doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0008.003

时变脉冲耦合神经网络的稳定性分析*

彭　薇

(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 404100)

摘　要:讨论了时变脉冲耦合神经网络的稳定性问题,时变脉冲的一个重要特征是不稳定脉冲和稳定脉冲在模型中同时存在;通过控制时变脉冲强度,可以分析时变脉冲耦合神经网络的稳定性,得到满足时变脉冲耦合神经网络全局指数稳定的几个条件;最后,举例表明理论结果的有效性.

关键词:耦合神经网络;时变脉冲;指数稳定

中图分类号:O231　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)08-0009-05

在过去的几年里,人们讨论了许多神经网络模型,比如 Cohen-Grossberg 神经网络、Hopfield 神经网络、和细胞神经网络[1,2].到目前为止,已经研究了许多有效的控制方法,如状态反馈控制,间歇控制,自适应控制[3-5].一般来说,有两种脉冲动力系统,脉冲序列稳定和脉冲序列不稳定.许多文献[6-11]都讨论了稳定神经网络的稳定脉冲和不稳定脉冲,大多数文献是假定不稳定脉冲和稳定脉冲单独发生,但在实践中,不稳定脉冲和稳定脉冲同时存在实际系统中.

1　预备知识

考虑耦合神经网络系统:

$$\begin{aligned}\dot{u}_i(t)=&-\boldsymbol{D}u_i(t)+\boldsymbol{A}f(u_i(t))+\boldsymbol{B}f(u_i(t-\tau(t)))+\boldsymbol{C}\int_{t-\tau(t)}^{t}f(u_i(s))\mathrm{d}s+\\&I(t)+g_i(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_N(t)),i=1,2,\cdots,N\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\mathrm{u_i(t)}=(\mathrm{u_{i,1}},\mathrm{u_{i,2}},\cdots,\mathrm{u_{i,n}})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 是状态变量,$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\cdots,\mathrm{d}_n)$ 表示反馈矩阵,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$是权重矩阵,$f(u_i(t))=(f_1(u_{i,1}(t)),f_2(u_{i,2}(t)),\cdots,f_n(u_{i,n}(t)))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 是激活函数,$I(t)$表示在 t 处的外部输出的向量函数,$g_i:R^m\to R^n$ 是非线性耦合函数,$\tau(t)$是时变延迟.假设耦合神经网络式(1)与没有孤立的集合连接,那么耦合函数 $g_i(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_N(t))$不可约.

若 $x_i=u_i-u^*$,其中 u^* 是式(1)的平衡点,可得到:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)=&-\boldsymbol{D}x_i(t)+\boldsymbol{A}\tilde{f}(x_i(t))+\boldsymbol{B}\tilde{f}(x_i(t-\tau(t)))+\boldsymbol{C}\int_{t-\tau(t)}^{t}\tilde{f}(x_i(s))\mathrm{d}s\\&+\tilde{g}_i(u^*(t),u_1(t),\cdots,u_N(t)),i=1,2,\cdots,N\end{aligned}\tag{2}$$

其中

收稿日期:2014-10-07;**修回日期**:2014-12-15.

* **基金项目**:重庆市教委科研资助项目(KJ130606).

作者简介:彭薇(1990-),女,湖北恩施人,硕士研究生,从事脉冲控制研究.

$$\tilde{f}(x_i(t))=f(u_i(t))-f(u^*(t))$$

$$\tilde{g}_i(u^*(t),u_1(t),\cdots,u_N(t))=g_i(u_1(t),\cdots,u_N(t))-g_i(u^*(t),\cdots,u^*(t))$$

假设 1 存在正常数 L_f,使

$$\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\leqslant\|L_f(x-y)\|$$

其中 $x,y\in\mathbf{R}^n$,且 $x\neq y$.

