doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.014

关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=Dy(y+1)(y+2)(y+3)$ (其中 $D=21,23$)

张 洪, 罗 明
(西南大学 数学统计学院, 重庆 400715)

摘 要:主要运用 pell 方程、递推序列、同余式及(非)平方剩余等一些初等方法,证明了不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=21y(y+1)(y+2)(y+3)$ 和 $x(x+1)(x+2)(x+3)=23y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

关键词:不定方程;整数解;递归数列
中图分类号:O156.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)07-0056-06

设 D 是非完全平方数,对形如 $x(x+1)(x+2)(x+3)=21y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的不定方程已有不少研究工作[1-12].此处将运用递归数列的方法证明当 $D=21$ 和 $D=23$ 时,不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=21y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=23y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{2}$$

均无正整数解.

1 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=21y(y+1)(y+2)(y+3)$

先将方程(1)化为

$$(x^2+3x+1)^2-21(y^2+3y+1)^2=-20 \tag{3}$$

易知方程 $X^2-21Y^2=-20$ 的全部整数解[13],由以下 6 个结合类给出:

$$\pm(x_n+y_n\sqrt{21})=\pm(1+\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(1+\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n, n\in\mathbf{Z}$$

$$\pm(\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{21})=\pm(-1+\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(-1+\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n, n\in\mathbf{Z}$$

$$\pm(x'_n+y'_n\sqrt{21})=\pm(13+3\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(13+3\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n, n\in\mathbf{Z}$$

$$\pm(\bar{x}'_n+\bar{y}'_n\sqrt{21})=\pm(-13+3\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(-13+3\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n, n\in\mathbf{Z}$$

$$\pm(x''_n+y''_n\sqrt{21})=\pm(8+2\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(8+2\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n, n\in\mathbf{Z}$$

$$\pm(\bar{x}''_n+\bar{y}''_n\sqrt{21})=\pm(-8+2\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(-8+2\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n, n\in\mathbf{Z}$$

其中 $1+\sqrt{21}$, $13+3\sqrt{21}$, $8+2\sqrt{21}$ 是方程 $X^2-21Y^2=-20$ 的相应结合类的基本解,$55+12\sqrt{21}$ 是 Pell 方程 $u^2-21v^2=1$ 的基本解.由于从式(3)中可知 $y^2+3y+1\equiv1\pmod 2$,从而舍去后面两个结合类,容易知道 $\bar{y}_n=y_{-n}$, $\bar{y}'_n=y'_{-n}$,于是方程(3)的解应满足

收稿日期:2014-10-15;**修回日期**:2014-11-29.
作者简介:张洪(1989-),男,四川自贡人,硕士研究生,从事代数数论研究.

$$(2y+3)^2=\pm 4y_n+5 \tag{4}$$

$$(2y+3)^2=\pm 4y_n'+5 \tag{5}$$

显然对 $\forall n\in\mathbf{Z}$ 有 $3\mid \pm y_n'$,由式(5)可以推出 $(2y+3)^2\equiv 2 \pmod 3$,此不可能,从而排除式(5).因此实际需要讨论的只有式(4).

容易验证下面各式成立:

$$y_{n+1}=110y_n-y_{n-1},y_0=1,y_1=67 \tag{6}$$

$$u_{n+1}=110u_n-u_{n-1},u_0=1,u_1=55 \tag{7}$$

$$v_{n+1}=110v_n-v_{n-1},v_0=0,v_1=12 \tag{8}$$

$$u_{2n}=2u_n^2-1=u_n^2+21v_n^2,v_{2n}=2u_nv_n \tag{9}$$

$$y_n=u_n+v_n \tag{10}$$

$$y_{n+2km}\equiv(-1)^k y_n \pmod{u_m},u_{n+2km}\equiv(-1)^k u_n \pmod{u_m}$$

$$v_{n+2km}\equiv(-1)^k v_n \pmod{u_m} \tag{11}$$

下面将证明式(4)仅当 $n=0$ 时成立,由此求得式(1)的全部正整数解.

