,c\neq 0$.利用微分方程(1)在 $x=1$ 附近的两个基本解,讨论边值问题(1)-(3)的解的相似结构.

1　预备知识

方程(1)在 $x=1$ 附近的两个基本解[12]可用超几何函数表示为

$$y_1(x)=(x^2-1)^{\frac{m}{2}}F\left(\begin{matrix}-\nu+m & \nu+m+1\\ & m+1\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right) \tag{4}$$

$$y_2(x)=(x^2-1)^{-\frac{m}{2}}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+1 & -m-\nu\\ & -m+1\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right) \tag{5}$$

定义引解函数如下:

$$\varphi_{0,0}(x,\xi)=y_1(x)y_2(\xi)-y_2(x)y_1(\xi)$$

收稿日期:2015-07-06;**修回日期**:2015-08-16.

* **基金项目**:四川省教育厅自然科学重点项目(12ZA164).

作者简介:罗梅(1990-),女,四川乐至人,硕士研究生,从事微分方程及其应用研究.

$$\varphi_{1,0}(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{0,0}(x,\xi)=y'_1(x)y_2(\xi)-y'_2(x)y_1(\xi)$$

$$\varphi_{0,1}(x,\xi)=\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi_{0,0}(x,\xi)=y_1(x)y'_2(\xi)-y_2(x)y'_1(\xi)$$

$$\varphi_{1,1}(x,\xi)=\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial x}\varphi_{0,0}(x,\xi)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial \xi}\varphi_{0,0}(x,\xi)=y_1{}'(x)y_2{}'(\xi)-y_2{}'(x)y_1{}'(\xi)$$

则它的通解为

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=$$
$$C_1(x^2-1)^{\frac{m}{2}}F\left(\begin{matrix}-\nu+m & \nu+m+1\\ & m+1\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right)+C_2(x^2-1)^{-\frac{m}{2}}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+1\\ -m+1\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right)\tag{6}$$

其中 C_1,C_2 为待定常数,可由式(2)(3)确定.

为了得到式(1)-(3)解的相似结构,首先给出超几何微分方程的相关性质.超几何函数有如下的微分性质[3]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\left(\begin{matrix}\alpha & \beta\\ & \gamma\end{matrix};x\right)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F\left(\begin{matrix}\alpha+1 & \beta+1\\ & \gamma+1\end{matrix};x\right)$$

即有引理 1.

引理 1　超比函数的一阶微商仍然是超比函数,但 α,β,γ 分别变为 $\alpha+1,\beta+1,\gamma+1$,且多了一个倍因子$\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

证明　由 $F\left(\begin{matrix}\alpha & \beta\\ & \gamma\end{matrix};x\right)$的定义,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\left(\begin{matrix}\alpha & \beta\\ & \gamma\end{matrix};x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!\,(\gamma)_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^k=$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(k-1)!\,(\gamma)_k}x^{k-1}\xlongequal{l=k-1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{l+1}(\beta)_{l+1}}{l!\,(\gamma)_{l+1}}x^l$$

但$(x)_{l+1}=x(x+1)\cdots(x+l)=x(x+1)_l$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\left(\begin{matrix}\alpha & \beta\\ & \gamma\end{matrix};x\right)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_l(\beta+1)_l}{l!\,(\gamma+1)_l}x^l=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F\left(\begin{matrix}\alpha+1 & \beta+1\\ & \gamma+1\end{matrix};x\right)$$

引理 1 证毕.

根据引理 1,很容易得到

$$y'_1(x)=mx(x^2-1)^{\frac{m}{2}-1}F\left(\begin{matrix}-\nu+m & \nu+m+1\\ & m+1\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right)-$$
$$\frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{(\nu+m+1)(-\nu+m)}{m+1}F\left(\begin{matrix}-\nu+m+1 & \nu+m+2\\ & m+2\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right)\tag{7}$$

$$y'_2(x)=-mx(x^2-1)^{-\frac{m}{2}-1}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+1\\ -m+1\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right)-$$
$$\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{m}{2}}\frac{(-m-\nu)(-m+\nu+1)}{1-m}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+2\\ -m+2\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right)\tag{8}$$

