

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0008.006

## 忆阻混沌系统的同步\*

陈福利

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

**摘要:**忆阻器之所以引起了人们的大量关注,是因为它具有其一些特殊的特点,在普通的混沌系统中代替蔡氏二极管通过用忆阻器,因之得到了一个忆阻混沌系统;研究了忆阻混沌系统的同步,通过用 Lyapunov 稳定性理论,并设计一个脉冲控制器来实现忆阻混沌系统在不同的条件下的同步,从理论分析上说明了结果的有效性。

**关键词:**忆阻器;混沌系统;同步

**中图分类号:**O157.2      **文献标识码:**A      **文章编号:**1672-058X(2015)08-0024-04

蔡少棠教授<sup>[1]</sup>在 1971 年第一次提出了“忆阻器”的观点,它被当做是电感、电阻、电容除外的又一个基本电路元件,当电荷流过忆阻器两端时,忆阻器可以记住当前的电荷量,又因为这样,所以忆阻器又被称之为“记忆电阻”。忆阻器是一个非线性的且是无源的元件,显示了许多特别的性质<sup>[2]</sup>,辅助研究人员用忆阻器解释了纳米系统中的几种现象,例如:在自旋电子元件和热敏电阻中,研究人员在 HP 实验室中把忆阻器用在—个大的密度存储空间里,成功的构造了一个简单的数据存储装置。忆阻器非常容易发生混沌振荡信号,于是,大量研究人员通过采用忆阻器,创建了忆阻混沌系统<sup>[3-5]</sup>。Itoh 和蔡少棠<sup>[3]</sup>引进了一个拥有分段线性严格增加的弧线忆阻模型,取代了线性振荡器中的蔡氏晶体二极管,得到了一个含有忆阻器的混沌系统,并对它的动力学特性进行了分析。其后 Muthuswamy 选用一个分段不连续的线性忆阻器导函数,替换了蔡氏二极管,形成了一个崭新的忆阻混沌系统<sup>[3]</sup>,忆阻器从出现开始,它的使用范围<sup>[6]</sup>和应用条件<sup>[7]</sup>吸引了研究者的注意。

近年来,Strukov 等人<sup>[5,8]</sup>发明了一些具有记忆特点的元件之后,忆阻器应用在混沌系统中非常广泛:可用于电路的设计或对生物的记忆特点进行实验等,文献[3,4]采用的忆阻器造成了忆阻或忆导都是间断的非线性函数,是因为忆阻器的特点是不光滑的间断段线性函数,并且只是简单地分析了所提出混沌电路的动力学特点,在此基础上,利用混沌动力学特征和以往研究过的理论分析方法,现将对其进一步研究忆阻混沌电路的同步问题。

### 1 模型建立

在 2008 年,Itoh 和蔡少棠提出了一个用忆阻器代替了蔡氏二极管,导推出了一个四阶忆阻混沌电路,如图 1 所示。

收稿日期:2014-10-28;修回日期:2014-12-04.

\* 基金项目:重庆市教委科研资助项目(KJ130606).

作者简介:陈福利(1990-),女,重庆忠县人,硕士研究生,从事微分方程与动力系统研究.

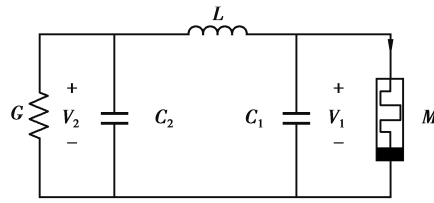


图 1 四阶忆阻混沌电路

利用这个电路导出了忆阻混沌电路的方程:

$$\begin{cases} \dot{V}_1(t) = \frac{1}{C_1}(i(t) - W(\varphi(t))V_1(t)) \\ \dot{i}(t) = \frac{1}{L}(V_2(t) - V_1(t)) \\ \dot{V}_2(t) = \frac{1}{C_2}(GV_2(t) - i(t)) \\ \dot{\varphi}(t) = V_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

令  $x_1(t) = V_1(t)$ ,  $x_2(t) = i(t)$ ,  $x_3(t) = V_2(t)$ ,  $x_4(t) = \varphi(t)$ ,  $G = 1$ , 以及定义忆导函数:  $W(\varphi) = -a + 3b\varphi^2$  其中 ( $a > 0, b > 0, \varphi$  是忆阻元件的状态变量), 式(1)的状态方程可改写成无量纲的状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{C_1}(x_2(t) - W(x_4(t))x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{L}(x_3(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{C_2}(x_3(t) - x_2(t)) \\ \dot{x}_4(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (2)$$

图 1 的所示的忆阻混沌电路系统是一个四维系统, 它的动力学特性由式(2)描述。

## 2 忆阻混沌系统同步的理论分析

让系统(2)作为主系统, 相应的可以做出响应系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \frac{1}{C_1}(y_2(t) - W(y_4(t))y_1(t)) + u_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = \frac{1}{L}(y_3(t) - y_1(t)) + u_2(t) \\ \dot{y}_3(t) = \frac{1}{C_2}(y_3(t) - y_2(t)) + u_3(t) \\ \dot{y}_4(t) = y_1(t) + u_4 \end{cases} \quad (3)$$