1.1 $(2y+3)^2=-4y_n+5$ 解的证明

本节将考察式(4)的解,即 n 取何值时,$-4y_n+5$ 是一个完全平方数.

引理 1　只有 $n=0$ 时,$-4y_n+5$ 是一个完全平方数.

证明　由式(6)得 $y_n>1(n\neq 0)$,从而 $-4y_n+5$ 是负数,不可能为一个平方数,当 $n=0$ 时,$-4y_n+5=1^2$,结果成立.证毕.

1.2 $(2y+3)^2=4y_n+5$ 解的证明

引理 2　设 $2\mid m,m>0$,则 $\left(\frac{\pm 4v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m\pm 4v_m}{541}\right)$.

证明　由式(7)知,对任意的 $m\in\mathbf{Z},m>0$,有 $u_m\equiv 1 \pmod 2$.所以由(9)有 $u_{2m}=2u_m^2-1\equiv 1 \pmod 8$,$\left(\frac{-1}{u_{2m}}\right)=1$,$\left(\frac{2}{u_{2m}}\right)=1$.又 $2\mid m$ 时 $u_m\equiv 1 \pmod 4$,即有 $\left(\frac{-1}{u_m}\right)=1$ 以及 $5u_m\pm 4v_m\equiv 1 \pmod 4$.由式(9),可推知

$$\left(\frac{\pm 4v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm 8u_mv_m+5u_m^2-105v_m^2}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{10u_m^2\pm 8u_mv_m}{u_{2m}}\right)=$$

$$\left(\frac{2}{u_{2m}}\right)\cdot\left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right)\cdot\left(\frac{5u_m\pm 4v_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\cdot\left(\frac{5u_m\pm 4v_m}{u_{2m}}\right)=$$

$$\left(\frac{u_m^2+21v_m^2}{5u_m\pm 4v_m}\right)=\left(\frac{541}{5u_m\pm 4v_m}\right)=\left(\frac{5u_m\pm 4v_m}{541}\right)$$

引理 3　若 $4y_n+5$ 是平方数,则必须 $n\equiv 0 \pmod{100}$.

证明　用对序列 $\{4y_n+5\}$ 取模的方法证明.取 mod 29,排除 $n\equiv 1,2,4 \pmod 5$,此时 $4y_n+5\equiv 12,17,3 \pmod{29}$,剩余 $n\equiv 0,3 \pmod 5$.为节省篇幅,下面只给出每次取模所用的素数以及 n 的剩余情况.取 mod 421,剩余 $n\equiv 0 \pmod 5$;取 mod 179,剩余 $n\equiv 0,5,10 \pmod{20}$;取 mod 149,199,剩余 $n\equiv 0 \pmod{25}$.综合得剩余 $n\equiv 0,25,50 \pmod{100}$.对 $n\equiv 25 \pmod{100}$,令 $n\equiv 100t_1+25$,若 $2\mid t_1$,则 $n\equiv 25 \pmod{40}$;若 $2\nmid t_1$,则 $n\equiv 5 \pmod{40}$.取 mod 41,排除 $n\equiv 25,5 \pmod{40}$,剩余 $n\equiv 0,50 \pmod{100}$.对 $n\equiv 50 \pmod{100}$,令 $n\equiv 100t_2+50$,若 $2\mid t_2$,则 $n\equiv 10,50 \pmod{80}$;若 $2\nmid t_2$,则 $n\equiv 30,70 \pmod{80}$.取 mod 239,排除 $n\equiv 10,50,30,70 \pmod{80}$,剩余 $n\equiv 0 \pmod{100}$.

引理 4 设 $n\equiv 0(\bmod 100)$,仅当 $n=0$ 时 $4y_n+5$ 为平方数.

证明 令 $n=2\cdot k\cdot 5^2\cdot 2^t(t\geqslant 1,k\equiv 1(\bmod 2))$,对 $\{5u_m\pm 4v_m\}$ 取 mod 541 所得的两个剩余序列周期均为 45,而 $\{2^t\}$ 对 mod 45 的剩余序列具有周期 12.对 k 分两种情况讨论.

