doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.002

具有脉冲扩散和扩散时滞的单种群模型研究*

黄玲智

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:研究了两斑块间具有脉冲扩散和扩散时滞的对数增长单种群模型,利用脉冲微分方程比较原理和离散动力系统频闪映射理论,得到了系统持久性和周期解的全局稳定性的充分条件.

关键词:脉冲扩散;扩散时滞;持久性;全局稳定性

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)09-0005-05

0　引　言

近年来,很多学者对种群的扩散现象进行了深入的研究[1-3].扩散是自然界很普遍而且有规律的现象,比如,鸟儿在冬季来临时会进行迁徙,但是它们并不在其他季节扩散.种群在扩散过程中会出现一些损失而且扩散需要时间.

考虑具有脉冲扩散和扩散时滞的对数增长单种群模型:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N_1(t)}{\mathrm{d}t}&=r_1N_1(t)\ln\frac{k_1}{N_1(t)}\\ \frac{\mathrm{d}N_2(t)}{\mathrm{d}t}&=r_2N_2(t)\ln\frac{k_2}{N_2(t)}\end{aligned}\right\},t\neq n\tau$$
$$\left.\begin{aligned}\Delta N_1&=d_2N_2(t-\tau_0)-D_1N_1(t)\\ \Delta N_2&=d_1N_1(t-\tau_0)-D_2N_2(t)\end{aligned}\right\},t=n\tau \tag{1}$$

其中 $N_i(t)$ $(i=1,2)$ 表示 t 时刻第 i 个斑块的种群密度,$r_i(i=1,2)$ 表示第 i 个斑块的内禀增长率,$D_i(i=1,2)$ 表示种群 N_i 从第 i 个斑块的移出率,d_i 表示种群 N_i 迁移到第 i 个斑块的迁入率,在这里假设 $0\leqslant d_i<D_i<1$,也就说明在斑块间的扩散过程中,种群存在损失,τ_0 表示种群在扩散过程中所用的时间.

1　预备知识

考虑如下非线性脉冲系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=rx(t)\ln\dfrac{k}{x(t)},t\neq n\tau\\ \Delta x(t)=-px(t),t=n\tau\end{cases} \tag{2}$$

其中 r,k 表示正数,$0<p<1$.

收稿日期:2015-03-15;**修回日期**:2015-04-28.

* **基金项目**:国家自然科学基金(11471061);重庆市自然科学基金(CSTC2014jcyjA40004).

作者简介:黄玲智(1991-),女,湖南怀化人,硕士研究生,从事微分方程及其应用研究.

引理 1[4] 系统(2)存在唯一全局渐进稳定的正周期解.

引理 2[5] 令 $F:\mathbf{R}_+^n\to\mathbf{R}_+^n$ 是连续映射并在 R_+^n 内具有一阶导数,假设 $DF(0)$ 存在并且 $\lim\limits_{x\to 0^+}DF(x)=DF(0)$. 另外假设:

(A) 当 $x>0$ 时,$DF(x)>0$.

(B) 当 $0<x<y$ 时,$DF(y)<DF(x)$.

如果 $F(0)=0$,令 $\lambda=\rho(DF(0))$.如果 $\lambda\leqslant 1$,那么对一切 $x\geqslant 0$,$F^n(x)\to 0$,$n\to\infty$;如果 $\lambda>1$,那么,或者对一切 $x>0$,$F^n(x)\to\infty$,$n\to\infty$;或者 F 存在唯一非零不动 q.对于后一种情况 $q>0$ 并且对一切 $x>0$,有 $F^n(x)\to q$,$n\to\infty$.

如果 $F(0)\neq 0$,对一切 $x\geqslant 0$,或者 $F^n(x)\to\infty$,$n\to\infty$;或者 F 存在唯一不动 q.对于后一种情况 $q>0$,并且对一切 $x>0$,有 $F^n(x)\to q$,$n\to\infty$.

