第 32 卷第 11 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 11 月
Vol.32 NO.11 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Nov.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.002

广义 Burgers-BBM 方程波前解的持续性*

崔中飞, 傅仰耿

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘　要:对广义 Burgers-BBM 方程的波前解进行研究,在黏性充分小的情况下,运用几何奇异摄动理论证明其波前解是持续的.

关键词:广义 Burgers-BBM 方程;波前解;几何奇异摄动理论;持续性

中图分类号:O157.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)11-0006-07

1 基础知识

利用几何奇异摄动理论研究广义 Burgers-BBM 方程:

$$u_t + uu_x + \mu u_{xx} - \delta u_{xxt} + \varepsilon u_{xxxx} = 0 \tag{1}$$

波前解的持续性,其中 μ,δ 和 ε 为正常数,分别刻画耗散、色散和黏性的效果.当 $\varepsilon=0$ 时,方程(1)即为 Burgers-BBM 方程:

$$u_t + uu_x + \mu u_{xx} - \delta u_{xxt} = 0 \tag{2}$$

它可以看成是 Burgers 型方程与 BBM 方程所组合的简单扩散模型,可以描述非线性色散介质中单向传播的水波[1]和流体力学中具有有限的小振幅水波[2]等.当 $\mu=0$ 时,方程(2)变为 BBM 方程:

$$u_t + uu_x - \delta u_{xxt} = 0 \tag{3}$$

式(3)是 Benjamin-Bona-Mahony 于 1972 年在水波研究中提出的[2],其中 δ 是色散系数,它可以用来描述冷等离子体中的水磁波、可压缩流体中的声重力波、和谐水晶中的声波[3]等.在这些物理现象的研究中,方程行波解的研究起到重要的作用.因为不管是精确的还是数值的行波解,都可能对理解这些物理现象提供更多的信息.目前对方程(2)的解法主要有正切函数法[5]、Fourior 解法[6]、吴方法[7]等.通过这些方法,也找到一些精确波前解.1992 年,张卫国和王明亮利用待定系数法分别求出了方程(2)的一类指数函数有理分式形式的精确波前解

$$u(\xi) = \frac{-12\mu^2/25\delta v}{(1+\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{5\delta v}(\xi+\xi_0)})^2} + v + \frac{6\mu^2}{25\delta v}$$

并且证明了方程(2)的这类行波解可分解为 Burgers 方程的行波解和 BBM 方程的行波解的线性组合[8].2009 年,姜璐利用首次积分法得到了方程(2)的两种形式的精确波前解[9]:

收稿日期:2015-05-04;**修回日期**:2015-06-10.

* **基金项目**:国家自然科学基金资助(11401229).

作者简介:崔中飞(1991-),男,硕士研究生,从事微分方程与动力系统研究.

$$u=-\frac{3\mu^2}{25c}\exp\left(\frac{\mu x-\mu ct}{5c}+\theta_0\right)\sec h^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu x-\mu ct}{5c}+\theta_0\right)\right\}+\frac{18\mu^2+75c^2}{75c}$$

$$u=-\frac{3\mu^2}{25c}\exp\left(\frac{\mu x-\mu ct}{5c}+\theta_0\right)\csc h^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu x-\mu ct}{5c}+\theta_0\right)\right\}+\frac{18\mu^2+75c^2}{75c}$$

波前解的存在性问题是行波理论的一个基本问题.由于非线性波方程的波前解实际上对应相应行波系统的异宿轨,故波前解存在性的研究通常转化为相空间上异宿轨存在性的研究.然而当非线性波方程所对应行波系统的相空间是高维时,异宿轨的存在性就会变得非常困难.因此利用几何奇异摄动理论[10]研究小参数情况下非线性波方程波前解的持续性已经成为一个重要方向.例如 KBK 方程波前解的持续性[11]、含有时空延迟的 KPP 方程的波前解的持续性[12]、疾病模型中行波解的存在性[13]等.

下面将从动力系统和几何奇异摄动理论的角度来探讨当 ε 充分小时,方程(1)的波前解的持续性.