令  $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为系统(2)与系统(3)同步误差. 为了实现系统(2)和系统(3)的同步, 定义控制器  $u_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 如下:

$$\begin{cases} u_1(t) = k_1 e_1(t) + \frac{1}{C_1} (3by_4^2(t) \cdot y_1(t) - 3bx_4^2(t) \cdot x_1(t)) \\ u_2(t) = k_2 e_2(t) \\ u_3(t) = k_3 e_3(t) \\ u_4(t) = k_4 e_4(t) \end{cases} \quad (4)$$

系统(2)与系统(3)的同步误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = \frac{1}{C_1} (e_2(t) - ae_1(t)) + k_1 e_1(t) \\ \dot{e}_2(t) = \frac{1}{L} (e_3(t) - e_1(t)) + k_2 e_1(t) \\ \dot{e}_3(t) = \frac{1}{C_2} (e_3(t) - e_2(t)) + k_3 e_3(t) \\ \dot{e}_4(t) = e_1(t) + k_4 e_4(t) \end{cases} \quad (5)$$

最后,给出结果。

**定理 1** 假定存在常数  $k_i > 0 (i=1,2,3,4)$ ,使得

$$P = \begin{pmatrix} k_1 - \frac{a}{C_1} & \frac{1}{2C_1} - \frac{1}{2L} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2C_1} - \frac{1}{2L} & k_2 & \frac{1}{2L} - \frac{1}{2C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2L} - \frac{1}{2C_2} & k_3 + \frac{1}{C_2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix} \leq 0$$

则同步误差系统(5)渐进收敛于零,并且系统(2)和系统(3)达到完全同步。

**证明** 构造一个 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{4} (e_1^2(t) + e_2^2(t) + e_3^2(t) + e_4^2(t)) \quad (6)$$

对式(6)求导:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \left( e_1(t) \left( \frac{1}{C_1} (e_2(t) - ae_1(t)) + k_1 e_1(t) \right) + e_2(t) \left( \frac{1}{L} (e_3(t) - e_1(t)) + k_2 e_1(t) \right) \right) + \\ &\frac{1}{2} \left( e_3(t) \left( \frac{1}{C_2} (e_3(t) - e_2(t)) + k_3 e_3(t) \right) + e_4(t) (e_1(t) + k_4 e_4(t)) \right) = \\ &\frac{1}{2} \left( \left( k_1 - \frac{a}{C_1} \right) e_1^2(t) + k_2 e_2^2(t) + \left( k_3 + \frac{1}{C_2} \right) e_3^2(t) + k_4 e_4^2(t) + \right. \\ &\left. \left( \frac{1}{C_1} - \frac{1}{L} \right) e_1(t) e_2(t) + \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{C_2} \right) e_2(t) e_3(t) + e_1(t) e_4(t) \right) = \\ &\frac{1}{2} e^T(t) P e(t) \leq 0 \end{aligned}$$

其中  $e(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t))^T$ , 并且  $P =$

$$\begin{pmatrix} k_1 - \frac{a}{C_1} & \frac{1}{2C_1} - \frac{1}{2L} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2C_1} - \frac{1}{2L} & k_2 & \frac{1}{2L} - \frac{1}{2C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2L} - \frac{1}{2C_2} & k_3 + \frac{1}{C_2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}$$

由  $\dot{V}(t) \leq 0$ , 根据 Lyapunov 稳定性理论, 可知系统(2)和(3)达到同步。

例如:选择主系统和响应系统的初始条件分别为:  $(-0.001, 0.01, 0, -0.0001), (0, 0.001, 0.0001, 0)$ , 取主系统的参数  $a = 1.2, C_1 = 12, C_2 = 7, \frac{1}{L} = \frac{1}{13}$ , 控制器的参数为:  $k_1 = 7.2, k_2 = -5, k_3 = 4.6, k_4 = 1.5$ , 由定理 1 通过数值模拟可知误差系统渐进趋于零, 从而主系统与响应系统达到同步。

### 3 结束语

通过引进一个四阶忆阻混沌电路系统, 在以往研究系统稳定的基础上, 设计了一个控制器, 使误差系统渐进收敛于零, 从而主系统与响应系统达到同步。

#### 参考文献:

- [1] CHUA L. Memristor-the Missing Circuit Element[J]. IEEE Trans on Circuit Theory, 1971, 18(5): 507-519
- [2] CHUA L. KANG S. Memristive Devices and Systems [J]. Proceeding of the IEEE, 1976, 64(2): 209-223
- [3] ITOH M, CHUA L. Memristor Oscillators[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2008, 18(11): 3183-3206
- [4] MUTHUSWAMY B. Memristor Based Chaotic Circuits[J]. IETE Technical Review, 2009, 26(6): 415-426
- [5] SNIDER G, STRUKOV D, WILLIAMS R. The Missing Memristor Found [J]. Nature, 2008, 453: 80-83
- [6] SCHROEDER R. Memristor Mechanics[J]. IEEE Spectrum, 2009, 46(2): 8
- [7] CHEN G. Leon Chua's Memristor[J]. IEEE T Circuits Syst Mag, 2008, 8(2): 55
- [8] WILLIAMS S. How We Found the Missing memristor[J]. IEEE Spectrum, 2008, 45(12): 24-31

## Synchronization of the Memristor-based Chaotic System

CHEN Fu-li

(School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** Memristor draws people's lots of attention, because it has some special features. A memristor chaotic system is obtained by substituting memristor for Chua's Diode in normal chaotic system. This paper focuses on the synchronization of the memristor-based chaotic system. A pulse controller is designed to realize the synchronization under different conditions, and theoretical analysis proves the effectiveness.

**Key words:** memristor; chaotic system; synchronization