在式(4)-(8)中,令 $x=\alpha$,有

$$y_1(\alpha)=(\alpha^2-1)^{\frac{m}{2}}F\left(\begin{matrix}-\nu+m & \nu+m+1\\ & m+1\end{matrix};\frac{1-\alpha}{2}\right)\tag{9}$$

$$y_2(\alpha)=(\alpha^2-1)^{-\frac{m}{2}}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+1 & -m-\nu \\ & -m+1\end{matrix};\frac{1-\alpha}{2}\right)\tag{10}$$

$$\begin{aligned}y'_1(\alpha)=\ &m\alpha(\alpha^2-1)^{\frac{m}{2}-1}F\left(\begin{matrix}-\nu+m & \nu+m+1 \\ & m+1\end{matrix};\frac{1-\alpha}{2}\right)-\\ &\frac{1}{2}(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{(\nu+m+1)(-\nu+m)}{m+1}F\left(\begin{matrix}-\nu+m+1 & \nu+m+2 \\ & m+2\end{matrix};\frac{1-\beta}{2}\right)\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}y'_2(\alpha)=\ &-m\alpha(\alpha^2-1)^{-\frac{m}{2}-1}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+1 & -m-\nu \\ & -m+1\end{matrix};\frac{1-\alpha}{2}\right)-\\ &\frac{1}{2}(\alpha^2-1)^{-\frac{m}{2}}\frac{(-m-\nu)(-m+\nu+1)}{1-m}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+2 & -m-\nu+1 \\ & -m+2\end{matrix};\frac{1-\alpha}{2}\right)\end{aligned}\tag{12}$$

同样,在式(4)-(8)中,令 $x=\beta$,有

$$y_1(\beta)=(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}F\left(\begin{matrix}-\nu+m & \nu+m+1 \\ & m+1\end{matrix};\frac{1-\beta}{2}\right)\tag{13}$$

$$y_2(\beta)=(\beta^2-1)^{-\frac{m}{2}}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+1 & -m-\nu \\ & -m+1\end{matrix};\frac{1-\beta}{2}\right)\tag{14}$$

$$\begin{aligned}y'_1(\beta)=\ &m\beta(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}-1}F\left(\begin{matrix}-\nu+m & \nu+m+1 \\ & m+1\end{matrix};\frac{1-\beta}{2}\right)-\\ &\frac{1}{2}(\beta^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{(\nu+m+1)(-\nu+m)}{m+1}F\left(\begin{matrix}-\nu+m+1 & \nu+m+2 \\ & m+2\end{matrix};\frac{1-\beta}{2}\right)\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}y'_2(\beta)=\ &-m\beta(\beta^2-1)^{-\frac{m}{2}-1}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+1 & -m-\nu \\ & -m+1\end{matrix};\frac{1-\beta}{2}\right)-\\ &\frac{1}{2}(\beta^2-1)^{-\frac{m}{2}}\frac{(-m-\nu)(-m+\nu+1)}{1-m}F\left(\begin{matrix}-m+\nu+2 & -m-\nu+1 \\ & -m+2\end{matrix};\frac{1-\beta}{2}\right)\end{aligned}\tag{16}$$

2 解的相似结构

由式(2)知

$$[ay_1(\alpha)+(1+ab)y'_1(\alpha)]C_1+[ay_2(\alpha)+(1+ab)y'_2(\alpha)]C_2=c\tag{17}$$

由式(3)知

$$[dy_1(\beta)+ey_1{}'(\beta)]C_1+[dy_2(\beta)+ey_2{}'(\beta)]C_2=0\tag{18}$$

联立式(17)和式(18),求解后得

$$C_1=\frac{c(dy_2(\beta)+ey_2{}'(\beta))}{(ay_1(\alpha)+(1+ab)y'_1(\alpha))(dy_2(\beta)+ey_2{}'(\beta))-(ay_2+(1+ab)y'_2(\alpha))(dy_1(\beta)+ey_1{}'(\beta))}\tag{19}$$

$$C_2=\frac{-c(dy_1(\beta)+ey_1{}'(\beta))}{(ay_1(\alpha)+(1+ab)y'_1(\alpha))(dy_2(\beta)+ey_2{}'(\beta))-(ay_2(\alpha)+(1+ab)y'_2(\alpha))(dy_1(\beta)+ey_1{}'(\beta))}\tag{20}$$