1) $k\equiv 1(\bmod 4)$时.当 $t\equiv 0,1,4(\bmod 12)$时,令 $m\equiv 2^t$;当 $t\equiv 3,5,7,9,11(\bmod 12)$时,令 $m\equiv 5\cdot 2^t$;当 $t\equiv 2,6,8,10(\bmod 12)$时,令 $m\equiv 5^2\cdot 2^t$.则当 $t(\geqslant 1)(\bmod 12)=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$ 时,$m(\bmod 45)=1,2,10,40,16,25,25,10,10,40,40,25$,对应 $\{5u_m+4v_m\}(\bmod 541)=323,360,479,356,357,247,247,479,479,356,356,247$,这些数均为模 541 的平方非剩余.于是,由式(10)(11)及引理 2,得

$$4y_n+5\equiv 4y_{2m}+5\equiv 4v_{2m}+5(\bmod u_{2m})$$

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{4v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m+4v_m}{541}\right)=-1$$

从而 $4y_n+5$ 是非平方数.

2) $k\equiv -1(\bmod 4)$时.当 $t\equiv 2,3,6,9,11(\bmod 12)$时,令 $m\equiv 2^t$;当 $t\equiv 0,4,8,10(\bmod 12)$时,令 $m\equiv 5\cdot 2^t$;当 $t\equiv 1,5,7(\bmod 12)$时,令 $m\equiv 5^2\cdot 2^t$.则当 $t(\geqslant 1)(\bmod 12)=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$ 时,$m(\bmod 45)=5,5,4,8,35,35,19,5,20,17,35,23$,对应 $\{5u_m-4v_m\}(\bmod 541)=356,356,331,447,479,479,455,356,247,250,479,428$,这些数均为模 541 的平方非剩余.于是,由式(10)(11)及引理 2,有

$$4y_n+5\equiv -4y_{2m}+5\equiv -4v_{2m}+5(\bmod u_{2m})$$

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-4v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m-4v_m}{541}\right)=-1$$

从而 $4y_n+5$ 是非平方数.

2 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=23y(y+1)(y+2)(y+3)$

先将方程(2)化为

$$(x^2+3x+1)^2-23(y^2+3y+1)^2=-22 \tag{12}$$

易知方程 $X^2-23Y^2=-22$ 的全部整数解[13],由以下两个非结合类给出:

$\pm(x_n+y_n\sqrt{23})=\pm(1+\sqrt{23})(u_n+v_n\sqrt{23})=\pm(1+\sqrt{23})(24+5\sqrt{23})^n,n\in\mathbf{Z}$

$\pm(\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{23})=\pm(-1+\sqrt{23})(u_n+v_n\sqrt{23})=\pm(-1+\sqrt{23})(24+5\sqrt{23})^n,n\in\mathbf{Z}$

其中 $1+\sqrt{23}$ 是方程 $X^2-23Y^2=-22$ 的相应结合类的基本解,$24+5\sqrt{23}$ 是 Pell 方程 $u^2-23v^2=1$ 的基本解.于是方程(2)的解应满足

$$(2x+3)^2=4x_n+5 \tag{13}$$

$$(2x+3)^2=4\bar{x}_n+5 \tag{14}$$

显然必满足 $x_n\geqslant -1,\bar{x}_n\geqslant -1$.从而式(13)(14)中的 $x_n,\bar{x}_n$ 只需取

$$x_n+y_n\sqrt{23}=(1+\sqrt{23})(u_n+v_n\sqrt{23})=(1+\sqrt{23})(24+5\sqrt{23})^n,n\geqslant 0$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{23}=(-1+\sqrt{23})(u_n+v_n\sqrt{23})=(-1+\sqrt{23})(24+5\sqrt{23})^n,n\geqslant 0$$

