第 32 卷第 7 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2015 年 7 月
Vol. 32　NO.7　　J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed)　　Jul.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.0016

基于行(列)展开的行列式性质证明

赵伟舟, 杨　萍

(第二炮兵工程大学理学院 数学与军事运筹教研室,西安 710025)

摘　要:多数“线性代数”教材都是从排列的概念和性质引入行列式,按照这一顺序组织教学,教员需大量时间讨论排列的相关知识,学员容易忽视行列式计算的重要性.针对行列式教学中的常见问题,从展开角度讨论了行列式有关性质的证明,并分析了教学实施的具体效果.

关键词:线性代数;行列式;展开;性质

中图分类号:O151.2　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)07-0064-04

行列式在大学数学教学和应用中不是很多,即使在“线性代数”的后续章节中也只是在求逆阵和特征值中有所应用.但是多数教材[1-4]的编写均从排列的逆序数和对换开始,从二阶、三阶行列式推广到 n 阶行列式.行列式作为数表的一种复杂运算,具有特殊的抽象性和不易板书等特点.从教的方面看,严格按照教材编写顺序进行讲授,需要耗费较多学时研究排列、对换等概念,从学的方面看,学员将精力投入到排列的逆序和对换性质上,容易忽略行列式计算的重要性,而且不易把握章节主线.如果从行列式的展开给出其定义,获得运算性质,最后给出在线性方程组中的应用,学员容易从定义——性质——应用把握教学主线,更重要地是能节省时间补充其他例如高阶行列式的计算技巧等知识.以此顺序组织行列式教学,主要问题在于有关性质的证明.曾有文献从归纳角度给出了部分证明[5],但从展开角度可以更为简单地证明行列式的主要性质.

1　基本概念

首先给出一些预备性的概念,形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.n 阶行列式实质是数表的一种复杂运算,其中 $|\cdot|$ 为运算符.在 n 阶行列式中,把 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};而把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式,并记作 A_{ij}.

行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

从上面可以看出,n 阶行列式可以通过逐步降阶至二阶行列式获得运算结果,根据这一定义,可以证明

收稿日期:2014-09-18;**修回日期**:2014-11-17.

作者简介:赵伟舟(1977-),男,陕西长安人,讲师,硕士,从事数学教育研究、信息分析与处理研究.

以下重要性质.

2　性质的证明

行列式的性质较多,可以分为两大类:运算规则类和特殊求解类.在运算规则方面,主要是“转置倍加值不变、交换两行(列)要变号、行(列)公因子可提”,在特殊求解方面,主要是“零行(列)等于零、成比例等于零”.下面仅针对重要性质,从展开角度进行证明.

性质 1　如果行列式中有一行(列)元素全为 0,则该行列式等于 0.

证明　由定义,直接取 0 行展开,则易得该行列式等于 0.

性质 2　如果行列式中有一行(列)上元素有公因子,则公因子可以提出.

证明　不妨记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按照定义,对 D'按照第 i 行展开,即 $D'=ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}$,其中 $A_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$是元素 ka_{ij}在行列式 D'中的代数余子式,不难发现元素 a_{ij}在行列式 D 中的代数余子式与元素 ka_{ij}在行列式 D'中的代数余子式相同.因此,$D'=k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})=kD$.

性质 3　行列式转置值不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明　为简单起见,不妨记转置前后的行列式分别为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(数学归纳法)对二阶行列式和三阶行列式,不难验证是成立的.

假设 $n-1$ 阶行列式成立,即 $D_{n-1}=D_{n-1}^{\mathrm{T}}$,下面考察 D_n.

对 D_n 在第 i 行展开,得 $D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$,而对 D_n^{T} 在第 i 列展开,$D_n^{\mathrm{T}}=a_{i1}A'_{i1}+a_{i2}A'_{i2}+\cdots+a_{in}A'_{in}$,注意到 A'_{ik}是 A_{ik}的转置行列式($k=1,2,\cdots,n$),且阶数为 $n-1$.

由假设有 $A'_{ik}=A_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$,从而有 $D_n=D_n^{\mathrm{T}}$.

性质 4　交换行列式的两行(列),行列式变号.

