doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.005

非奇异 M 矩阵 Hadamard 积的特征值界的新序列*

蒋建新, 李艳艳
(文山学院 数理系,云南 文山 663000)

摘　要: 利用非奇异 M 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 元素单调的上下界序列和改进的圆盘定理,得到了 M 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的 Hadamard 积以及最小特征值下界单调递减的新估计式.

关键词: M 矩阵;Hadamard 积;最小特征值;下界
中图分类号: O151.2　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1672-058X(2015)09-0020-03

关于非奇异 M 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 M 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$ 的最小特征值 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 下界的研究,已得到许多估计式[1-6].但这些估计式有些涉及矩阵的特征值,有些涉及 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素,有些又涉及 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径,当矩阵阶数较大时计算比较困难.此处利用非奇异 M 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 元素单调的上下界序列和改进的圆盘定理,得到了 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 下界单调递减的一系列新估计式.这些估计式只与矩阵的元素有关,当迭代次数较高时,几乎可以逼近真值.

1　预备知识

首先引入一些记号:

$$R_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad d_i=\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad J(A)=\{i\in\mathbf{N}:d_i<1\},\quad u_i=\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|$$

$$l_w=\max_{w\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{\sum_{j\neq i,w\leqslant j\leqslant n}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\right\},\quad s_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|},\quad r_i=\max_{j\neq i}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|}\right\},\quad m_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i}{|a_{jj}|}$$

$$q_{ji}=\min\{s_{ji},m_{ji}\},\quad h_i=\max_{j\neq i}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|q_{ji}-\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|q_{ki}}\right\},\quad u_{ji}^{0}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|q_{ki}h_i}{|a_{jj}|}$$

$$p_{ji}^{(t)}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|u_{ki}^{(t-1)}}{|a_{jj}|},\quad h_i^{(t)}=\max_{j\neq i}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|p_{ji}^{(t)}-\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|p_{ki}^{(t)}}\right\},\quad u_{ji}^{(t)}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|p_{ki}^{(t)}h_i^{(t)}}{|a_{jj}|}$$

$$p_i^{(t)}=\max_{j\neq i}\{p_{ij}^{(t)}\}$$

其次,给出一些定义和引理.

定义 1[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,如果 $a_{ij}\leqslant 0,\forall i,j=1,2,\cdots,n$,且 $i\neq j$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Z 矩阵.

定义 2[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为 Z 矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 $\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$,其中 $\boldsymbol{P}\geqslant 0,\alpha\geqslant\rho(\boldsymbol{P})$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 M 矩

收稿日期: 2015-03-13;**修回日期:** 2015-04-02.
* **基金项目:** 云南省教育厅科学研究基金项目(2013Y585);文山学院重点学科数学建设项目(12WSXK01).
作者简介: 蒋建新(1981-),男,讲师,硕士,从事矩阵理论及其应用研究.

阵,当 $\alpha>\rho(\boldsymbol{P})$ 时,称 A 为非奇异 M 矩阵,非奇异 M 矩阵的集合用 M_n 表示.

定义 3[1]　$\sigma(\boldsymbol{A})=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 组成的集合,称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱,$\boldsymbol{A}$ 的最小特征值记作 $\tau(\boldsymbol{A})=\min\{\mathrm{Re}(\lambda):\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$.

定义 4[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in C^{m\times n}$,$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn}\end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积.

引理 1[1]　若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是 M 矩阵,则存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D}$,使 $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}$ 是严格对角占优矩阵,也是 M 矩阵.