由这两个式子不难推出下列关系式:

$$x_{n+1}=48x_n-x_{n-1},x_0=1,x_1=139 \tag{15}$$

$$\bar{x}_{n+1}=48\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1},\bar{x}_0=-1,\bar{x}_1=91 \tag{16}$$

$$u_{n+1}=48u_n-u_{n-1},u_0=1,u_1=24 \tag{17}$$

$$v_{n+1}=48v_n-v_{n-1},v_0=0,v_1=5 \tag{18}$$

$$u_{2n}=2u_n^2-1=u_n^2+23v_n^2,v_{2n}=2u_nv_n \tag{19}$$

$$x_n=u_n+23v_n,\bar{x}_n=-u_n+23v_n \tag{20}$$

$$x_{n+2km}\equiv(-1)^kx_n(\bmod u_m),u_{n+2km}\equiv(-1)^ku_n(\bmod u_m)$$

$$v_{n+2km}\equiv(-1)^kv_n(\bmod u_m) \tag{21}$$

下面将证明式(13)仅当 $n=0$ 时成立,式(14)仅当 $n=0$ 时成立,由此求得(2)式的全部正整数解.

2.1　$(2x+3)^2=4x_n+5$ 解的证明

本节将考察式(13)的解,即 n 取何值时 $4x_n+5$ 为完全平方数.

引理 5　设 $4|m,m>0$,则 $\left(\frac{\pm92v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m\pm92v_m}{131}\right)$.

证明　当 $4|m$ 时,由式(17)知 $u_m\equiv1(\bmod 4),u_m\equiv1(\bmod 3),u_m\equiv1(\bmod 23)$,所以有 $u_{2m}=2u_m^2-1\equiv1(\bmod 8)$, $92v_m\pm5u_m\equiv\pm1(\bmod 4)$.由式(19),可推知

$$\left(\frac{\pm92v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm184u_mv_m+10u_m^2}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2}{u_{2m}}\right)\cdot\left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right)\cdot\left(\frac{5u_m\pm92v_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{92v_m\pm5u_m}{u_{2m}}\right)=$$

$$\left(\frac{u_m^2+23v_m^2}{5u_m\pm92v_m}\right)=\left(\frac{9039}{92v_m\pm5u_m}\right)=\left(\frac{3}{92v_m\pm5u_m}\right)\cdot\left(\frac{23}{92v_m\pm5u_m}\right)\cdot\left(\frac{131}{92v_m\pm5u_m}\right)=$$

$$\left(\frac{131}{5u_m\pm92v_m}\right)=\pm\left(\frac{92v_m\pm5u_m}{131}\right)=\left(\frac{5u_m\pm92v_m}{131}\right)$$

引理 6　若式(13)成立,则必须 $n\equiv0(2^3\times3\times5^2\times7)$.

证明　同引理 3 的证明类似,用对序列$\{4x_n+5\}$取模的方法证明.由于数字 $2^3\times3\times5^2\times7$ 较大,证明分两步进行.

1) 取模 29,3109,2239,剩余 $n\equiv0,18,28,46,54(\bmod 56)$.取模 7,47,13,167,1 511,4 871,剩余 $n\equiv0,6,42,60(\bmod 84)$.综合得剩余 $n\equiv0,84(\bmod 168)$.对 $n\equiv84(\bmod 168)$,令 $n\equiv168t_1+84$,若 $2|t_1$,则 $n\equiv4(\bmod 16)$,取 mod 673,排除 $n\equiv4(\bmod 16)$;若 $2\nmid t_1$,则 $n\equiv12(\bmod 16)$,取 mod 31,排除 $n\equiv12(\bmod 16)$.剩余 $n\equiv0(\bmod 168)$.

2) 取模 2 351,11,2 819,101,2 099,44 201,剩余 $n\equiv0,2,10,50(\bmod 100)$.取模 7,47,9 001,149,599,19 051,剩余 $n\equiv0,21,60,75,90,120(\bmod 150)$.综合得剩余 $n\equiv0,150(\bmod 300)$.

综上得 $n\equiv0(2^3\times3\times5^2\times7)$.

引理 7　设 $n\equiv0(2^3\times3\times5^2\times7)$,仅当 $n=0$ 时式(13)成立.

证明　令 $n=2\cdot k\cdot3\cdot5^2\cdot7\cdot2^t(t\geqslant2,k\equiv1(\bmod 2))$,对$\{5u_m\pm92v_m\}$取 mod 131 所得的两个剩余序列周期均为 44,而$\{2^t\}$对 mod 44 的剩余序列具有周期 10.对 k 分两种情况讨论.