接下来,令 $x=\dfrac{N_1}{k_1}$,$y=\dfrac{N_2}{k_2}$,$k=\dfrac{k_2}{k_1}$,则系统(1)变为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=r_1x(t)\ln\frac{1}{x(t)}\\ \dot{y}(t)&=r_2y(t)\ln\frac{1}{y(t)}\end{aligned}\right\},t\neq n\tau$$
$$\left.\begin{aligned}\Delta x&=d_2kNy(t-\tau_0)-D_1x(t)\\ \Delta y&=d_1\frac{1}{k}x(t-\tau_0)-D_2y(t)\end{aligned}\right\},t=n\tau \tag{3}$$

对系统(3)的前两个方程,在相邻脉冲点之间进行积分得

$$\begin{cases}x(t)=x_n^{\mathrm{e}^{-r_1(t-n\tau)}}\\ y(t)=y_n^{\mathrm{e}^{-r_2(t-n\tau)}}\end{cases},n\tau<t\leqslant(n+1)\tau \tag{4}$$

考虑系统(3)的后两个方程,得到如下的频闪映射:

$$\begin{cases}x(t)=(1-D_1)x_n^{b_1}+\mathrm{d}_2ky_n^{b_2\mathrm{e}^{r_2\tau_0}}\\ y(t)=(1-D_2)y_n^{b_2}+\dfrac{\mathrm{d}_1}{k}x_n^{b_1\mathrm{e}^{r_1\tau_0}}\end{cases} \tag{5}$$

其中 $0<b_1=\mathrm{e}^{-r_1\tau}<1$,$0<b_2=\mathrm{e}^{-r_2\tau}<1$.系统(4)和系统(5)的动态行为决定了系统(1)的动态行为.

2 持久性

定理 1 系统(1)是持久性的.

证明 首先证明系统(1)一致有上界.令$(N_1(t),N_2(t))$是系统(1)的任意解,初值 $N(0)>0$,$V(t)=N_1(t)+N_2(t)$,$\lambda_0=\min\{r_1,r_2\}$,当 $t\neq n\tau$ 时,有

$$\begin{aligned}D^+V(t)+V(t)+\lambda_0V(t)&=r_1N_1(t)\ln\frac{k_1\mathrm{e}^{\frac{1}{r_1}}}{N_1(t)}+r_2N_2(t)\ln\frac{k_2\mathrm{e}^{\frac{1}{r_2}}}{N_2(t)}+\lambda_0(N_1(t)+N_2(t))\leqslant\\ &r_1N_1(t)(k_1\mathrm{e}^{\frac{1}{r_1}}-1)+r_2N_2(t)(k_2\mathrm{e}^{\frac{1}{r_2}}-1)+\lambda_0(N_1(t)+N_2(t))\leqslant\\ &r_1k_1\mathrm{e}^{\frac{1}{r_1}}+r_2k_2\mathrm{e}^{\frac{1}{r_2}}=M_0\end{aligned}$$

则 $V(t)\leqslant\dfrac{M_0}{1+\lambda_0}+[V(0)-\dfrac{M_0}{1+\lambda_0}]\mathrm{e}^{-(1+\lambda_0)t}\to\dfrac{M_0}{1+\lambda_0}$,$t\to\infty$,所以 $V(t)$ 是一致有上界的,这里存在 $M=\dfrac{M_0}{1+\lambda_0}$,使得当 t 足够大时有 $N_1(t)\leqslant M$,$N_2(t)\leqslant M$.

最后证明系统(1)的所有解一致有下界.当 $d_i\geqslant 0(i=1,2)$,有

$$\left.\begin{aligned}\dot N_1(t)=r_1N_1(t)\ln\frac{k_1}{N_1(t)}\\ \dot N_2(t)=r_2N_2(t)\ln\frac{k_2}{N_2(t)}\end{aligned}\right\},t\neq n\tau \tag{6}$$
$$\left.\begin{aligned}\Delta N_1\geqslant -D_1N_1(t)\\ \Delta N_2\geqslant -D_2N_2(t)\end{aligned}\right\},t=n\tau$$

在这个系统(6)中 $N_1(t)$,$N_2(t)$没有任何联系,可以将它们独立出来.

$$\begin{cases}\dot N_1(t)=r_1N_1(t)\ln\dfrac{k_1}{N_1(t)},t\neq n\tau\\ \Delta N_1\geqslant -D_1N_1(t),\quad t=n\tau\end{cases}\tag{7}$$

$$\begin{cases}\dot N_2(t)=r_2N_2(t)\ln\dfrac{k_2}{N_2(t)},t\neq n\tau\\ \Delta N_2\geqslant -D_2N_2(t),t=n\tau\end{cases}\tag{8}$$