引理 2[1]　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,其中 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵,则

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{DAE})\circ\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{DA})\circ\boldsymbol{BE}=(\boldsymbol{AE})\circ(\boldsymbol{DB})=\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{DBE})$$

引理 3[2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一组正实数,则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值包含在复平面 C 的如下区域中:

$$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left\{z\in C:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant\left(x_i\sum_{k\neq i}\frac{1}{x_k}|a_{ki}|\right)\left(x_j\sum_{k\neq j}\frac{1}{x_k}|a_{kj}|\right)\right\}$$

引理 4[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是行严格对角占优的 M 矩阵,则 $\forall i,j\in\mathbf{N},j\neq i,t=1,2,\cdots$,有式(1)(2)成立:

$$1>q_{ji}\geqslant u_{ji}^{(0)}\geqslant p_{ji}^{(1)}\geqslant u_{ji}^{(1)}\geqslant p_{ji}^{(2)}\geqslant s_{ji}^{(2)}\geqslant\cdots\geqslant p_{ji}^{(t)}\geqslant u_{ji}^{(t)}\geqslant\cdots\geqslant 0 \tag{1}$$

$$1\geqslant h_i\geqslant 0,1\geqslant h_i^{(t)}\geqslant 0 \tag{2}$$

引理 5[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是行严格对角占优 M 矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\beta_{ij})$ 存在且有下列不等式(3)成立:

$$|\beta_{ji}|\leqslant\frac{|a_{ji}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|u_{ki}^{(t)}}{|a_{jj}|}|\beta_{ii}|,i\neq j,t=0,1,2,\cdots \tag{3}$$

2　主要结果

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in M_n$,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\beta_{ij})$,则

$$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-\left[\begin{matrix}(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4\left(s_i\sum\limits_{k\neq i}\frac{1}{s_k}|b_{ki}|m_{ki}\beta_{ii}\right)\\ \left(s_j\sum\limits_{k\neq j}\frac{1}{s_k}|b_{kj}|m_{kj}\beta_{jj}\right)\end{matrix}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{4}$$

证明　1)当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是不可约矩阵时,$\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是不可约的,并且存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 且使 $q(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=q(\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})D)=q(\boldsymbol{B}\circ(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{AD})^{-1})$.因此不防假设 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优 M 矩阵.

令 $R_j^{(t-1)}=\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|u_{ki}^{(t-1)}$,$j,i\in\mathbf{N},j\neq i,t=1,2,\cdots$.这时 $R_j^{(t-1)}=\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|u_{ki}^{(t-1)}\leqslant|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|u_{ki}^{(t-1)}\leqslant R_j(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|\leqslant a_{jj}$,此时存在实数 $z_{ji}^{(t-1)}(0\leqslant z_{ji}^{(t-1)}\leqslant 1)$,使 $|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|u_{ki}^{(t-1)}=z_{ji}^{(t-1)}R_j(\boldsymbol{A})+(1-z_{ji}^{(t-1)})R_j^{(t-1)}$,则 $p_{ji}^{(t)}=\dfrac{z_{ji}^{(t-1)}R_j(\boldsymbol{A})+(1-z_{ji}^{(t-1)})R_j^{(t-1)}}{a_{jj}}$,$z_j^{(t-1)}=\max\limits_{i\neq j}\{z_{ji}^{(t-1)}\}$,显然,$0<z_{ji}^{(t-1)}\leqslant 1$(如果 $z_{ji}^{(t-1)}=0$,则对任意 $j,i\in\mathbf{N},j\neq i,z_{ji}^{(t-1)}=0$,则 $a_{ji}=0$,$\forall j,i\in\mathbf{N},j\neq i$,即 $\boldsymbol{A}$ 是可约的,这与 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的假设矛盾).因为 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的,这时 $\boldsymbol{R}_j^{(t-1)}\geqslant 0,0<p_j^{(t)}<1$.

设 $q(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=\lambda$,由引理 3,并让 $x_j=\alpha_j$,$\alpha=\dfrac{1}{2}$,则存在 $0\leqslant i_0\leqslant n$,使得

$$|\lambda-\beta_{i_0i_0}b_{i_0i_0}||\lambda-\beta_{j_0j_0}b_{j_0j_0}|\leqslant\left(p_{i_0^{(t)}}\sum_{k\neq i_0}\frac{1}{p_k^{(t)}}|\beta_{ki_0}b_{ki_0}|\right)\left(p_{j_0^{(t)}}\sum_{k\neq j_0}\frac{1}{p_k^{(t)}}|\beta_{kj_0}b_{kj_0}|\right) \tag{5}$$

成立.