2　动力系统的刻画

式(1)做行波变换,将 $u(x,t)=u(\xi)$,其中 $\xi=x-ct$ 代入式(1),得

$$-cu'+uu'+\mu u''+c\delta u'''+\varepsilon u^{(4)}=0 \tag{4}$$

积分式(4)一次,得

$$d-cu+\frac{1}{2}u^2+\mu u+c\delta u''+\varepsilon u'''=0 \tag{5}$$

其中 d 是积分常数.假设 $c^2-2d>0$,则 $u_1=c-\sqrt{c^2-2d}$ 和 $u_2=c+\sqrt{c^2-2d}$ 是式(1)的两个平衡态.令 $u'=v,v'=w$,则式(5)可以改写为

$$Y=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},Y'=\begin{pmatrix}u'\\v'\\w'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\\w\\\frac{1}{\varepsilon}\left(-d+cu-\frac{1}{2}u^2-\mu v-c\delta w\right)\end{pmatrix}=F(Y) \tag{6}$$

显然系统(6)有下面两个平衡点

$$Y_0=(c-\sqrt{c^2-2d},0,0)^{\mathrm{T}},Y_1=(c+\sqrt{c^2-2d},0,0)^{\mathrm{T}}$$

系统(6)在 Y_0 的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{A}_0=DF(Y_0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\\frac{\sqrt{c^2-2d}}{\varepsilon}&-\frac{\mu}{\varepsilon}&\frac{-c\delta}{\varepsilon}\end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为

$$\lambda^3+\frac{c\delta}{\varepsilon}\lambda^2+\frac{\mu}{\varepsilon}\lambda-\frac{\sqrt{c^2-2d}}{\varepsilon}=0 \tag{7}$$

类似地,系统(6)在 Y_1 的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{A}_1=DF(Y_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\\frac{-\sqrt{c^2-2d}}{\varepsilon}&-\frac{\mu}{\varepsilon}&\frac{-c\delta}{\varepsilon}\end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为

$$\lambda^3 + \frac{c\delta}{\varepsilon}\lambda^2 + \frac{\mu}{\varepsilon}\lambda + \frac{\sqrt{c^2 - 2d}}{\varepsilon} = 0 \tag{8}$$

从而有下面的结论:

定理 1 如果 $c^2-2d>0$,$\dfrac{\sqrt{c^2-2d}}{c\delta}-\dfrac{\mu}{\varepsilon}<0$,那么在系统(6)中,不稳定流形 $W^u(Y_0)$ 是一维的,稳定流形 $W^s(Y_1)$ 是三维的.

证明 定理的证明主要依据辐角原理.Y_0 线性化的谱是由式(7)决定的,令

$$m_0(\lambda) = \lambda^3 + \frac{c\delta}{\varepsilon}\lambda^2 + \frac{\mu}{\varepsilon}\lambda - \frac{\sqrt{c^2 - 2d}}{\varepsilon}$$

则式(7)可以改写成 $m_0(\lambda)=0$.下面证明 $m_0(\lambda)=0$ 在右半复平面上只有一个根.由于 $m_0(\lambda)$ 是解析的,故式(7)在右半复平面上根的个数为

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\Delta_{C_0}\arg m_0(\lambda) \tag{9}$$

其中周线 C_0 是以原点为圆心、以 R 为半径的落在右半复平面内的半圆与虚轴所组成的有向围线,其方向是逆时针方向;$\Delta_{C_0}\arg m_0(\lambda)$ 表示 $m_0(\lambda)$ 沿着 C_0 总的辐角改变量.式(9)等于

$$1.5 + \frac{1}{2\pi}[\Delta\arg m_0(\mathrm{i}R)]_{R=+\infty}^{R=-\infty}$$

其中中括号里的量表示当 R 从$+\infty$ 到$-\infty$ 时 $m_0(\mathrm{i}R)$ 的总辐角改变量.因此需要计算 $m_0(\mathrm{i}R)$ 的象绕着原点转了几圈.注意到

$$m_0(\mathrm{i}R) = \left(-\frac{c\delta}{\varepsilon}R^2 - \frac{\sqrt{c^2 - 2d}}{\varepsilon}\right) + \mathrm{i}\left(-R^3 + \frac{\mu}{\varepsilon}R\right)$$

由于$-\dfrac{c\delta}{\varepsilon}R^2-\dfrac{\sqrt{c^2-2d}}{\varepsilon}<0$,$m_0(0)=-\dfrac{\sqrt{c^2-2d}}{\varepsilon}$,故 $m_0(\mathrm{i}R)$ 的象只落在左半复平面.当 $|R|$ 充分大时,$m_0(\mathrm{i}R)$ 的象有下面的渐近性质

$$\mathrm{Re}\ m_0(\mathrm{i}R) \sim -\frac{c\delta}{\varepsilon}R^2,\ \mathrm{lm}\ m_0(\mathrm{i}R) \sim -R^3 \text{ 当 } R\to\pm\infty$$

因此 $[\Delta\arg m_0(\mathrm{i}R)]_{R=+\infty}^{R=-\infty}=-\pi$,所以式(7)在右半复平面上只有一个根.这说明不稳定流形 $W^u(Y_0)$ 是一维的.

