第 32 卷第 9 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 9 月
Vol. 32 NO.9 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Sep.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.012

不定方程 $x^3-1=PQy^2$ 的整数解

李润琪

(德宏师范高等专科学校 数学系,云南 芒市 678400)

摘 要:主要利用同余式、二次剩余等证明了 $P\equiv 19\pmod{24}$ 为奇素数,$Q=97\ 241\ 337$,$\left(\frac{P}{Q}\right)=-1$ 时,不定方程 $x^3-1=PQy^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(1,0)$.

关键词:不定方程;整数解;同余;二次剩余

中图分类号:O156.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)09-0045-03

不定方程

$$x^3-1=Dy^2(D>0,D\text{ 无平方因子},x,y\in\mathbf{Z})\tag{1}$$

是一类重要的三次方程,其整数解已有不少人研究过.当 $D>2$,D 无平方因子且不含 $6k+1$ 形素因子时,文献[1,2]已经解决;当 D 含 $6k+1$ 形素因子时,目前已有许多相关结论,但是 D 含两个或两个以上 $6k+1$ 形素因子时,方程(1)的求解较为困难,目前结论还比较少.文献[3]给出 $D=pq$,$p\equiv 1\pmod{24}$ 为奇素数,$q=12s^2+1$ 为奇素数,$\left(\frac{p}{q}\right)=-1$ 时方程(1)的解的情况;文献[4]给出 $D=pq$,$p=73$,$q\equiv 1,19\pmod{24}$ 为奇素数,$\left(\frac{q}{73}\right)=-1$时方程(1)的解的情况;文献[5]给出 $D=pq$,$q=13$,$p\equiv 1\pmod{12}$ 为奇素数,$\left(\frac{p}{13}\right)=-1$ 时方程(1)的解的情况;文献[6]给出 $D=pq$,$p=7$,$q=13,19,61$ 时方程(1)的解的情况;文献[7]给出 $D=pq$,$q=7$,$p=3k+2$,$k\not\equiv 3,7\pmod{8}$ 为素数时方程(1)的解的情况;文献[7]给出 $D=1267=7\times 181$ 时方程(1)的解的情况.此处主要研究 $P\equiv 19\pmod{24}$ 为奇素数,$Q=97\ 241\ 337$,$\left(\frac{P}{Q}\right)=-1$ 时方程(1)的解的情况.

引理 1[8] 设 $p\equiv 19\pmod{24}$,$q\equiv 1\pmod{24}$,p,q 为奇素数,则丢番图方程组 $x-1=3pqu^2$,$x^2+x+1=3v^2$,$\gcd(u,v)=1$ 只有平凡解 $(x,u,v)=(1,0,\pm 1)$.

定理 1 设 $P\equiv 19\pmod{24}$ 为奇素数,$Q=97\ 241\ 337$,勒让德符号值 $\left(\frac{P}{Q}\right)=-1$,则不定方程

$$x^3-1=PQy^2\tag{2}$$

仅有平凡解 $(x,y)=(1,0)$.

证明 因为 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$,而 $\gcd(x-1,x^2+x+1)=\gcd(x-1,(x-1)^2+3(x-1)+3)=\gcd(x-1,3)=1$ 或 3,故方程(2)给出以下 8 种可能的分解:

收稿日期:2015-01-15;**修回日期**:2015-02-20.

* **基金项目**:云南省教育厅科学研究项目(2014Y462).

作者简介:李润琪(1965-),男,云南腾冲人,讲师,从事初等数论及数学教育研究.

Ⅰ $x-1=PQu^2, x^2+x+1=v^2, y=uv, \gcd(u,v)=1.$

Ⅱ $x-1=u^2, x^2+x+1=PQv^2, y=uv, \gcd(u,v)=1.$

Ⅲ $x-1=Pu^2, x^2+x+1=Qv^2, y=uv, \gcd(u,v)=1.$

Ⅳ $x-1=Qu^2, x^2+x+1=Pv^2, y=uv, \gcd(u,v)=1.$

Ⅴ $x-1=3PQu^2, x^2+x+1=3v^2, y=3uv, \gcd(u,v)=1.$

Ⅵ $x-1=3u^2, x^2+x+1=3PQv^2, y=3uv, \gcd(u,v)=1.$

Ⅶ $x-1=3Pu^2, x^2+x+1=3Qv^2, y=3uv, \gcd(u,v)=1.$

Ⅷ $x-1=3Qu^2, x^2+x+1=3Pv^2, y=3uv, \gcd(u,v)=1.$

以下讨论这 8 种情况所给的方程(2)的整数解.

情形Ⅰ 解 $x^2+x+1=v^2$,得 $x=0,-1$,均不适合 $x-1=PQu^2$,故方程(2)在该情形无整数解.

情形Ⅱ 将 $x-1=u^2$ 代入 $x^2+x+1=PQv^2$ 得 $(2u^2+3)^2+3=4PQy^2$,则有

$$(2u^2+3)^2 \equiv -3 \pmod{Q} \tag{3}$$

当 $Q=97$ 时,有 $(2u^2+3)^2 \equiv -3 \equiv 26^2 \pmod{97}$,得 $u^2 \equiv 34, 60 \pmod{97}$,但模 97 的勒让德符号值为 $\left(\frac{34}{97}\right)=\left(\frac{60}{97}\right)=-1$,故式(3)不成立,因此此时方程(2)无解.

当 $Q=241$ 时,有 $(2u^2+3)^2 \equiv -3 \equiv 31^2 \pmod{241}$,得 $u^2 \equiv 17, 227 \pmod{241}$,但模 241 的勒让德符号值为 $\left(\frac{14}{241}\right)=\left(\frac{224}{241}\right)=-1$,故式(3)不成立,因此此时方程(2)无解.