假设 2 存在正定矩阵 $\boldsymbol{M}_{ij}(i,j=1,2,\cdots,N)$,使

$$\|\tilde{g}_i(u^*(t),u_1(t),\cdots,u_N(t))\|\leqslant\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{M}_{ij}\|x_j(t)\|$$

现讨论时变脉冲耦合神经网络:

$$\begin{cases}x\dot{u}_i(t)=-\boldsymbol{D}x_i(t)+\boldsymbol{A}\tilde{f}(x_i(t))+\boldsymbol{B}\tilde{f}(x_i(t-\tau(t)))+\\ \qquad\boldsymbol{C}\int_{t-\tau(t)}^{t}\tilde{f}(x_i(s))\,\mathrm{d}s+\tilde{g}_i(u^*(t),u_1(t),\cdots,u_N(t)),t\neq t_k,i=1,2,\cdots,N\\ x_i(t_k^+)=\alpha_k x_i(t_k^-)\qquad k\in\mathbf{N}^+\end{cases}\tag{3}$$

其中$\{t_1,t_2,\cdots\}$是严格递增脉冲点序列.假定 $x(t)$在 $t=t_k$ 时刻是右连续,即,$x_i(t_k^+)=\alpha_k x_i(t_k^-)$.因此,式(3)是一个右连续分段函数且在 $t=t_k(k\in\mathbf{N}^+)$处不连续.

注 1 α_k 表示在 $x_i(t_k^+)=\alpha_k x_i(t_k^-)$处的脉冲影响强度.当脉冲强度$|\alpha_k|>1$时,绝对值增加.那么脉冲为不稳定脉冲.当脉冲强度$|\alpha_k|<1$时,绝对值减小,那么脉冲为稳定脉冲.现把不稳定脉冲和稳定脉冲都考虑进去了.假设不稳定脉冲强度的脉冲值取自于有限集$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N\}$,稳定脉冲强度的脉冲值取自于有限集$\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_M\}$,其中$|\mu_i|>1,0<|\nu_j|<1(i=1,2,\cdots,N,j=1,2,\cdots,M)$.假设 $t_{ik\uparrow}$ 是不稳定脉冲的脉冲强度 μ_i 的激活时间,$t_{jk\downarrow}$ 是稳定脉冲的脉冲强度 ν_i 的激活时间.

假设 3 $\inf\{t_{ik\uparrow}-t_{i(k-1)\uparrow}\}=\xi_i,\max\{t_{jk\downarrow}-t_{j(k-1)\downarrow}\}=\zeta_i$,其中 $t_{ik\uparrow},t_{jk\downarrow}\in\{t_1,t_2,\cdots\}$.

定义 1 如果存在 $M>0,\alpha>0,T_0>0$,使

$$\sum_{i=1}^{N}\|x_i(t)\|^2\leqslant\boldsymbol{M}e^{-\alpha t},t\geqslant T_0$$

那么式(3)是指数稳定.

引理 1 令 $x,y\in\mathbf{R}^n$,有 $x^{\mathrm{T}}y+xy^{\mathrm{T}}\leqslant\varepsilon x^{\mathrm{T}}x+\varepsilon^{-1}y^{\mathrm{T}}y$.

引理 2 令 $0<P\in\mathbf{R}^{m\times m},0<r(t)<r,V:[0,r]\to R^m$,则

$$r(t)\int_0^{r(t)}V^{\mathrm{T}}(s)PV(s)\,\mathrm{d}s\geqslant\left(\int_0^{r(t)}V(s)\,\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}P\left(\int_0^{r(t)}V(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

引理 3 假设 $0\leqslant\tau_i(t)\leqslant\tau,F(t,u_1,u_2,\cdots,u_m):R^+\times R\times R\times\cdots\times R\to R$ 在 u_i 处非减,$I_k(u):R\to R$ 在 u 处非减.若

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}^+u(t)\leqslant F(t,u,u(t-\tau_1(t)),\cdots,u_m(t-\tau_m(t)))\\ u(t_k^+)\leqslant I_k u(t_k^-),\qquad k\in\mathbf{N}^+\end{cases}$$

且

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}^+v(t)\leqslant F(t,v,v(t-\tau_1(t)),\cdots,v_m(t-\tau_m(t)))\\ v(t_k^+)\leqslant I_k v(t_k^-),\qquad k\in\mathbf{N}^+\end{cases}$$

那么 $u(t)\leqslant v(t)$.