类似地,令

$$m_1(\lambda) = \lambda^3 + \frac{c\delta}{\varepsilon}\lambda^2 + \frac{\mu}{\varepsilon}\lambda + \frac{\sqrt{c^2 - 2d}}{\varepsilon}$$

则式(8)可以改写成 $m_1(\lambda)=0$.同理可得式(8)在左半复平面上根的个数是

$$1.5 + \frac{1}{2\pi}[\Delta\arg m_1(\mathrm{i}R)]_{R=-\infty}^{R=+\infty}$$

先计算量 $[\Delta\arg m_1(\mathrm{i}R)]_{R=0}^{R=+\infty}$.注意到

$$m_1(\mathrm{i}R) = \left(-\frac{c\delta}{\varepsilon}R^2 + \frac{\sqrt{c^2 - 2d}}{\varepsilon}\right) + \mathrm{i}\left(-R^3 + \frac{\mu}{\varepsilon}R\right)$$

显然当 R 从 0 单调增加到$+\infty$ 时,$m_1(\mathrm{i}R)$ 的实部从$\dfrac{\sqrt{c^2-2d}}{\varepsilon}$单调减少到$-\infty$,而 $m_1(\mathrm{i}R)$ 的虚部先从 0 单调增

加到$\frac{2\mu\sqrt{3\varepsilon\mu}}{9\varepsilon^2}$,然后从$\frac{2\mu\sqrt{3\varepsilon\mu}}{9\varepsilon^2}$单调减少到$-\infty$.当 $x_0=-\frac{c\delta}{\varepsilon}R^2+\frac{\sqrt{c^2-2d}}{\varepsilon}=0$,即 $R^2=\frac{\sqrt{c^2-2d}}{c\delta}$时,根据假设$\frac{\sqrt{c^2-2d}}{c\delta}-\frac{\mu}{\varepsilon}<0$,有 $y_0=-R^3+\frac{\mu}{\varepsilon}R>0$.即当 R 从 0 单调增加到$+\infty$,$m_1(\mathrm{i}R)$的象从点$\left(\frac{\sqrt{c^2-2d}}{c\delta},0\right)$出发经第一象限与正虚半轴相交于点$(0,y_0)$,再经第二象限与负实半轴相交,最后进入第三象限且在第三象限有下面的渐近性质

$$\mathrm{Re}\ m_0(\mathrm{i}R)\ \sim -\frac{c\delta}{\varepsilon}R^2,\ \mathrm{lm}\ m_0(\mathrm{i}R)\ \sim -R^3\ \text{当}\ R\to\infty$$

因此,$[\Delta\arg\ m_1(\mathrm{i}R)]_{R=0}^{R=\infty}=\frac{3\pi}{2}$,同理可得$[\Delta\arg\ m_1(\mathrm{i}R)]_{R=-\infty}^{R=0}=\frac{3\pi}{2}$.所以式(8)在左半复平面上有 3 个根.这说明稳定流形 $W^s(Y_1)$是三维的.定理证毕.

对于固定的$\mu,\delta,c^2-2d>0$,如果 $\varepsilon>0$ 充分小,那么$\frac{\sqrt{c^2-2d}}{c\delta}-\frac{\mu}{\varepsilon}<0$ 是显然成立的.由定理 1 易得不稳定流形 $W^u(Y_0)$的维数与稳定流形 $W^s(Y_1)$的维数之和是 4,然而相空间是 R^3,所以在 R^3 中,这两个流形极可能相交于一条一维的曲线,即系统(6)的一条异宿轨.下面利用几何奇异摄动理论证明相交的存在性.

