doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.014

关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=26y(y+1)(y+2)(y+3)$

帅亚军，罗　明
(西南大学 数学与统计学院，重庆 400715)

摘　要：运用递推数列的方法，证明了不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=26y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

关键词：不定方程；整数解；递归数列

中图分类号：O156.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-058X(2015)09-0053-04

当 $(m,n)=1, m,n\in\mathbf{N}^*$ 时，对形如 $mx(x+1)(x+2)(x+3)=ny(y+1)(y+2)(y+3)$ 的不定方程已有不少研究工作[1-8].1971 年，Cohn[1] 证明了当 $(m,n)=(1,2)$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(5,4)$；1975 年，Ponnudurait[2] 证明了当 $(m,n)=(1,3)$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(3,2),(7,5)$；1982 年，宣体佐[3] 证明了当 $(m,n)=(1,5)$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(2,1)$；1991 年，罗明[4] 证明了当 $(m,n)=(1,7)$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(4,2)$；2001 年，罗明[5] 证明了当 $(m,n)=(1,6)$ 时，不定方程仅有正整数解 $(x,y)=(7,4)$；2007 年，程瑶、马玉林[6] 证明了 $(m,n)=(1,11)$ 时，不定方程无正整数解；2013 年，郭凤明、罗明[7] 证明了当 $n=10$ 时，不定方程无正整数解.为此，在上述基础上利用同余式和递归数列方法证明，当 $m=1,n=26$ 时，不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=26y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

无正整数解.

先将方程(1)化为

$$(x^2+3x+1)^2-26(y^2+3y+1)^2=-25 \tag{2}$$

易知方程 $X^2-26Y^2=-25$ 的全部整数解[9]，由以下 4 个类给出：

$$x_n+y_n\sqrt{26}=\pm(1+\sqrt{26})(u_n+v_n\sqrt{26})=\pm(1+\sqrt{26})(51+10\sqrt{26})^n, n\in\mathbf{Z}$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{26}=\pm(-1+\sqrt{26})(u_n+v_n\sqrt{26})=\pm(-1+\sqrt{26})(51+10\sqrt{26})^n, n\in\mathbf{Z}$$

$$x'_n+y'_n\sqrt{26}=\pm(25+5\sqrt{26})(u_n+v_n\sqrt{26})=\pm(25+5\sqrt{26})(51+10\sqrt{26})^n, n\in\mathbf{Z}$$

$$\bar{x}'_n+\bar{y}'_n\sqrt{26}=\pm(-25+5\sqrt{26})(u_n+v_n\sqrt{26})=\pm(-25+5\sqrt{26})(51+6\sqrt{26})^n, n\in\mathbf{Z}$$

其中 $1+\sqrt{26}$，$25+5\sqrt{26}$ 是 $X^2-26Y^2=-25$ 的相应结合类的基本解，$51+10\sqrt{26}$ 是 Pell 方程 $u^2-26v^2=1$ 的基本解.由式(2)可知 $5\nmid(y^2+3y+1)$，从而舍去后面两个结合类.因为 $x_n+y_n\sqrt{26}$ 与 $\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{26}$ 是共轭的，容易知道 $\bar{y}_n=y_{-n}$，于是方程(2)的解应满足

$$(2y+3)^2=4y_n+5 \tag{3}$$

收稿日期：2014-10-24；**修回日期**：2015-01-15.

作者简介：帅亚军(1989-)，男，重庆巫溪人，硕士研究生，从事代数数论研究.