将式(19)、(20)代入式(6),得到边值问题(1)-(3)的解为

$$y(x)=\frac{c(dy_2(\beta)+ey_2{}'(\beta))y_1(x)-c(dy_1(\beta)+ey_1{}'(\beta))y_2(x)}{(ay_1(\alpha)+(1+ab)y'_1(\alpha))(dy_2(\beta)+ey_2{}'(\beta))-(ay_2(\alpha)+(1+ab)y'_2(\alpha))(dy_1(\beta)+ey_1{}'(\beta))}$$

经过整理和化简,并令 $\varphi(x)=\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi'_1(\alpha)}=\dfrac{d\varphi_{0,0}(x,\beta)+e\varphi_{0,1}(x,\beta)}{d\varphi_{1,0}(\alpha,\beta)+e\varphi_{1,1}(\alpha,\beta)}$,则

$$y(x)=c\cdot\frac{1}{a+\dfrac{1}{b+\varphi(\alpha)}}\cdot\frac{1}{b+\varphi(\alpha)}\cdot\varphi(x) \tag{21}$$

3 结　论

相似核函数只与定解方程的两个线性无关的解和右边界条件的系数有关,与左边界条件的系数无关.若右边界条件改变,只需对核函数做相应的修改,再经过简单的代数运算,便可得其解.该方法可以使程序变得简单明了,易于操作,为编制相应的软件提供方便.

参考文献:

[1] 李顺初,伊良忠,郑鹏社.微分方程定解问题解的相似结构[J].四川大学学报:自然科学版,2006,43(4):933-934

[2] 暴喜涛,李顺初,廖智健.Euler 超几何微分方程边值问题解的相似构造法[J].西南科技大学学报,2012,27(4):101-105

[3] 肖绪霞,李顺初.欧拉超几何方程边值问题的解的相似结构[J].内蒙古师范大学学报:自然科学汉文版,2012,41(6):597-600;603

[4] 许东旭,李顺初,许丽.欧拉超几何微分方程的一类边值问题解的相似结构 [J].西华大学学报:自然科学版,2012,31(2):91-93

[5] 许丽,李顺初,王俊超.考虑二次梯度影响的球向渗流问题解的相似结构[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(6):585-589

[6] 陈宗荣,李顺初.求解 Bessel 方程的边值问题的相似构造法[J].四川师范大学学报,2011,34(6):850-854

[7] 王俊超,李顺初.二阶齐次线性微分方程解的相似构造[J].理论数学,2012(2):23-27

[8] 王芙蓉,李顺初,许东旭.Airy 方程的一类边值问题的解的相似构造法[J].湖北师范学院学报,2013,33(1):79-85

[9] 范聪银,李顺初,董晓旭,等.基于相似结构的算法设计[J].应用数学进展,2013(2):107-113

[10] 李顺初,王俊超,许丽.复合球向渗流问题解的相似结构[J].数学的实践与认识,2014,44(3):122-127

[11] 赵忠奎,陆建华.勒让德函数在求解变系数微分方程中的应用[J].牡丹江师范学院学报:自然科学版,2013,84(3):1-2

[12] 王竹溪,郭敦仁.特殊函数概论[M].北京:北京大学出版社,2000

[13] 刘式适,刘式达.特殊函数[M].北京:气象出版社,2002

Similar Structure of the Solution to Boundary Value Problem of Associated Legendre Differential Equation

LUO Mei, LI Shun-chu

(Institute of Applied Mathematics, Xihua University, Sichuan Chengdu 610039, China)

Abstract: Based on two basic solutions of associated Legendre differential equation at the neighborhood of $x=1$, by constructing similar kernel function, the similar structure of the solution is obtained, as a result, a simple method for solving the class of boundary value problem, similar constructive method, is presented. This method largely simplifies the operation steps and can better intuitively find the inherent law of the solution.

Key words: boundary value problem; associated Legendre equation; similar structure; similar kernel function