doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.013

反函数求导定理的变体*

曾 小 林

(重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘　要:首先针对函数在区间端点的单侧导数给出反函数相应单侧导数的求导公式;然后将反函数求导定理中的可导性条件“函数在某点可导且导数非零”分别换为“函数在某点可导且导数为 0”与“函数在某点有无穷导数”,得到反函数求导定理的各种变体.

关键词:反函数;求导公式;单侧导数

中图分类号:O172.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)07-0052-04

在微积分中,函数的导数定义与求导法则是微分学的重点知识,不少文献对此进行了探讨,如文献[1]介绍了用导数求极限的方法,文献[2]结合极限、洛必达法则等辨析了导数的概念. 反函数是微积分中另一个基础概念,而反函数的求导定理是一元函数求导公式的重要组成部分. 相比于其他求导法则,反函数的求导定理更深刻,它的证明除了使用导数的定义之外,还依赖于反函数的性质,尤其是反函数连续性定理,因此可以说它是数学分析中一个比较深刻的结论.有文献对反函数求导定理的条件可否减弱进行了仔细的分析[3].此处从另一角度,即某些特殊情形入手,对此定理进行讨论,目的在于拓广反函数求导定理的使用范围,进一步深化对反函数求导定理的认识.

在讨论反函数求导定理之前,首先对反函数的概念进行简单的回顾.

定义 1　设 $y=f(x)$ 是从定义域 $D(f)$ 到值域 $Z(f)$ 的一一对应函数,则对每个 $y\in Z(f)$,有唯一的 $x\in D(f)$ 使得 $f(x)=y$. 记该对应法则确定的函数为 $x=\varphi(y)$,称为 $y=f(x)$ 的反函数,此时 $y=f(x)$ 称为直接函数. 显然 $D(\varphi)=Z(f)$,$Z(\varphi)=D(f)$.

关于反函数的下列事实将在文中用到:严格单调函数必然有反函数,并且反函数与直接函数具有相同的单调性,更深入地,有下列反函数连续性定理:

定理 1[4]　设 $y=f(x)$ 在一个区间 I_x 上严格单调增加(或减少),并且在其中每点连续,那么它的值域 $Z(f)=I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 也是一个区间,且它的反函 $x=f^{-1}(y)$ 在 I_y 上严格单调增加(相应地,减少)且连续.

为了介绍文中的主要结果,先回忆反函数求导定理如下:

定理 2[5]　设函数 $y=f(x)$ 在某一区间上是严格单调的连续函数,在区间内一点 x_0 处可导,且 $f'(x_0)\neq 0$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 处可导,且有 $\varphi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

观察定理 1,2,可知其中的 x_0 点仅限于区间的内点,而不包括区间的端点,因为这时函数至多存在单侧

收稿日期:2015-03-27;**修回日期**:2015-04-28.

* **基金项目**:国家自然科学基金项目资助(11301568);重庆市教委科技项目资助(KJ120732);重庆工商大学科研启动项目资助(2012-56-10).

作者简介:曾小林(1980-),男,湖北荆门人,讲师,博士,从事泛函分析研究.

导数.文章首先在命题 1,2 中讨论了当 x_0 为区间端点时的情况,对反函数求导定理在区间端点处的特殊情形加以明确说明;然后,改变反函数求导定理的可导性条件,分别研究了当 $f'(x_0)=0$,$f'(x_0)=\infty$ 时反函数求导定理的各种表现形式.

1　主要结果及其证明

命题 1　设函数 $y=f(x)$ 在某一区间 $[a,a+r]$ 上是严格单调增加(或减少)的连续函数, $f(x)$ 在点 a 的右导数 $f'_+(a)$ 存在且 $f'_+(a)\neq 0$, 则 $y=f(x)$ 在 $[a,a+r]$ 上的反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(a)$ 处右导数(相应地,左导数)存在, 且有

$$\varphi'_+(y_0)=\frac{1}{f'_+(a)};\varphi'_-(y_0)=\frac{1}{f'_+(a)}$$

证明　仅证当 $y=f(x)$ 在 $[a,a+r]$ 上是严格单调增加连续函数的情形,当 $y=f(x)$ 在 $[a,a+r]$ 上是严格单调减少连续函数的情形类似可证.

若记 $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$, 注意 $a=\varphi(y_0)$, 得 $\Delta x+a=\varphi(y_0+\Delta y)$, 从而 $f(\Delta x+a)=f(\varphi(y_0+\Delta y))=y_0+\Delta y=f(a)+\Delta y$, 即 $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$. 现考虑极限式 $\lim\limits_{\Delta y\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$. 由定理 1 可知,$\varphi(y)$ 在区间 $[f(a),f(a+r)]$ 上连续且严格单调增加,故由 $\Delta y\neq 0$ 可知 $\Delta x\neq 0$ 且两者同号. 并注意当 $\Delta y\to 0^+$ 时, 由 φ 的连续性及严格单调性知,$\Delta x\to 0^+$,故

$$\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'_+(a)}$$

即 $\varphi'_+(y_0)=\dfrac{1}{f'_+(a)}$.