或者

$$(2y+3)^2=-4y_n+5 \tag{4}$$

由式(3)(4)不难推出下列关系式:

$$y_{n+1}=102y_n-y_{n-1},y_0=1,y_1=61 \tag{5}$$

$$u_{n+1}=102u_n-u_{n-1},u_0=1,u_1=51 \tag{6}$$

$$v_{n+1}=102v_n-v_{n-1},v_0=0,v_1=10 \tag{7}$$

$$u_{2n}=2u_n^2-1,v_{2n}=2u_nv_n,y_n=u_n+v_n \tag{8}$$

$$u_{n+2h}\equiv -u_n(\bmod u_h),v_{n+2h}\equiv -v_n(\bmod u_h) \tag{9}$$

$$y_{n+2h}\equiv -y_n(\bmod u_h) \tag{10}$$

下面将证明式(3)仅当 $n=-1,0$ 时成立,式(4)仅当 $n=0$ 时成立.由此求得方程 $x^2-26(y^2+3y+1)^2=-25$ 的全部整数解,进一步求得式(1)的全部正整数解.

引理 1 设 $2\mid n,n>0$,则 $\left(\dfrac{\pm4v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\dfrac{5u_n\pm4v_n}{37}\right)$.

证明 由式(6)知 $2\nmid u_n$,所以有 $u_{2n}\equiv 2u_n^2-1\equiv 1(\bmod 8)$,$\left(\dfrac{-1}{u_{2n}}\right)=1$,$\left(\dfrac{2}{u_{2n}}\right)=1$.因为 $2\mid n$,有 $u_n\equiv 1(\bmod 4)$,则 $\left(\dfrac{-1}{u_n}\right)=1$,

$$\left(\frac{\pm4v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm8u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{8v_n\pm10u_n}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_{2n}}{u_n}\right)\left(\frac{u_{2n}}{4v_n\pm5u_n}\right)=$$

$$\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{26v_n^2+u_n^2}{4v_n\pm5u_n}\right)=\left(\frac{666}{4v_n\pm5u_n}\right)=\left(\frac{2}{4v_n\pm5u_n}\right)\left(\frac{9}{4v_n\pm5u_n}\right)\left(\frac{37}{4v_n\pm5u_n}\right)=\left(\frac{5u_n\pm4v_n}{37}\right)$$

引理 2 若式(3)式成立,则 $n\equiv-1,0(\bmod 840)$.

证明 用对序列$\{4y_n+5\}$取模的方法证明.

mod 11,排除 $n\equiv1,2(\bmod 5)$,此时 $4y_n+5=7,7(\bmod 11)$,剩 $n\equiv0,3,4(\bmod 5)$.

mod 191,排除 $n\equiv3(\bmod 5)$,此时 $4y_n+5\equiv112(\bmod 191)$,剩 $n\equiv-1,0(\bmod 5)$.

mod 337,排除 $n\equiv1,3,4,5,6,7,8,9,10,13,14,,15,16,18,19,20,21,22(\bmod 24)$,此时 $4y_n+5\equiv249,288,319,72,122,77,155,68,215,131,178,98,59,28,275,270,192,279,132,216(\bmod 337)$,剩余 $n\equiv0,-1,12,17(\bmod 24)$.

mod 3 467,排除 $n\equiv5(\bmod 12)$,此时 $4y_n+5\equiv3\,308(\bmod 3\,467)$,剩 $n\equiv-1,0,12(\bmod 24)$.

下面用计算排除 $n\equiv12(\bmod 24)$.令 $n=24t+12$,若 $2\mid t$,则 $n\equiv12(\bmod 48)$,mod 47,排除 $n\equiv12(\bmod 48)$,此时 $4y_n+5\equiv17(\bmod 47)$;若 $2\nmid t$,则 $n\equiv36(\bmod 48)$,mod 47,排除 $n\equiv36(\bmod 48)$,此时 $4y_n+5\equiv40(\bmod 47)$,故式(3)不成立.从而排除 $n\equiv12(\bmod 24)$,剩余 $n\equiv-1,0(\bmod 24)$.因为 $n\equiv-1,0(\bmod 5)$,$n\equiv-1,0(\bmod 24)$,故 $n\equiv-1,0(\bmod 120)$.

