doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.011

关于确定 θ^2 极小多项式的几个定理

胡 怀 兰
(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘 要:在已有定理的基础上,巧妙地利用初等数论的方法,得出在一些特定情况下由 θ 的极小多项式求得 θ^2 的极小多项式的几个相关定理.这些定理对于确定域的判别式以及整基有重要作用.

关键词:极小多项式;代数整数;整系数多项式

中图分类号:O156.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)09-0043-02

1 关键符号、定义与引理

Z:{自然数,自然数的相反数};**Q**:有理数集;$Z[x]$:系数属于 **Z** 的多项式组成的集合;$Q[x]$:系数属于 **Q** 的多项式组成的集合.

定义 1[1] 代数数 α 叫做代数整数(简称作整数),如果存在一个系数属于 Z 的首 1 多项式 $f(x)$,使得$f(\alpha)=0$.

引理 1[2] 设 α 为代数数,$f(x)$ 为 α 在 **Q** 上的极小多项式,则 α 为整数的充要条件是 $f(x)\in Z[x]$.

引理 2[3] 如果 $f(x)$ 是 $Z[x]$ 中的首 1 多项式,而 $g(x)\in Q(x)$ 是 $f(x)$ 的首 1 多项式因子,则 $g(x)\in Z[x]$.

2 主要定理与证明

定理 1 θ 为代数整数,则 θ^2 也为代数整数.

证明 θ 为代数整数,设它在 **Q** 上的极小多项式为

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0,\text{其中 } a_i\in \mathbf{Z},i=0,1,\cdots,n-1$$

则

$$0=\theta^n+a_{n-1}\theta^{n-1}+a_{n-2}\theta^{n-2}+\cdots+a_1\theta+a_0$$

于是

$$\theta^0=1,\theta^1=\theta^1,\cdots,\theta^{n-1}=\theta^{n-1}$$

$$\theta^n=-(a_{n-1}\theta^{n-1}+a_{n-2}\theta^{n-2}+\cdots+a_1\theta+a_0)$$

$$\theta^{n+1}=\theta\cdot\theta^n=-((a_{n-1}^2+a_{n-2})\theta^{n-1}+(a_{n-1}a_{n-2}+a_{n-3})\theta^{n-2}+\cdots+(a_{n-1}a_1+a_0)\theta+a_0a_{n-1})$$

$$\cdots$$

所以 $Z[\theta]=[1,\theta,\cdots,\theta^{n-1}]$,即其加法群为有限生成的,显然 $\theta^2Z[\theta]\subseteq Z[\theta]$,有

$$\begin{pmatrix}\theta^2\\ \theta^2\cdot\theta\\ \vdots\\ \theta^2\cdot\theta^{n-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}1\\ \theta\\ \vdots\\ \theta^{n-1}\end{pmatrix}$$

收稿日期:2015-01-07;**修回日期**:2015-02-13.

作者简介:胡怀兰(1990-),女,重庆巫溪人,硕士研究生,从事数论研究.

则$(\theta^2\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{M})(1\quad\theta\quad\cdots\quad\theta^{n-1})'=(0\quad 0\quad\cdots\quad 0)'$,其中$\boldsymbol{M}$是$\mathbf{Z}$中的$n$阶方阵,从而$|\theta^2\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{M}|=0$,即$\theta^2$是有理整系数多项式$|x\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{M}|$的根,从而$\theta^2$是代数整数.证毕.

定理 2 代数整数θ为有理数,则$\theta\in\mathbf{Z},\theta^2\in\mathbf{Z}$,即$\theta^2$的极小多项式就为$f(x)=x-\theta^2$.

证明 设$\theta=\dfrac{q}{p}$,其中$(p,q)=1$且$p,q\in\mathbf{Z}$,而且θ在$\mathbf{Q}$上的极小多项式为

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0,a_i\in\mathbf{Z},i=0,1,\cdots,n-1$$

则$0=q^n+a_{n-1}q^{n-1}p+a_{n-2}q^{n-2}p^2+\cdots+a_1qp^{n-1}+a_0p^n$,于是$q^n\equiv 0(\bmod p)$,即$p\mid q^n$,而$(p,q)=1$,所以$(p,q^n)=1$,所以$p=1$,即$\theta\in\mathbf{Z}$.显然$\theta^2\in\mathbf{Z}$,此时$\theta$的极小多项式为$x-\theta$,而$\theta^2$的极小多项式就为$x-\theta^2$.证毕.

定理 3 代数整数θ不为有理数,其在$\mathbf{Q}$上的极小多项式为$f(x)=x^2+px+q$时,θ^2的极小多项式为$g(x)=\begin{cases}x^2-(p^2-2k)x+q^2, & p\neq 0\\ x+q, & p=0\end{cases}$.