2 主要结论

定理 1 若假设 1,2,3 成立,那么式(3)全球指数稳定,如果存在

$$p=\lambda_{\max}(-2\boldsymbol{D}+a\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+a^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f+c^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f)$$

$$q=\lambda_{\max}(b^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f-c^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f+M),\alpha=-\left(p+\sum_{i=1}^{N}\frac{2\ln|\mu_i|}{\xi_i}+\sum_{j=1}^{\boldsymbol{M}}\frac{2\ln|\nu_j|}{\zeta_j}\right),R=\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{\boldsymbol{M}}\left|\frac{\mu_i}{\nu_j}\right|^2$$

其中 a,b,c 是正常数,使 $\alpha-Rq>0$ 成立.

证明　构造李雅普诺夫函数

$$V(t)=x^{\mathrm{T}}(t)x(t)=\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t)x_i(t)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}^+V(t)=&\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t)(-2\boldsymbol{D})x_i(t)+\sum_{i=1}^{N}2x_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\tilde{f}(x_i(t))+\sum_{i=1}^{N}2x_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\tilde{f}(x_i(t-\tau(t))+\\&\sum_{i=1}^{N}2x_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}\int_{t-\tau(t)}^{t}\tilde{f}(x_i(s)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{N}2x_i^{\mathrm{T}}(t)\tilde{g}_i(u^*(t),u_1(t),\cdots,u_N(t)\leqslant\\&\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t)(-2\boldsymbol{D})x_i(t)+\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t)(a\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+a^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f)x_i(t)+\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t)(b\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})x_i(t)+\\&\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))(b^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f)x_i(t-\tau(t))+\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(c\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})x_i+\\&\sum_{i=1}^{N}c^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f\left(\int_{t-\tau(t)}^{t}x_i(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\left(\int_{t-\tau(t)}^{t}x_i(s)\mathrm{d}s\right)+\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t)\sum_{j=1}^{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{M}_{ij}x_j(t)\leqslant\\&\lambda_{\max}(-2\boldsymbol{D}+a\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+a^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f+b\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+c^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f)V(t)+\\&\lambda_{\max}(b^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f+c^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f+M)V(t-\tau(t))\end{aligned}$$

则有

$$\boldsymbol{D}^+V(t)=pV(t)+qV(t-\tau(t)),t\in(t_{k-1},t_k],k\in\mathbf{N}^+\tag{4}$$

令 $t=t_k$,由式(3),有

$$V(t_k^+)=\alpha_k^2V(t_k^-)\tag{5}$$

令 $\varepsilon>0$,设 $w(t)$ 是如下脉冲时滞系统的唯一解

$$\begin{cases}\dot{w}(t)=pw(t)+qw(t-\tau(t))+\varepsilon & t\neq t_k,\\ w(t_k)=\alpha_k^2w(t_k^-) & t=t_k,k\in\mathbf{N}^+\\ w(s)=|\varphi(s)|^2 & -\tau\leqslant s\leqslant 0\end{cases}\tag{6}$$

注 $V(s)\leqslant|\varphi(s)|^2=w(s)(-\tau\leqslant s\leqslant 0)$,由式(4)、(5)和引理 3,有

$$w(t)\geqslant V(t)\geqslant 0,t\geqslant 0$$

由式(6),有

$$w(t)=W(t,0)w(0)+\int_0^t W(t,s)[qw(s-\tau(s))+\varepsilon]\mathrm{d}s\tag{7}$$

其中 $W(t,s)(t,s\geqslant 0)$ 是下述线性系统的柯西矩阵

$$\begin{cases}y(t)=py(t), & t\neq t_k\\ y(t_k)=\alpha_k^2w(t_k^-), & t=t_k,k\in\mathbf{N}^+\end{cases}$$