1) $k\equiv1(\bmod 4)$时.当 $t\equiv1,3(\bmod 10)$时,令 $m\equiv2^t$;当 $t\equiv7,9(\bmod 10)$时,令 $m\equiv5\cdot2^t$;当 $t\equiv5(\bmod 10)$时,令 $m\equiv5^2\cdot2^t$;当 $t\equiv6,8(\bmod 10)$时,令 $m\equiv3\cdot7\cdot2^t$;当 $t\equiv2,4(\bmod 10)$时,令 $m\equiv3\cdot5\cdot7\cdot2^t$;当 $t\equiv0(\bmod 10)$时,令 $m\equiv3\cdot5^2\cdot7\cdot2^t$.则当 $t(\geqslant2)(\bmod 10)=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 时,$m(\bmod 44)=8,24,24,8,8,8,24,24,8,8$,对应$\{5u_m+92v_m\}(\bmod 131)=86,68,68,86,86,86,68,68,86,86$,这些数均为模 131 的平方非剩余.于是,由式(20)(21)及引理 5,得

$$4x_n+5\equiv4x_{2m}+5\equiv92v_{2m}+5(\bmod u_{2m})$$

$$\left(\frac{4x_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{92v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m+92v_m}{131}\right)=-1$$

从而 $4x_n+5$ 非平方数,故仅当 $n=0$ 时(13)式成立.

2) $k\equiv-1(\bmod 4)$ 时. 当 $t\equiv 6,8(\bmod 10)$ 时,令 $m\equiv 2^t$;当 $t\equiv 2,4(\bmod 10)$ 时,令 $m\equiv 5\cdot 2^t$;当 $t\equiv 0(\bmod 10)$ 时,令 $m\equiv 5^2\cdot 2^t$;当 $t\equiv 1,3(\bmod 10)$ 时,令 $m\equiv 3\cdot 7\cdot 2^t$;当 $t\equiv 7,9(\bmod 10)$ 时,令 $m\equiv 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^t$;当 $t\equiv 5(\bmod 10)$ 时,令 $m\equiv 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2^t$.则当 $t(\geqslant 2)(\bmod 10)=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 时,$m(\bmod 44)=36,20,20,36,36,36,20,20,36,36$,对应 $\{5u_m-92v_m\}(\bmod 131)=86,68,68,86,86,86,68,68,86,86$,这些数均为模 131 的平方非剩余.于是,由式(20)(21)及引理 5,得

$$4x_n+5\equiv-4x_{2m}+5\equiv-92v_{2m}+5(\bmod u_{2m})$$

$$\left(\frac{4x_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-92v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m-92v_m}{131}\right)=-1$$

从而 $4x_n+5$ 非平方数,故仅当 $n=0$ 时(13)式成立.

2.2 $(2x+3)^2=4\bar{x}_n+5$ 解的证明

引理 8 若式(14)成立,则必须 $n\equiv 0(2^3\times 3\times 5^2\times 7)$.

证明 同引理 6 的证明类似,采取对序列 $\{4\bar{x}_n+5\}$ 取模的办法来证明. 由于数字 $2^3\times 3\times 5^2\times 7$ 较大,证明分两步进行.

1) 取模 29,3 109,2 239,剩余 $n\equiv 0,28,30,52(\bmod 56)$.取模 7,47,13,167,1511,4871,剩余 $n\equiv 0,36,42,66(\bmod 84)$.综合得剩余 $n\equiv 0,84(\bmod 168)$.对 $n\equiv 84(\bmod 168)$,令 $n\equiv 168t_1+84$.若 $2\mid t_1$,则 $n\equiv 4(\bmod 16)$,取 mod 673,排除 $n\equiv 4(\bmod 16)$;若 $2\nmid t_1$,则 $n\equiv 12(\bmod 16)$,取 mod 31,排除 $n\equiv 12(\bmod 16)$.剩余 $n\equiv 0(\bmod 168)$.