证明 已知$p,q\in\mathbf{Z}$且$q\neq 0,p^2-4q<0$.

当$p=0$时,$\theta^2+q=0$,则$g(x)=x+q$即为θ^2在$\mathbf{Q}$上的极小多项式.

当$p\neq 0$时,$\theta^2+p\theta+q=0,\theta=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2},\theta^2=\dfrac{p^2-2q\pm p\sqrt{p^2-4q}}{2}$,此时$\theta^2$即为$g(x)=x^2-(p^2-2q)x+q^2$的根,且$g(x)\in Z[x]$,下证其在$\mathbf{Q}$上在不可约.

假设$g(x)=x^2-(p^2-2q)x+q^2$在$\mathbf{Q}$上在可约,即在$\mathbf{Q}$上有根,而其有理根只可能为$\pm 1,\pm q,\pm q^2$,带入发现都不是解,从而在$\mathbf{Q}$上不可约,即$g(x)=x^2-(p^2-2q)x+q^2$为θ^2在$\mathbf{Q}$上的极小多项式.证毕.

定理 4 代数整数θ的极小多项式为$f(x)=x^n+kx+l$,θ^2的极小多项式为

$$g(x)=\begin{cases}h_1(x),h_1(x)\mid[x^n+2kx^{\frac{n+1}{2}}+k^2x-l^2],2\mid n+1\\ h_2(x),h_2(x)\mid[x^n+2lx^{\frac{n}{2}}-k^2x+l^2],2\mid n\end{cases},\ h_1(x),h_2(x)\in Z[x]$$

证明 当$2\mid n+1$时,因为代数整数θ的极小多项式为$f(x)=x^n+kx+l$,则$k,l\in\mathbf{Z}$,且$f(x)$在$\mathbf{Q}$上不可约,并且$f(\theta)=\theta^n+k\theta+l=0$,则

$$\theta^{n+1}+k\theta^2+l\theta=0\Rightarrow(\theta^{n+1}+k\theta^2-l\theta)(\theta^{n+1}+k\theta^2+l\theta)=0\Rightarrow$$
$$(\theta^{n+1}+k\theta^2)^2-l^2\theta^2=0\Rightarrow$$
$$\theta^{2n+2}+2k\theta^{n+3}+k^2\theta^4-l^2\theta^2=0\Rightarrow$$
$$\theta^2(\theta^{2n}+2k\theta^{n+1}+k^2\theta^2-l^2)=0$$

即θ^2是整系数多项式$x^n+2kx^{\frac{n+1}{2}}+k^2x-l^2$的根,再根据 Eisenstein 判别法[1]或者其他有理系数多项式是否可约判定定理确定其是否可约.若$x^n+2kx^{\frac{n+1}{2}}+k^2x-l^2$在$\mathbf{Q}$上不可约,即为$\theta^2$的极小多项式;若可约,由引理 2,$\theta^2$的极小多项式$h_1(x)$为$x^n+2kx^{\frac{n+1}{2}}+k^2x-l^2$的因式.综上所述,$h_1(x)\mid x^n+2kx^{\frac{n+1}{2}}+k^2x-l^2$,且$h_1(x)\in Z[x]$.

当$2\mid n$时,有

$$\theta^{n+1}+k\theta^2+l\theta=0\Rightarrow(\theta^{n+1}+k\theta^2-l\theta)(\theta^{n+1}+k\theta^2+l\theta)=0\Rightarrow(\theta^{n+1}+k\theta^2)^2-l^2\theta^2=0\Rightarrow$$
$$\theta^{2n+2}+2k\theta^{n+3}+k^2\theta^4-l^2\theta^2=0\Rightarrow\theta^{2n+2}+2\theta^{n+2}(-\theta^n-l)+k^2\theta^4-l^2\theta^2=0\Rightarrow$$
$$\theta^{2n+2}-2\theta^{2n+2}-2l\theta^{n+2}+k^2\theta^4-l^2\theta^2=0\Rightarrow-\theta^2(\theta^{2n}+2l\theta^n-k^2\theta^2+l^2)=0$$

即θ^2是整系数多项式$x^n+2lx^{\frac{n}{2}}-k^2x+l^2$的根,若$x^n+2lx^{\frac{n}{2}}-k^2x+l^2$在$\mathbf{Q}$上不可约,即为$\theta^2$的极小多项式;若可约,由引理 2,$\theta^2$的极小多项式$h_2(x)$为$x^n+2lx^{\frac{n}{2}}-k^2x+l^2$的因式.综上所述,$h_2(x)\mid x^n+2lx^{\frac{n}{2}}-k^2x+l^2$,且$h_2(x)\in Z[x]$.证毕.

(下转第 47 页)