下证 $n\equiv-1,0(\bmod 28)$,mod 197,排除 $n\equiv1,2,3,5,6,8,9,10,11,12(\bmod 14)$,此时 $4y_n+5\equiv52,67,175,26,38,155,140,32,63,181(\bmod 197)$,剩余 $n\equiv-1,0,4,7(\bmod 14)$.

mod 6 691,排除 $n\equiv4,7,13,18,21(\bmod 28)$,此时 $4y_n+5\equiv2\,034,1\,618,6\,532,4\,667,5\,083(\bmod 6\,691)$.剩余 $n\equiv-1,0,14(\bmod 28)$.

下面用计算排除 $n\equiv14(\bmod 28)$,令 $n=28t+14$.若 $2\mid t$,则 $n\equiv6(\bmod 8)$,mod 743,排除 $n\equiv6(\bmod 8)$,此时 $4y_n+5\equiv383(\bmod 743)$;若 $2\nmid t$,则 $n\equiv2(\bmod 8)$,mod 743,排除 $n\equiv2(\bmod 8)$,此时 $4y_n+5\equiv370(\bmod 743)$,从而得证 $n\equiv-1,0(\bmod 28)$.因为 $n\equiv-1,0(\bmod 120)$,所以 $n\equiv-1,0(\bmod 840)$.

引理 3 设 $n\equiv0(\bmod 840)$且 $n>0$,则式(3)不成立.

证明　令 $n=2\cdot k\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^t,(t\geqslant 2,2\nmid k)$,对 $\{5u_n\pm 4v_n\}$ 取模 mod 37 所得的两个剩余序列周期均为 18,而 $\{2^t\}$ 对 mod 18 的剩余序列具有周期 6.对 k 分两种情况讨论.

1) $k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$时,令

$$m=\begin{cases}2^t,t\equiv 2,3,4,5(\mathrm{mod}\ 18)\\ 5\cdot 2^t,t\equiv 0(\mathrm{mod}\ 18)\\ 3\cdot 7\cdot 2^t,t\equiv 1(\mathrm{mod}\ 18)\end{cases}$$

则有表 1.对表 1 中所有 m,均有 $\left(\frac{4u_m+5v_m}{37}\right)=-1$.

于是,由式(8)(10)及引理 1,有 $4y_n+5\equiv 4y_{2m}+5=4v_{2m}+5(\mathrm{mod}\ u_{2m})$,得 $\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{4v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{4u_m+5v_m}{37}\right)=-1$.从而 $4y_n+5$ 非平方数,故式(3)不成立.

2) $k\equiv -1(\mathrm{mod}\ 4)$时,令

$$m=\begin{cases}2^t,t\equiv 0,1,2,5(\mathrm{mod}\ 18)\\ 5\cdot 2^t,t\equiv 3(\mathrm{mod}\ 18)\\ 3\cdot 7\cdot 2^t,t\equiv 4(\mathrm{mod}\ 18)\end{cases}$$

则有表 2.对表 2 中所有 m,均有 $\left(\frac{5u_m-4v_m}{37}\right)=-1$.

表 1　$k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ 数据情况

$t(\geqslant 2)(\mathrm{mod}\ 6)$	0	1	2	3	4	5
$m(\mathrm{mod}\ 18)$	14	6	4	8	16	14
$5u_m+4v_m(\mathrm{mod}\ 37)$	26	34	15	7	21	26

表 2　$k\equiv -1(\mathrm{mod}\ 4)$ 数据情况

$t(\geqslant 2)(\mathrm{mod}\ 6)$	0	1	2	3	4	5
$m(\mathrm{mod}\ 18)$	10	2	4	4	12	14
$5u_m-4v_m(\mathrm{mod}\ 37)$	7	21	26	26	34	15

于是,由式(8)(10)及引理 1,有 $4y_n+5\equiv -4y_{2m}+5\equiv -4v_{2m}+5(\mathrm{mod}\ u_{2m})$,得 $\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-4v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m-4v_m}{37}\right)=-1$.从而 $4y_n+5$ 非平方数,故式(3)不成立.