根据柯西矩阵的定义,有

$$W(t,s)=e^{p(t-s)}\prod_{s<t_k<1}\alpha_k^2\tag{8}$$

若存在 s 使得在处有不稳定脉冲 N_i 和稳定脉冲 N_j,由假设 3,可以得到 $N_i\leqslant\dfrac{t-s}{\xi_i}+1$,$N_j\leqslant\dfrac{t-s}{\zeta_i}-1$,那么由假设 3 和式(8),有

$$W(t,s)\leqslant e^{p(t-s)}\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{\boldsymbol{M}}|\mu_i|^{2\frac{t-s}{\xi_i}+2}|\nu_j|^{2\frac{t-s}{\zeta_j}-2}=$$

$$\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M}|\mu_i|^2|\nu_j|^{-2}e^{(p+2\sum_{i=1}^{N}\frac{\ln|\mu_i|}{\xi_i}+2\sum_{j=1}^{M}\frac{\ln|\nu_j|}{\zeta_j})(t-s)}= Re^{-\alpha(t-s)} \tag{9}$$

若 $\eta=R\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}|\varphi(s)|^2$,由式(7)、(9),有

$$w(t)\leqslant \eta e^{-\alpha t}+\int_0^t \mathrm{Re}^{-\alpha(t-s)}[qw(s-\tau(s))+\varepsilon]\mathrm{d}s \tag{10}$$

若 $h(w)=w-\alpha+Rqe^{w\tau}$.由 $\alpha-Rq>0$,有 $h(0)=-\alpha+Rq<0$.因为 $\lim_{w\to+\infty}h(w)=+\infty$ 且 $h(w)>0$,存在 $\lambda>0$ 使 $h(\lambda)=\lambda-\alpha+Rqe^{\lambda\tau}=0$.显然 $R^{-1}\alpha-q>0$.那么有

$$w(t)=|\varphi(t)|^2\leqslant\eta\leqslant\eta e^{-\lambda t}+\frac{\varepsilon}{R^{-1}\alpha-q},\ -\tau\leqslant t\leqslant 0 \tag{11}$$

$$w(t)<\eta e^{-\lambda t}+\frac{\varepsilon}{R^{-1}\alpha-q} \tag{12}$$

相反,存在 $t^*>0$ 使

$$w(t^*)\geqslant\eta e^{-\lambda t}+\frac{\varepsilon}{R^{-1}\alpha-q} \tag{13}$$

那么

$$w(t)<\eta e^{-\lambda t}+\frac{\varepsilon}{R^{-1}\alpha-q}$$

由式(10)、(11),得到

$$w(t^*)\leqslant\eta e^{-\alpha t^*}+\int_0^{t^*}\mathrm{Re}^{-\alpha(t^*-s)}[qw(s-\tau(s))+\varepsilon]\mathrm{d}s\leqslant$$

$$e^{-\alpha t^*}\{\eta+\frac{\varepsilon}{R^{-1}\alpha+q}+\int_0^{t^*}\mathrm{Re}^{-\alpha s}[q(\eta e^{-\lambda(s-\tau(s))}+\frac{\varepsilon}{R^{-1}\alpha-q})+\varepsilon]\mathrm{d}s\}<$$

$$\eta e^{-\lambda t^*}+\frac{\varepsilon}{R^{-1}\alpha-q}$$

因此式(12)成立.若 $\varepsilon\to 0$,由 $w(t)\geqslant V(t)\geqslant 0$,有

$$V(t)\leqslant w(t)\leqslant\eta e^{-\lambda t}$$

根据定义 1,式(3)是指数稳定的.

为了明显的说明不稳定脉冲和稳定脉冲的影响,假设脉冲值不变.即,$\mu_i=\mu,\nu_j=\nu,\xi_i=\xi,\zeta_j=\zeta,t_{ik\uparrow}=t_{k\uparrow}$,$t_{jk\downarrow}=t_{k\downarrow}(i=1,2,\cdots,N,j=1,2,\cdots,M)$.可以得到下面推论.