又因为

$$\left(p_{i_0}^{(t)}\sum_{k\neq i_0}\frac{1}{p_k^{(t)}}|\beta_{ki_0}b_{ki_0}|\right)\left(p_{j_0}^{(t)}\sum_{k\neq j_0}\frac{1}{p_k^{(t)}}|\beta_{kj_0}b_{kj_0}|\right)\leqslant$$

$$\left(p_{i_0}^{(t)}\sum_{k\neq i_0}\frac{1}{p_k^{(t)}}|b_{ki_0}|\frac{|a_{ki_0}|+\sum\limits_{l\neq k,i_0}|a_{kl}|u_{li_0}^{(t-1)}}{a_{kk}}\beta_{i_0i_0}\right)\left(p_{j_0}^{(t)}\sum_{k\neq j_0}\frac{1}{p_k^{(t)}}|b_{kj_0}|\frac{|a_{kj_0}|+\sum\limits_{l\neq k,j_0}|a_{kl}|u_{lj_0}^{(t-1)}}{a_{kk}}\beta_{j_0j_0}\right)\leqslant$$

$$\left(p_{i_0}^{(t)}\sum_{k\neq i_0}|b_{ki_0}|\beta_{i_0i_0}\right)\left(p_{j_0}^{(t)}\sum_{k\neq j_0}|b_{kj_0}|\beta_{j_0j_0}\right)$$

则有

$$|\lambda-\beta_{i_0i_0}b_{i_0i_0}||\lambda-\beta_{j_0j_0}b_{j_0j_0}|\leqslant\left(p_{i_0^{(t)}}\sum_{k\neq i_0}|b_{ki_0}|\beta_{i_0i_0}\right)\left(p_{j_0^{(t)}}\sum_{k\neq j_0}|b_{kj_0}|\beta_{j_0j_0}\right)$$

化简整理得

$$\tau(B\circ A^{-1})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{\beta_{ii}b_{ii}+\beta_{jj}b_{jj}-\left[(\beta_{ii}b_{ii}-\beta_{jj}b_{jj})^2+4\left(p_i^{(t)}\sum_{k\neq i}|b_{ki}|\beta_{ii}\right)\left(p_j^{(t)}\sum_{k\neq j}|b_{kj}|\beta_{jj}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

2）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有一个可约,类似文献[5]中定理 2.2.2 的证明知此时定理 1 也成立.

3 数值例子

假设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-1&-1&-1\\-2&5&-1&-1\\0&-2&4&-1\\-1&-1&-1&4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-0.5&0&0\\-0.5&1&-0.5&0\\0&-0.5&1&-0.5\\0&0&-0.5&1\end{pmatrix}$$

若应用文献[5]中定理 2.2.2,得 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant 0.127\,5$,应用此处结果,当 $t=10$ 时,$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant 0.213\,7$,而事实上 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=0.226\,6$.

此例进一步说明了所得结果的有效性.

参考文献:

[1] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000

[2] 王德凤.矩阵 Hadamard 积与 Fan 积的最小特征值与谱半径界的估计[D].昆明:云南大学,2011

[3] 赵建兴.M-矩阵最小特征值估计及其相关问题研究[D].昆明:云南大学,2014

The New Sequence of the Eigenvalue Bounds of the Hadamard Product of Nonsingular Matrix

JIANG Jian-xin, LI Yan-yan

(Department of Mathematics and Physics, Wenshan University, Wenshan 663000, China)

Abstract: By using the upper and lower bounds on the monotone sequence for inverse matrix A^{-1} elements of nonsingular M matrix A and improved disk theorem of matrix, this paper obtains the new estimator of the minimum eigenvalue bounds decreasing monotonically of Hadamard product of M matrix B and A^{-1}.

Key words: matrix; Hadamard product; minimum eigenvalue; lower bound