证明　① 首先考察交换相邻两行第 i 行和第 $i+1$ 行的情形.不妨记交换前后的行列式分别为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对 D'按照第 $i+1$ 行展开,得 $D'=a_{i1}A_{i+1,1}+a_{i2}A_{i+1,2}+\cdots+a_{in}A_{i+1,n}$.其中,

$$A_{i+1,k}=(-1)^{i+1+k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i+2,1} & a_{i+2,2} & \cdots & a_{i+2,k-1} & a_{i+2,k+1} & \cdots & a_{i+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(k=1,2,\cdots,n)$$

对 D 按第 i 行展开,得 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$,这里

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i+2,1} & a_{i+2,2} & \cdots & a_{i+2,k-1} & a_{i+2,k+1} & \cdots & a_{i+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(k=1,2,\cdots,n)$$

显然,$A_{i+1,k}=-A_{i,k}(k=1,2,\cdots,n)$,代入 $D'=a_{i1}A_{i+1,1}+a_{i2}A_{i+1,2}+\cdots+a_{in}A_{i+1,n}$,得

$$D'=-a_{i1}A_{i,1}-a_{i2}A_{i,2}-\cdots-a_{in}A_{i,n}=-(a_{i1}A_{i,1}+a_{i2}A_{i,2}+\cdots+a_{in}A_{i,n})=-D$$

② 下面考察交换不相邻的第 i 行和第 j 行的情形(不妨设 $i<j$).显然,交换第 i 行和第 j 行可通过相邻交换实现.首先将 D' 中第 i 行换至第 $j-1$ 行,需要相邻交换 $j-i-1$ 次,再将第 $j-1$ 行和第 j 行互换一次,最后将第 $j-1$ 行依次换至第 i 行,同样需要进行 $j-i-1$ 次相邻交换,从而共进行了 $2(j-i-1)+1$ 次相邻交换即可获得 D,有 $D'=(-1)^{2(j-i-1)+1}D=-D$.

综上①②可得 $D'=-D$.

性质 5 行列式中某行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于 0.

证明 不妨记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然,$D=a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}$,并记为 $f(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn})$.

考察 $f(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$,一方面 $f(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$,另一方面由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

得 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$.

性质 6　把行列式中某行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

证明　不妨记原行列式和倍加后的行列式分别为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然

$$\begin{aligned} D' &= (a_{j1}+ka_{i1})A_{j1}+(a_{j2}+ka_{i2})A_{j2}+\cdots+(a_{jn}+ka_{in})A_{jn}= \\ &a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}+k(a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn})= \\ &D+k(a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}) \end{aligned}$$

据性质 5,易得 $D'=D$.

3　结　论

在讲授“线性代数”课程的行列式时,从展开角度分析二阶行列式和三阶行列式,并猜想 n 阶行列式的类似结论.在给出 n 阶行列式展开结论的基础上,顺利完成了诸性质的证明,并通过性质给出了行列式计算的化上三角形方法,最后简单介绍了行列式在求解线性方程组中的具体应用——Cramer 法则.与以往教法相比,学员在性质理解上摒弃了逆序数等琐碎概念带来的困扰,另一方面,在学时上从以往的 8 学时授课减少到 4 学时授课,节约的学时组织学员进行课堂演练和高阶行列式计算技巧的研讨,获得了事半功倍的教学效果.

参考文献:

[1] 同济大学数学系.工程数学:线性代数[M].5 版.北京:高等教育出版社,2007

[2] 吴赣昌.线性代数[M].北京:中国人民大学出版社,2011

[3] 李炯声,查建国,王新茂.线性代数[M].北京:中国科学技术大学出版社,2010

[4] 刘慧.线性代数[M].北京:化学工业出版社,2000

[5] 王朝旺,任开隆.行列式的归纳定义及其性质的证明[J].北京联合大学学报,2005(9):12-15

Proof of Properties Based on Expanding Along Determinant Row (Column)

ZHAO Wei-zhou, YANG Ping

(School of Science, the Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: Most linear algebra textbooks introduce determinant from the definition and the properties of permutation. It take lots of time for teachers to explain the knowledge of permutation and it is easy for students to ignore the importance of determinant computation. Aiming at such problems in determinant teaching, some properties are proved from the expanding along determinant row (column) and some teaching effects are given in this paper.

Key words: linear algebra; determinant; expanding; properties