3　波前解的存在性

如果 Burgers-BBM 方程存在一个单调增加的波前解,那么将证明对于充分小的 ε,广义 Burgers-BBM 方程也存在一个波前解.当 $0<\varepsilon<1$ 时,系统(6)可以改写成

$$\begin{cases}u'=v\\v'=w\\\varepsilon w'=-\frac{1}{2}u^2+cu-d-\mu v-c\delta w\end{cases}\tag{10}$$

系统(10)通常被称为“慢系统”,其对应的“快系统”为

$$\begin{cases}u_\eta=\varepsilon v\\v_\eta=\varepsilon w\\w_\eta=-\frac{1}{2}u^2+cu-d-\mu v-c\delta w\end{cases}\tag{11}$$

若在系统(10)中令 $\varepsilon=0$,则 u,v 满足系统

$$\begin{cases}u'=v\\v'=\frac{1}{c\delta}\left(-\frac{1}{2}u^2+cu-d-\mu v\right)\end{cases}\tag{12}$$

且 w 属于集合

$$M_0=\left\{(u,v,w):w=\frac{1}{c\delta}(-\frac{1}{2}u^2+cu-d-\mu v)\right\}$$

其中 M_0 是 R^3 的一个二维子流形.

根据文献[10]中的定义,流形 M_0 被称为是正规双曲的,如果快系统限制在 M_0 上,有 M_0 维数个特征值在虚轴上,且剩下的都是双曲的,则快系统(11)限制在 M_0 上的线性化系统的矩阵为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c-u & -\mu & -c\delta \end{pmatrix}
$$

因为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $0,0,-c\delta$,所以流形 M_0 是正规双曲的.因此,由 Fenichel 不变流形理论知,对充分小的 $\varepsilon>0$,存在 R^3 的一个二维子流形 M_ε 包含于 M_0 的 $O(\varepsilon)$ 领域内,并与 M_0 是微分同胚的.

为了确定 M_ε 上的动力学行为,记

$$
M_\varepsilon=\left\{(u,v,w):w=\frac{1}{c\delta}\left(-\frac{1}{2}u^2+cu-d-\mu v\right)+h(u,v,w)\right\} \tag{13}
$$

其中 h 光滑地依赖于 ε 且 $h(u,v,0)=0$.将式(13)中的 w 的表达式代入系统(10)的第 3 个方程,得

$$
\varepsilon\left[\frac{1}{c\delta}\left(-\frac{1}{2}u^2+cu-d-\mu v\right)'+\frac{\partial h}{\partial u}u'+\frac{\partial h}{\partial v}v'\right]=-c\delta h(u,v,\varepsilon) \tag{14}
$$

将 h 展成 ε 的泰勒级数

$$
h(u,v,\varepsilon)=h(u,v,0)+\varepsilon h_\varepsilon(u,v,0)+\frac{1}{2}\varepsilon^2 h_{\varepsilon\varepsilon}(u,v,0)+\cdots
$$

然后代入式(14)并比较 ε 的同次幂系数.比较零次幂系数,得 $h(u,v,0)=0$;比较一次幂系数,得

$$
h_\varepsilon(u,v,0)=-\frac{\mu}{(c\delta)^3}d+\frac{c\mu}{(c\delta)^3}u-\frac{c^2\delta+\mu^2}{(c\delta)^3}v-\frac{\mu}{2(c\delta)^3}u^2+\frac{1}{(c\delta)^3}uv
$$

这样就可以改写系统(10)为

$$
\begin{cases} u'=v \\ v'=\dfrac{1}{c\delta}\left(-\dfrac{1}{2}u^2+cu-d-\mu v\right)+\varepsilon h(u,v,0)+O(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{15}
$$

系统(15)决定 M_ε 上的动力学行为.下面给出并证明持续性定理.

定理 2 假设$\sqrt{c_0^2-2d}>0$,$d>0$.如果 Burgers-BBM 方程存在一个严格单调增加的波前解 $u_0(x,t)=u_0(\xi)$,满足$\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}u_0(\xi)=c_0\pm\sqrt{c_0^2-2d}$,那么对于充分小的 $\varepsilon>0$,这个波前解在广义 Burgers-BBM 方程中持续,即广义 Burgers-BBM 方程也存在一个波前解 $u(x,t)=u(\xi)$,满足$\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}u(\xi)=c_0\pm\sqrt{c_0^2-2d}$.