当 $Q=337$ 时,有 $(2u^2+3)^2 \equiv -3 \equiv 80^2 \pmod{337}$,得 $u^2 \equiv 130, 210 \pmod{337}$,但模 337 的勒让德符号值为 $\left(\frac{130}{337}\right)=\left(\frac{210}{337}\right)=-1$,故式(3)不成立,因此此时方程(2)无解.

综上,有方程(2)在该情形无整数解.

情形Ⅲ 因为 $P \equiv 19 \pmod{24}$,有 $x=Pu^2+1 \equiv 1,4,5 \pmod{8}$,则 $x^2+x+1 \equiv 3,5,7 \pmod{8}$. 又 $Q=97,241,337$,则有 $Qv^2 \equiv 1 \pmod{8}$,矛盾. 故方程(2)在该情形无整数解.

情形Ⅳ 将 $x-1=Qu^2$ 代入 $x^2+x+1=Pv^2$,得 $(2Qu^2+3)^2+3=4Pv^2$,则有 $3 \equiv Pv^2 \pmod{Q}$. 又 $Q=97,241,337$,则勒让德符号值 $\left(\frac{3}{Q}\right)=1$,而勒让德符号值 $\left(\frac{P}{Q}\right)=-1$,矛盾. 故方程(2)在该情形无整数解.

情形Ⅴ 因为 $P \equiv 19 \pmod{24}$, $Q=97,241,337 \equiv 1 \pmod{24}$,故由引理 1 知方程(2)在该情形仅有平凡解 $(x,y)=(1,0)$.

情形Ⅵ 因为 $x=3u^2+1 \equiv 1,4,5 \pmod{8}$,则 $x^2+x+1 \equiv 3,5,7 \pmod{8}$. 又 $P \equiv 19 \pmod{24}$, $Q=97,241,337$,则 $PQ \equiv 3 \pmod{8}$, $3PQv^2 \equiv 1 \pmod{8}$,矛盾. 故方程(2)在该情形无整数解.

情形Ⅶ 将 $x-1=3Pu^2$ 代入 $x^2+x+1=3Qv^2$,得 $(6Pu^2+3)^2+3=12Qv^2$,则有 $1 \equiv Qv^2 \pmod{P}$. 又勒让德符号值 $\left(\frac{Q}{P}\right)=\left(\frac{P}{Q}\right)=-1$,矛盾. 故方程(2)在该情形无整数解.

情形Ⅷ 将 $x-1=3Qu^2$ 代入 $x^2+x+1=3Pv^2$,得 $(6Qu^2+3)^2+3=12Pv^2$,则有 $1 \equiv Pv^2 \pmod{Q}$. 又勒让德符号值 $\left(\frac{Q}{P}\right)=-1$,矛盾,故方程(2)在该情形无整数解.

综上,有不定方程(2)在题设条件下仅有平凡解 $(x,y)=(1,0)$.

参考文献：

[1] 柯召，孙琦.关于丢番图方程 $x^3\pm1=3Dy^2$[J].四川大学学报，1981，18(2)：1-5

[2] 柯召，孙琦.关于丢番图方程 $x^3\pm1=Dy^2$[J].中国科学，1981，24(12)：1453-1457

[3] 管训贵，杜先存.关于 Diophantine 方程 $x^3\pm1=pqy^2$[J].安徽大学学报：自然科学版，2014，38(1)：13-19

[4] 杜先存，管训贵，杨慧章.关于不定方程 $x^3-1=73qy^2$ 的整数解[J].西南师范大学学报：自然科学版，2014，39(6)：18-20

[5] 管训贵，杜先存.关于丢番图方程 $x^3-1=13py^2$ 的整数解[J].沈阳大学学报：自然科学版，2014，25(6)：511-513

[6] 管训贵.关于丢番图方程 $x^3\pm1=7qy^2$ 的整数解[J].兰州文理学院学报：自然科学版，2014，28(2)：20-24

[7] 杜先存，万飞，杨慧章.关于丢番图方程 $x^3\pm1=1\ 267y^2$ 的整数解[J].数学的实践与认识，2013，43(15)：288-292

[8] 杜先存，管训贵，万飞.关于 Diophantine 方程组 $x-1=3pqu^2$，$x^2+x+1=3v^2$ 的整数解[J].重庆师范大学学报：自然科学版，2015，32(1)：102-105

On Integer Solution to the Indefinite Equation $x^3-1=PQy^2$

LI Run-qi

(Department of Mathematics, Dehong Teachers College, Mangshi 678400, China)

Abstract: Using congruence and quadratic residue, this paper proves that $P\equiv19\pmod{24}$ is odd. When $Q=97\ 241\ 337$ and $\left(\dfrac{P}{Q}\right)=-1$, the indefinite equation $x^3-1=PQy^2$ only has integer solution.

Keywords: indefinite equation; integer solution; congruence; quadratic remainder

(上接第 44 页)

参考文献：

[1] 柯召，孙琦. 数论讲义[M]. 北京：高等教育出版社，2001

[2] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京：科学出版社，1979

[3] 张德馨. 整数论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011

Several Theorems on Determining the Minimal Polynomial of θ^2

HU Huai-lan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing)

Abstract: Based on the existing theorems, in some certain cases, this paper uses the method of elementary number theory to obtain several related theorems of the minimal polynomial of θ^2 got from the minimal polynomial of θ. These theorems play an important role to determine the discriminant and integer matrix of domain.

Keywords: minimal polynomial; algebraic integer; integer coefficient polynomial.