推论 1 若假设 1,2,3 成立,那么式(3)全球指数稳定,如果存在

$$p=\lambda_{\max}(-2\boldsymbol{D}+a\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+a^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f+c^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f)$$

$$q=\lambda_{\max}(b^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f-c^{-1}L_f^{\mathrm{T}}L_f+M),\alpha=-(p+\frac{2\ln|\mu|}{\xi}+\frac{2\ln|\nu|}{\zeta}),R=\left|\frac{\mu}{\nu}\right|^2$$

其中是正常数,使成立.

证明 类似于定理 1,因此省略.

3 举 例

若

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.2&-0.5\\-0.1&0.3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-0.1&-0.2\\-0.1&-0.3\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-0.2&-0.1\\-0.5&-0.3\end{pmatrix},a=b=c=1,$$

$$\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}\{1,1\}$$

通过简单的计算,得到 $p=-1.8394$,$q=1$.假设 $\mu=-1.2$,$\nu=-0.9$,$\xi=0.5$.根据推论 1 得,如果稳定脉冲序列 $\zeta\leqslant 0.3156$ 那么式(3)稳定.

4 结　论

在实际模型中,往往不稳定脉冲和稳定脉冲同时存在,而在许多文献中都隐性的假设了不稳定脉冲和稳定脉冲单独发生.研究了时变脉冲耦合神经网络的稳定性问题,通过控制时变脉冲强度,得到满足稳定的条件,运用例子说明了定理结果.

参考文献:

[1] GUPTA M M,JIN L,HOMMA N.Static and Dynamic Neural Networks[M].New York,Wiley-Interscience,NY,2003

[2] CAO J D,LI L L.Cluster Synchronization in an Array of Hybrid Coupled Neural Networks with Delay[J].Neural Networks,2009,22(4):335-342

[3] WU H, GUO Q. Exponential Stability of a Genetic Network Under Mixed Impulsive Control[J]. Journal of Computational Information Systems,2012 (8):9561-9567

[4] YANG X,CAO J.Stochastic Synchronization of Coupled Neural Networks with Intermittent Control[J].Phys Lett A,2009(373):3259-3272

[5] WU H Q,GUO X Q,DING S B.Exponential Synchronization for Switched Coupled Neural Networks via Intermittent Control[J].Journal of Computational Information Systems,2013(9):3503-3510

[6] LI J,HO D,CAO J.A Unified Synchronization Criterion for Impulsive Dynamical Networks[J].Automatica,2010(46):1215-1221

[7] ZHANG H,GUAN Z,HO D.On Synchronization of Hybrid Switching and Impulsive Networks[J].2006 45th IEEE Conference on Decision and Control IEEE,2006:2765-2770

[8] ZHANG W B,TANG Y,FANG J A.Stability of Delayed Neural Networks with Time-varying Impulses[J].Neural Networks,2012(36):56-63

[9] QI J T,LI C D,HUANG T W.Stability of Delayed Memristive Neural Networks with Time-varying Impulses[J].Cogn Neurodyn,2014(8):429-436

[10] SONG Q K,ZHAO Z J.Cluster Local and Complete Synchronization in Coupled Neural Networks with Mixed Delays and Nonlinear Coupling[J].Neural Comput Appl,2014(24):1101-1113

[11] WANG G,SHEN Y.Exponential Synchronization of Coupled Memristive Neural Networks with Time Delays[J].Neural Comput Appl,2014(24):1421-1430

The Stability Analysis of Time-variant Impulse Coupled Neural Networks

PENG Wei

(School of Mathematics Science,Chongqing Normal University,Chongqing 404100,China)

Abstract: This paper dissusses the stability of time-variant impulse coupled neural networks. The main feature of time-variant impulse is the coexistance of unstable impulse and stable impulse in model.The stability of time-variant impulse coupled neural networks can be analyzed by controlling the intense of time-variant impulse. Several conditions for globle exponential stability of time-variant impulse coupled neural networks are obtained. Finally,an example is given to prove the effectiveness of the theory.

Key words: coupled neural networks; time-variant impulse; exponential stability