证明 已知波前解 $u_0(\xi)$ 对应系统(12)在(u,v)平面上的一条异宿轨,且这条异宿轨连接两个平衡点 E_-和 E_+,其中 $E_\pm=(c_0\pm\sqrt{c_0^2-2d},0)$.对于充分小的 ε,容易验证 E_- 和 E_+仍是系统(15)的两个平衡点.下面证明系统(15)存在一条异宿轨连接这两个平衡点.

把系统(15)改写为

$$
\begin{cases} u'=v \\ v'=\Phi(u,v,c,\varepsilon) \end{cases}
$$

其中 $\Phi(u,v,c,\varepsilon)$满足

$$
\Phi(u,v,c,0)=\frac{1}{c\delta}\left(-\frac{1}{2}u^2+cu-d-\mu v\right)
$$

因为 $u_0(\xi)$是严格增加的,故可以被刻画成某个函数的图像,把这个函数表示成

$$
v=f(u,c_0)
$$

根据稳定流形定理,对于充分小的 ε,$W^u(E_-)$可以被刻画成函数

$$
v=f_1(u,c,\varepsilon)
$$

的图像,其中 $f_1(c_0-\sqrt{c_0^2-2d},c,\varepsilon)=0$.由解对参数的连续依赖性,当 ε 充分小时,$W^u(E_-)$ 必与直线 $u=c_0$ 相交于某点上.

类似地,用 $v=f_2(u,c,\varepsilon)$ 刻画 $W^s(E_+)$,显然有 $f_2(c_0+\sqrt{c_0^2-2d},c,\varepsilon)=0$,且当 ε 充分小时,$W^s(E_+)$ 也必须与直线 $u=c_0$ 相交于某点上,因此有

$$f_1(u,c_0,0)=f_2(u,c_0,0)=f(u,c_0)$$

为了证明当 ε 充分小时,系统(15)存在一条异宿轨,只需证明在 c_0 附近存在唯一的 $c(\varepsilon)$,使得流形 f_1 和 f_2 相交与直线 $u=c_0$ 上的同一点.令

$$G(c,\varepsilon)=f_1(c_0,c,\varepsilon)-f_2(c_0,c,\varepsilon)$$

由于 $v=f_1(u,c,\varepsilon)$ 和 $v=f_2(u,c,\varepsilon)$ 都满足方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{\Phi(u,v,c,\varepsilon)}{v} \tag{16}$$

可以得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\left(\frac{\partial f_1(u,c_0,0)}{\partial c}\right)&=\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\mathrm{d}f_1(u,c,0)}{\mathrm{d}u}\right)\Bigg|_{c=c_0}=\\&\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\Phi(u,f_1(u,c,0),c,0)}{f_1(u,c,0)}\right)\Bigg|_{c=c_0}=\\&\frac{\partial}{\partial c}\left(-\frac{\mu}{c\delta}+\frac{-\frac{1}{2}u^2+cu-d}{c\delta f_1(u,c,0)}\right)\Bigg|_{c=c_0}=\\&\frac{\frac{1}{2}u^2-c_0u+d}{c_0\delta f(u,c_0)}\cdot\frac{\partial f_1(u,c_0,0)}{\partial c}+\frac{\frac{1}{2}u^2+d+\mu f(u,c_0)}{c_0^2\delta f(u,c_0)}\end{aligned} \tag{17}$$

命令

$$P(u)=\frac{\frac{1}{2}u^2-c_0u+d}{c_0\delta f(u,c_0)},\ Q(u)=\frac{\frac{1}{2}u^2+d+\mu f(u,c_0)}{c_0^2\delta f(u,c_0)}$$

由于

$$\frac{\partial f_1(c_0-\sqrt{c_0^2-2d},c,\varepsilon)}{\partial c}=0$$

解式(17)得

$$\frac{\partial f_1(u,c_0,0)}{\partial c}=(\exp\int_{c_0}^{u}P(\xi)\mathrm{d}\xi)\cdot\int_{c_0+\sqrt{c_0^2-2d}}^{u}Q(s)\cdot\exp\left[\int_{c_0}^{s}-P(\xi)\right]\mathrm{d}s$$

这样就有

$$\frac{\partial f_1(c_0,c_0,0)}{\partial c}=\int_{c_0-\sqrt{c_0^2-2d}}^{c_0}Q(s)\cdot\exp\left[\int_{c_0}^{s}-P(\xi)\right]\mathrm{d}s$$