考虑系统(7)的脉冲比较系统:

$$\begin{cases}\dot u_1(t)=r_1u_1(t)\ln\dfrac{k_1}{u_1(t)},t\neq n\tau\\ \Delta u_1=-D_1u_1(t),t=n\tau\end{cases}\tag{9}$$

利用引理 1 得到系统(9)存在一个全局渐进稳定的正周期解 $u_1^*(t)$,由脉冲微分方程的比较定理,对于充分小的 $\varepsilon>0$,存在一个 $T_1>0$,有

$$N_1(t)\geqslant u_1^*(t)-\varepsilon\geqslant\min_{t\in[0,\tau]}u_1^*(t)-\varepsilon\triangleq m_1,t>T_1\tag{10}$$

同理可得,对于充分小的 $\varepsilon>0$,存在一个 $T_2>0$,有

$$N_2(t)\geqslant u_2^*(t)-\varepsilon\geqslant\min_{t\in[0,\tau]}u_2^*(t)-\varepsilon\triangleq m_2,t>T_2\tag{11}$$

定理 1 的证明结束.

3　正周期解的稳定性

首先证明系统(5)存在唯一的正不动点,即系统(1)存在唯一的正周期解.

定理 2　当(H_1):$D_1\geqslant d_2k$ 和(H_2):$b_1+b_2+d_1d_2<1$ 成立时,系统(5)存在唯一的正不动点.

证明　由系统(5),得到以下系统:

$$\begin{cases}x=(1-D_1)x^{b_1}+d_2ky^{b_2e^{r_2\tau_0}}\\ y=(1-D_2)y^{b_2}+\dfrac{d_1}{k}x^{b_1e^{r_1\tau_0}}\end{cases}\tag{12}$$

由系统(12)得到

$$x-(1-D_1)x^{b_1}\geqslant 0,y-(1-D_2)y^{b_2}\geqslant 0\tag{13}$$

于是有 $x\geqslant(1-D_1)^{\frac{1}{1-b_1}}=\xi$,$y\geqslant(1-D_2)^{\frac{1}{1-b_2}}=\eta$.

由系统(12)可得

$$\begin{cases}G(x,y)=(1-D_2)y^{b_2}-y+\dfrac{d_1}{k}x^{b_1e^{r_1\tau_0}}\\ y=\left[\dfrac{1}{d_2k}(x-(1-D_1)x^{b_1})\right]^{\frac{1}{b_2e^{r_1\tau_0}}}\end{cases}\tag{14}$$

$$G(\xi,y(\xi))=\frac{d_1}{k}\xi^{b_1e^{r_1\tau_0}}>0$$

$$G(1,y(1))=(1-D_2)\left(\frac{D_1}{d_2k}\right)^{\frac{1}{e^{r_2\tau_0}}}-\left(\frac{D_1}{d_2k}\right)^{\frac{1}{b_1e^{r_2\tau_0}}}+\frac{d_1}{k}<$$

$$(1-D_2)\frac{D_1}{d_2k}-\left(\frac{D_1}{d_2k}\right)^{\frac{1}{b_1e^{r_2\tau_0}}}+\frac{d_1}{k}<\frac{D_1}{d_2k}-\left(\frac{D_1}{d_2k}\right)^{\frac{1}{b_1e^{r_2\tau_0}}}<0$$

存在(x^*,y^*)满足$\xi<x^*<1,0=y(\xi)<y^*<y(1)=\left(\frac{D_1}{d_2k}\right)^{\frac{1}{b_1e^{r_2\tau_0}}}$,使得

$$G(x^*,y^*)=0,y^*=\left[\frac{1}{d_2k}(x^*-(1-D_1)x^{*b_1})\right]^{\frac{1}{b_2e^{r_1\tau_0}}}$$

通过式(14)可得

$$\begin{cases}\dfrac{dG}{dx}=(1-D_2)b_2y^{b_2-1}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{d_1}{k}b_1e^{r_1\tau_0}x^{b_1e^{r_1\tau_0}-1}\\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-(1-D_1)b_1x^{b_1-1}}{d_2kb_2e^{r_2\tau_0}y^{b_2e^{r_2\tau_0}-1}}\end{cases}$$

