doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.015

关于不定方程 $x^2+7=y^3$

张　静

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:对于某些 d,若 $Q(d)$ 是 Euclid 域,则对应的 Euclid 整环中算术基本定理成立,利用此来证明不定方程 $x^2+7=y^3$ 没有整数解.

关键词:不定方程;整数解;Euclid 整环

中图分类号:O156.2　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)07-0062-02

有些不定方程的求解是非常困难的,为了解决这些不定方程,人们创立了很多数学方法如初等方法、代数数论方法和丢番图逼近方法等[1-4],这些方法对数论的研究带来了很大的便利.而所谓的代数数论方法,就是把所给的不定方程放在代数数域中考虑,通过代数整数环性质的研究,使问题得到简化.

对于二次域 $Q(\sqrt{d})$,在虚二次域中共有 5 个 Euclid 域:$d=-1,-2,-3,-7,-11$;在实二次域中共有 16 个 Euclid 域:$d=2,3,5,6,7,11,13,17,19,21,29,33,37,41,57,73$.当 $d\equiv 2,3 \pmod 4$ 时,$1,\sqrt{d}$ 是 $Q(\sqrt{d})$ 的一组整基;当 $d\equiv 1 \pmod 4$ 时,$1,\dfrac{-1+\sqrt{d}}{2}$ 是 $Q(\sqrt{d})$ 的一组整基[2].

定义 1[1]　设 $\widetilde{Q}(\sqrt{d})$ 是 $Q(\sqrt{d})$ 的一组基,如果任意的 $\theta\in\widetilde{Q}(\sqrt{d})$,则 θ 必可表示为

$$\theta = uw_1 + vw_2,u,v \in \mathbf{Z}$$

则称 w_1,w_2 是 $Q(\sqrt{d})$ 的一组基,它也称为是 $\widetilde{Q}(\sqrt{d})$ 的一组基.

定义 2[1]　整数 ε 称为单位数,如果它的倒数 ε^{-1} 也是整数.

引理 1[1]　二次域 $Q(\sqrt{d})$ 中的单位数是

(i) 当 $d=-2$ 或 $d\leqslant -5$ 时,仅有 ± 1;

(ii) 当 $d=-1$ 时,有 $\pm 1,\pm i$;

(iii) 当 $d=-3$ 时,有 $\pm 1,\pm\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$;

(iv) 当 $d>1$,时 $d\equiv 2,3 \pmod 4$ 时,有

$$\pm(m_0+n_0\omega)^k=\pm(m_0+n_0\sqrt{d})^k,k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$$

其中 $\omega=\sqrt{d}$,m_0,n_0 是 Pell 方程 $x^2-dy^2=\pm 1$ 的最小整解;

(v) 当 $d>1,d\equiv 1 \pmod 4$ 时,有

$$\pm(m_0+n_0\omega)^k=\pm\left(\left(m_0-\frac{n_0}{2}\right)+\frac{n_0\sqrt{d}}{2}\right)^k,k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$$

收稿日期:2014-10-25;**修回日期**:2014-12-20.

作者简介:张静(1990-),男,重庆万州人,硕士研究生,从事数论研究.

其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{d}}{2}$,$2m_0-n_0$,$n_0$ 是 Pell 方程 $x^2-dy^2=\pm4$ 的最小整解,$m_0+n_0\omega$ 称为是实二次域 $Q(\sqrt{d})$的基本单位.

引理 2[1]　设 M 是唯一分解环,正整数 $k\geqslant2$,以及 $\alpha,\beta\in M$,$(\alpha,\beta)=1$,那么,若 $\alpha\beta=\gamma^k$,$\gamma\in M$,则有

$$\alpha=\varepsilon_1\mu^k,\beta=\varepsilon_2 v,\mu,v\in M$$

其中 ω_1,ω_2 是 M 中的单位元素,且 $\omega_1\omega_2=\omega^k$,$\omega$ 为单位元素.

定理 1　不定方程

$$x^2+7=y^3,x,y\in\mathbf{Z}\tag{1}$$

无整数解.

证明　可以在$\widetilde{Q}(\sqrt{-7})$中来讨论不定方程(1),可以把不定方程(1)化解为

$$(x+\sqrt{-7})(x-\sqrt{-7})=y^3\tag{2}$$

因为 $Q(\sqrt{-7})$是 Euclid 域,由定义 1 和引理 1 得,在二次域 $Q(\sqrt{-7})$中仅有单位±1,1 和$\dfrac{-1+\sqrt{-7}}{2}$是一组整基,下面证明 $x+\sqrt{-7}$和 $x-\sqrt{-7}$互素.

令 $d=(x+\sqrt{-7},x-\sqrt{-7})$,则$\dfrac{d}{(x,\sqrt{-7})}$,因为$\sqrt{-7}$是 $Q(\sqrt{-7})$中的素数,所以 d 可能为 1 或$\sqrt{-7}$,但 $d=\sqrt{-7}$不可能,因为这时必然有$\dfrac{7}{x}$,而这样的 x 显然不是解,所以 $d=1$,即$(x+\sqrt{-7},x-\sqrt{-7})=1$.由引理 2 及单位数的形式有

$$x+\sqrt{-7}=(\mu+v\sqrt{-7})^3,\mu,v\in\mathbf{Z}$$

故有

$$x+\sqrt{-7}=\mu^3-21\mu v^2+(3\mu^2v-7v^3)\sqrt{-7}$$

即

$$1=3\mu^2v-7v^3=(3\mu^2-7v^2)v\tag{3}$$

比较等号两边的系数可知 $v=\pm1$.

情形 1　当 $v=1$ 时,由式(3)得 $3\mu^2=8$,这与 $\mu\in\mathbf{Z}$ 矛盾.

情形 2　当 $v=-1$ 时,由式(3)得 $\mu^2=2$,这与 $\mu\in\mathbf{Z}$ 矛盾.

综上情形 1 和情形 2 的讨论,不定方程(1)无整数解.

参考文献:

[1] 潘承洞,潘承彪.代数数论[M].济南:山东大学出版社,2003

[2] 冯克勤.代数数论[M].北京:科学出版社,2001

[3] 柯召,孙琦.谈谈不定方程[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011

[4] 曹富珍.丢番图引论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989

On the Indeterminate Equation $x^2+7=y^3$

ZHANG Jing

(School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: For some d, if Q(d) is Euclidean field, arithmetical fundamental theorem is carried out in the corresponding Euclid domain, which can be used to prove that this is no integer solution for the indeterminate equation $x^2+7=y^3$.

Key words: indeterminate equation; integer solution; Euclid domain