类似地有

$$\frac{\partial f_2(c_0,c_0,0)}{\partial c}=\int_{c_0+\sqrt{c_0^2-2d}}^{c_0}Q(s)\cdot\exp\left[\int_{c_0}^{s}-P(\xi)\right]\mathrm{d}s$$

因为 $u_0(\xi)$ 是单调增加的,故 $f(u,c_0)>0$.又 $\sqrt{c_0^2-2d}>0$,$d>0$,所以有

$$\frac{\partial G(c_0,0)}{\partial c}=\frac{\partial f_1(c_0,c_0,0)}{\partial c}-\frac{\partial f_2(c_0,c_0,0)}{\partial c}=$$

$$\int_{c_0-\sqrt{c_0^2-2d}}^{c_0+\sqrt{c_0^2-2d}}Q(s)\cdot\exp\left[\int_{c_0}^{s}-P(\xi)\right]\mathrm{d}s=$$

$$\int_{c_0-\sqrt{c_0^2-2d}}^{c_0+\sqrt{c_0^2-2d}}\frac{\frac{1}{2}s^2+d+\mu f(u,c_0)}{c_0^2\delta f(u,c_0)}\cdot\exp\left[\int_{c_0}^{s}-P(\xi)\right]\mathrm{d}s>0$$

因此,根据隐函数定理,对于充分小的 $\varepsilon>0$,$G(c,\varepsilon)=0$ 在 c_0 附近只有唯一的根 $c=c(\varepsilon)$.这表明流形 f_1 和 f_2 相交于直线 $u=c_0$ 上的同一点,即系统(15)存在一条异宿轨连接平衡点 E_- 和 E_+.所以广义 Burgers-BBM 方程存在一个波前解 $u(x,t)=u(\xi)$,满足 $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty}u(\xi)=c_0\pm\sqrt{c_0^2-2d}$.定理证毕.

参考文献:

[1] 聂世丽,贾有见.利用指数函数法解 Burgers-BBM 方程[J].科学技术与工程,2011,11(21):1671-1815

[2] 徐红梅,吴笑天.BBM-Burgers 方程解的衰减估计[J].数学杂志,2014,34(4):723-728

[3] BENJAMIN T B,BONA J L,MAHONY J J.Model Equation for Long Water Waves in Nonlinear Dispersive Systems[J].Philos Trans R Soc London Series A,1972(272):47-78

[4] SEADAWY A R,SAYED A .Travelling Waves Solutions of the Benjamin- Bona -Mahonye Water Wave Equations[J].Abstract and Applied Analysis,2014(293):57-66

[5] 张金良,王跃明,王明亮.两类非线性方程的精确解[J].物理学报,2003,52(7):1575-1578

[6] 龚伦训.修正的 BBM 方程的一些新的精确解[J].原子与分子物理学报,2006,23(4):527-728

[7] 苏道毕力格,朝鲁.用吴方法计算 Burgers-BBM 方程的势对称及其不变解[J].内蒙古大学学报,2006,37(4):366-373

[8] 张卫国,王明亮.B-BBM 方程的一类准确行波解及结构[J].数学物理学报,1992,12(3):325-331

[9] 姜璐.Burgers-BBM 方程新的精确解[J].南昌工程学院学报,2009,28(1):41-46

[10] FENICHEL N.Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equation[J].Differential Eqs,1979(31):53-98

[11] YANG G F,ZHEN G L.Persistence of Travelling Fronts of KdV-burgers-kuramoto Equation[J].Applied Mathematics and Computation,2010(216):2199-2206

[12] ASHWIN P,BARTUCCELLI M,BRIDGES T.Travelling Fronts for the KPP Equation with Spatio-temporal Delay[J].Math Phys,2012(53):103-122

[13] RUAN S,XIAO D.Stability of Steady States and Existence of Travelling Waves in a Vector-disease Model[J].Proc Roy Soc Edinburgh Sect A,2004(134):991-1011

Persistence of Travelling Fronts of Generalized Burgers-BBM Equation

CUI Zhong-fei, FU Yang-geng

(School of Mathematical Sciences,Huaqiao University,Fujuan Quanzhou 362021,China)

Abstract: By geometric singular perturbation theory,this paper proves that travelling fronts of the Generalized Burgers-BBM equation persist under the condition of sufficiently small viscosity.

Key words: the generalized Burgers-BBM equation; wave-front solution; geometric singular perturbation theory;persistence