故

$$\frac{dG}{dx}=\frac{1}{d_2kb_2e^{r_2\tau_0}y^{b_2e^{r_2\tau_0}-1}}\{[(1-D_2)b_2y^{b_2-1}-1](1-(1-D_1)b_1x^{b_1-1})+d_1d_2b_1b_2e^{(r_1+r_2)\tau_0}x^{b_1e^{r_1\tau_0}-1}y^{b_2e^{r_2\tau_0}-1}\}$$

$$\varphi(x,y)=[(1-D_2)b_2y^{b_2-1}-1](1-(1-D_1)b_1x^{b_1-1})+d_1d_2b_1b_2e^{(r_1+r_2)\tau_0}x^{b_1e^{r_1\tau_0}-1}y^{b_2e^{r_2\tau_0}-1}$$

则

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=(1-D_1)b_1(b_1-1)x^{b_1-2}[1-(1-D_2)b_2y^{b_2-1}]+(1-D_2)b_2(b_2-1)y^{b_2-2}\frac{dy}{dx}(1-(1-D_1)b_1x^{b_1-1})+$$

$$d_1d_2b_1b_2e^{(r_1+r_2)\tau_0}\left[(b_1e^{r_1\tau_0}-1)x^{b_1e^{r_1\tau_0}-1}y^{b_2e^{r_2\tau_0}-1}+(b_2e^{r_2\tau_0}-1)x^{b_1e^{r_1\tau_0}-1}y^{b_2e^{r_2\tau_0}-1}\frac{dy}{dx}\right]$$

通过式(13)得到$(1-D_1)x^{b_1}\leqslant 1,(1-D_2)y^{b_2}\leqslant 1$,又因为$0<b_1=e^{-r_1\tau}<1,0<b_2=e^{-r_2\tau}<1$,于是得到$\frac{d\varphi(x)}{dx}<0$,也就是说$\varphi(x)$在$[\xi,\infty)$上是一个减函数.

又因为$\lim_{x\to\xi^+}\varphi(x)=+\infty$,有

$$\varphi(1)=-1+(1-D_1)b_1+(1-D_2)b_2\left(\frac{d_2k}{D_1}\right)^{\frac{1-b_2}{b_2e^{r_2\tau_0}}}-(1-D_1)(1-D_2)\left(\frac{d_2k}{D_1}\right)^{\frac{1-b_2}{b_2e^{r_2\tau_0}}}+$$

$$d_1d_2b_1b_2e^{(r_1+r_2)\tau_0}\left(\frac{d_2k}{D_1}\right)^{\frac{1-b_2}{b_2e^{r_2\tau_0}}}<-1+b_1+b_2+d_1d_2<0$$

于是存在唯一一个点$\xi_1\in(\xi,1)$满足$\varphi(\xi_1)=0$.此外

$$\varphi(x)>0,\forall x\in(\xi,\xi_1);\quad \varphi(x)<0,\forall x\in(\xi_1,+\infty)$$

于是有

$$\frac{dG(x)}{dx}>0,\forall x\in(\xi,\xi_1);\quad \frac{dG(x)}{dx}<0,\forall x\in(\xi_1,+\infty)$$

又因为$G(\xi)>0$,所以当$\forall x\in(\xi,\xi_1)$时,有$G(x)>0$.由$G(\xi_1)>0,G(1)<0$,可以得到存在唯一的$x^*\in(\xi,1)$满足$G(x^*,y^*)=0$.定理 2 的证明结束.

接下来,将证明系统(5)的正不动点(x^*,y^*)是全局稳定的,也就是系统(1)的正周期解是全局渐进稳定的.

定理 3 如果(H_1)和(H_2)成立,对于每一个$(x,y)>(0,0)$,都有$F^n(x)\to(x^*,y^*),n\to\infty$.