证毕.

引理 4　设 $n\equiv -1(\mathrm{mod}\ 840)$且 $n\neq -1$,式(3)不成立.

证明　当 $n\equiv -1(\mathrm{mod}\ 840)$时,令 $n=-1+k\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^t(t\geqslant 3,2\nmid k)$,对 $\{u_m\}$ 取 mod 239,剩余序列周期为 240,而对 $\{2^t\}$ 取 mod 240 的剩余序列周期为 4.

当 $t\equiv 0,2(\mathrm{mod}\ 4)$时,令 $m=5\cdot 2^t$;当 $t\equiv 1,3(\mathrm{mod}\ 4)$时,令 $m=2^t$.则当 $t\equiv 0,1,2,3(\mathrm{mod}\ 4)$时,$m\equiv 90,32,80,128(\mathrm{mod}\ 240)$,有 $u_m\equiv 70,159,119,192(\mathrm{mod}\ 239)$.此时对所有的 m 均有 $\left(\frac{u_m}{239}\right)=-1$.

又由式(10)可得 $4y_n+5\equiv -4y_1+5\equiv -239(\mathrm{mod}\ u_m)$.因 $2\mid m$,则 $\left(\frac{-1}{u_m}\right)=1$,有 $\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-239}{u_m}\right)=\left(\frac{239}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{239}\right)$.从而 $\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=-1$,故式(3)不成立.

证毕.

引理 5　若式(4)成立,则必有 $n=0$.

证明 由式(4)知$(2y+3)^2=-4y_n+5>0$,由式(5)知,当 $n\neq 0$ 时,$y_n>1$,从而,负数不可能是完全平方数.当 $n=0$,$4\overline{y}_n+5=1^2$,结论成立.

证毕.

定理 1 不定方程

$$x^2-26(y^2+3y+1)^2=-25 \tag{11}$$

的全部整数解是$(\pm x,y)=(1,-1),(1,-2),(209,-8),(209,5),(1,0),(1,-3)$.

证明 由引理 2 及引理 5 知,要式(4)成立,则必须 $n=0$,此时 $y=-1,-2$.这就给出了式(11)的前两组解.

由引理 3 及引理 5 知,要式(3)成立,则必须 $n=-1,0$,此时 $y=-8,5,0,-3$.这就给出了式(11)的后 4 组解.

证毕.

推论 1 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=26y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

证明 要让式(1)有正整数解,则由式(2)及定理 1 知,应有 $x^2+3x+1=\pm 209$,但这两个方程都无正整数解.

从而方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=26y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

证毕.

参考文献:

[1] COHN J E. The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].Pacific J Math,1971(37):240-331

[2] PONNUDURAI T. The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=3y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].J London Math Soc,1975(10):232-240

[3] 宣体佐.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].北京师范大学学报:自然科学版,1982(2):27-34

[4] 罗明.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].重庆师范学苑学报:自然科学版,1991,8(1):1-8

[5] LUO M. On The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].Indian J pure appl Math,2001(1):3-7

[6] 程遥,马玉林.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2007,24(3):27-30

[7] 郭凤明,罗明.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].西南师范大学学报:自然科学版,2013,38(10):13-16

[8] 段辉明,杨春德.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].四川师范大学学报:自然科学版,2009,32(1):60-63

[9] 柯召,孙琦.谈谈不定方程[M].上海:哈尔滨工业大学出版社,1980

On the Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=26y(y+1)(y+2)(y+3)$

SHUAI Ya-jun, LUO Ming

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In this paper, with the method of recurrence sequences the author has shown that the Diophantine equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=26y(y+1)(y+2)(y+3)$ has no positive interger solution.

Keywords: diophantine equation, interger solution, recurrence sequence