2) 取模 2 351,11,2 819,101,2 099,44 201,剩余 $n\equiv 0,40,50(\bmod 100)$.取模 7,47,9001,149,599,19051,剩余 $n\equiv 0,15,54,75,105,135(\bmod 150)$. 综合得剩余 $n\equiv 0,150(\bmod 300)$.

综上得 $n\equiv 0(2^3\times 3\times 5^2\times 7)$.

引理 9 设 $n\equiv 0(2^3\times 3\times 5^2\times 7)$,仅当 $n=0$ 时(14)式成立.

证明 当 $n\equiv 0(2^3\times 3\times 5^2\times 7)$ 时,证明过程与引理 7 的一致,这里不再证明.

3 结 果

根据前面的讨论,现给出文中的两个主要结果.

定理 1 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=21y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

证明 由引理 1 有 $(2y+3)^2=-4y_0+5=1$,因此 $y=-1,-2$.由引理 4 有 $(2y+3)^2=4y_0+5=9$,因此 $y=0,-3$.由此,容易知道方程(1)仅有 16 组平凡解,即(0,0),(0,−1),(0,−2),(0,−3),(−1,0),(−1,−1),(−1,−2),(−1,−3),(−2,0),(−2,−1),(−2,−2),(−2,−3),(−3,0),(−3,−1),(−3,−2),(−3,−3).因此不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=21y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

定理 2 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=23y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

证明 由引理 7 知,要式(13)成立,则必须 $n=0$,此时 $x=0,-3$.由引理 9 知,要式(14)成立,则必须 $n=0$,此时 $x=-1,-2$.由此,容易知道方程(2)仅有 16 组平凡解,即(0,0),(0,−1),(0,−2),(0,−3),(−1,0),(−1,−1),(−1,−2),(−1,−3),(−2,0),(−2,−1),(−2,−2),(−2,−3),(−3,0),(−3,−1),(−3,−2)(−3,−3).因此不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=21y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

参考文献:

[1] COHN J E. The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. Pacific J Math, 1971(37): 240-331

[2] PONNUDURAI T. The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=3y(y+1)\cdot(y+2)(y+3)$[J]. J London Math Soc, 1975(10):232-240

[3] 宣体佐.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 北京师范大学学报:自然科学版, 1982(2):27-34

[4] 罗明.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 重庆师范学院学报:自然科学版, 1991, 8(1):1-8

[5] 徐学文.关于不定方程 $p^{2k}x(x+1)(x+2)(x+3)=y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 华中师范大学学报:自然科学版, 1997(3):257-259

[6] LUO M. On The Diophantine Equation$x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)\cdot(y+3)$[J]. Indian J pure appl Math, 2001(1):3-7

[7] 程遥,马玉林.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].重庆师范大学学报:自然科学版, 2007, 24(1):27-30

[8] 段辉明,杨春德.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].四川师范大学学报:自然科学版, 2009, 32(1):60-63

[9] 罗明,朱德辉,马芙蓉.关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)\cdot(y+3)$[J].重庆师范大学学报:自然科学版, 2009,26(5):16-21

[10] 瞿云云,曹慧,罗永贵,等.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=15y(y+1)\cdot(y+2)(y+3)$[J].西南师范大学学报:自然科学版, 2012, 37(6):9-14

[11] 郭凤明,肖冬雪, 安莹.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].西南师范大学学报:自然科学版, 2013, 38(10):13-16

[12] 郭凤明, 罗明.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=13y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2013, 30(5):101-105

[13] 柯召,孙琦.谈谈不定方程[M].上海:哈尔滨工业大学出版社,1980

On the Indefinite Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=Dy(y+1)(y+2)(y+3)$ $(D=21,23)$

ZHANG Hong, LUO Ming

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: With the elementary method of Pell equations, recurrence sequence, congruent form and quadratic residue, it is shown that the indefinite equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=21y(y+1)(y+2)(y+3)$ and $x(x+1)(x+2)(x+3)=23y(y+1)\cdot(y+2)(y+3)$ has no positive solution.

Keywords: indefinite equation; integer solution; recurrence sequence