证明 对充分小$\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$,作变量$x=u+\varepsilon_1,y=v+\varepsilon_2$,可以得到映射$F(u,v)=(f_1(u,v),f_2(u,v))$,即

$$\begin{cases} u=(1-D_1)(u+\varepsilon_1)^{b_1}+d_2k(v+\varepsilon_2)^{b_2e^{r_2\tau_0}}-\varepsilon_1=f_1(u,v) \\ v=(1-D_2)(v+\varepsilon_2)^{b_2}+\dfrac{d_1}{k}(u+\varepsilon_1)^{b_1e^{r_1\tau_0}}-\varepsilon_2=f_2(u,v) \end{cases} \tag{15}$$

接下来证明 $F(u,v)$ 满足引理 2 的假设条件.很明显,$F(u,v)$ 在 $\mathbf{R}_+^2$ 内连续而且可导,而且 $F(0,0)\neq 0$. 因为

$$DF(u,v)=\begin{pmatrix} (1-D_1)b_1(u+\varepsilon_1)^{b_1-1} & d_2kb_2e^{r_2\tau_0}(v+\varepsilon_2)^{b_2e^{r_2\tau_0}-1} \\ \dfrac{d_1}{k}b_1e^{r_1\tau_0}(u+\varepsilon_1)^{b_1e^{r_1\tau_0}-1} & (1-D_2)b_2(v+\varepsilon_2)^{b_2-1} \end{pmatrix}$$

$$DF(0,0)=\begin{pmatrix} (1-D_1)b_1{\varepsilon_1}^{b_1-1} & \mathrm{d}_2kb_2e^{r_2\tau_0}{\varepsilon_2}^{b_2e^{r_2\tau_0}-1} \\ \dfrac{\mathrm{d}_1}{k}b_1e^{r_1\tau_0}{\varepsilon_1}^{b_1e^{r_1\tau_0}-1} & (1-D_2)b_2{\varepsilon_2}^{b_2-1} \end{pmatrix}$$

所以 $\lim\limits_{(u,v)\to(0^+,0^+)}F(u,v)=DF(0,0)$.显然,当 $(u,v)>0$ 时,有 $DF(u,v)>0$;当 $(0,0)<(u_1,v_1)<(u_2,v_2)$ 时,有 $DF(u_1,v_1)>DF(u_2,v_2)$,因此满足引理 2 的所有假设条件.那么对每一个 $u>0,v>0$,有 $F^n(u,v)\to(x^*-\varepsilon_1,y^*-\varepsilon_2)$,$n\to\infty$.相应于 x-y 坐标平面,这表明对任意的 $x>\varepsilon_1,y>\varepsilon_2$,系统(12)的解趋于唯一的正不动点 (x^*,y^*).

对于任意的初值 $(x_0,y_0)>(0,0)$,有 $x_n>\varepsilon_1,y_n>\varepsilon_2,n\to\infty$.因此,对于任意的 $x_0>0,y_0>0$,系统(5)的所有解都趋于正不动点 (x^*,y^*).

参考文献:

[1] WANG L M,LIU Z J,J H.Impulsive Diffusion In Single Species Model[J].Chaos,Solitons and Fractals,2007(33):1213-1219

[2] WAN H Y,ZHANG L,LI H L.A Single Species Model with Symmetric Bidirectional Impulsive Diffusion and Dispersal Delay[J].Applied Mathematics,2012(3):1079-1088

[3] JIAO J J,YANG X S,CAI S H.Dynamical Analysis of a Delayed Predator-prey Model with Impulsive Diffusion Between Two Patches[J].Mathematics and computers in simulation,2009(80):522-532

[4] JIA J W,LI C H.A Predator-prey Gompertz Model with Time Delay and Impulsive Perturbations On the Prey[J].Discrete Dynamical in Nature and Society,2009(2009):15-19

[5] AMITH H L.Cooperative System of Differential Equations with Concave Nonlinearities[J].Nonlinear Anal TMA,1986(10):1037-1052

Research on a Single Species Model with Impulsive Diffusion and Dispersal Delay

HUANG Ling-zhi

(School of Mathematical Sciences,Chongqing Normal University,Chongqing 401331,China)

Abstract: This paper researches a single species model in logarithmic growth with impulsive diffusion and dispersal delay.Using the comparison theorem of impulsive differential equation and the discrete dynamical system, the permanent sufficient conditions of the system is obtained,and the system has a global stability positive periodic solution.

Key words: impulsive diffusion; dispersal delay; permanent; global stability