命题 2　设函数 $y=f(x)$ 在某一区间 $[a-r,a]$ 上是严格单调增加(或减少)的连续函数, $f(x)$ 在点 a 的左导数 $f'_-(a)$ 存在且 $f'_-(a)\neq 0$, 则 $y=f(x)$ 在 $[a-r,a]$ 上的反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(a)$ 处左导数(相应地,右导数)存在, 且有

$$\varphi'_-(y_0)=\frac{1}{f'_-(a)}\ ;\varphi'_+(y_0)=\frac{1}{f'_-(a)}$$

由于命题 2 与命题 1 的证明类似,故略去.

观察 $y=x^3$ 在 $x=0$ 处的导数为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x^2=0$,而 $y=x^3$ 的反函数 $x=y^{\frac{1}{3}}$ 在 $y=0$ 处的导数为 $+\infty$. 据此自然猜测:定理 2 中的可导性条件“$f(x)$ 在区间内一点 x_0 处可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$”可以换成下列条件: “$f(x)$ 在区间内一点 x_0 处可导, 且 $f'(x_0)=0$”. 精确地说,证明了定理 2 的下列变体(命题 3).

命题 3　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加(或减少)的连续函数, $x_0\in(a,b)$ 且 $f'(x_0)=0$, 则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 处不可导,且有 $\varphi'(y_0)=+\infty$ (相应地,$\varphi'(y_0)=-\infty$).

证明　仅证当 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是严格单调增加连续函数的情形,当 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是严格单调减少连续函数的情形类似可证.

由 $f'(x_0)=0$ 知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$, 其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 即 $f(x_0)+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$, 从而 $\varphi(f(x_0)+\Delta y)=\varphi(f(x_0+\Delta x))=x_0+\Delta x$, 即 $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$.

从 φ 的连续性及严格单增性可知, 当 $\Delta y\to 0$ 时, $\Delta x\to 0$, 且有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$, 得 $\varphi'(y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=+\infty$.

证毕.

正如命题 1,2 是定理 2 在区间端点处的表现形式, 对于命题 3 来说, 它也有在区间端点处的版本:命题 4 与命题 5.

命题 4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,a+r]$ 上是严格单调增加(或减少)的连续函数, $f'_+(a)=0$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 处不可导,且有 $\varphi'_+(y_0)=+\infty$ (相应地,$\varphi'_-(y_0)=-\infty$).

证明 仅证当 $y=f(x)$ 在 $[a,a+r]$ 上是严格单调减少连续函数的情形,当 $y=f(x)$ 在 $[a,a+r]$ 上是严格单调增加连续函数的情形类似可证.

若记 $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$, 注意 $a=\varphi(y_0)$, 得 $\Delta x+a=\varphi(y_0+\Delta y)$, 从而 $f(\Delta x+a)=f(\varphi(y_0+\Delta y))=y_0+\Delta y=f(a)+\Delta y$, 即 $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$. 现考虑极限式 $\lim\limits_{\Delta y\to 0^-}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$,由定理 1 可知,$\varphi(y)$ 在区间 $[f(a+r),f(a)]$ 上连续且严格单调减少,故当 $\Delta y\to 0^-$ 时, $\Delta x\to 0^+$, 此时 $\Delta y<0,\Delta x>0$. 再由 $f'_+(a)=0$ 得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$,从而 $\lim\limits_{\Delta y\to 0^-}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=-\infty$, 即 $\varphi'_-(y_0)=-\infty$.

命题 5 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a-r,a]$ 上是严格单调增加(或减少)的连续函数, $f'_-(a)=0$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(a)$ 处不可导,且有 $\varphi'_-(y_0)=+\infty$ (相应地,$\varphi'_+(y_0)=-\infty$).

命题 5 与命题 4 的证明类似,略去.

从上面的命题 3,4,5 知,定理 2 中的可导性条件“$f(x)$ 在区间内一点 x_0 处可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$”是可以改变的.下面进一步将其改变成不可导的特殊情况:“ $f'(x_0)=\infty$ ”.

命题 6 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是严格单调增加(或减少)的连续函数, $x_0\in(a,b)$ 且 $f'(x_0)=\infty$. 则 $f'(x_0)=+\infty$ (相应地,$f'(x)=-\infty$), 且 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 处可导,且有 $\varphi'(y_0)=0$.

证明 仅证当 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是严格单调增加连续函数的情形,当 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是严格单调减少连续函数的情形类似可证.

若记 $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$, 注意 $\varphi(y_0)=x_0$, 得 $\Delta x+x_0=\varphi(y_0+\Delta y)$, 从而 $f(\Delta x+x_0)=y_0+\Delta y=f(x_0)+\Delta y$, 即 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 已知 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, 并注意由 $f(x)$ 的严格单调增加性可知当 $\Delta x\to 0$ 时, Δy 与 Δx 同号且均非 0, 故 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$. 再由 φ 的连续性可知当 $\Delta y\to 0$ 时 $\Delta x\to 0$, 故

$$\varphi'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=0$$

命题 7 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,a+r]$ 上是严格单调增加(或减少)的连续函数, $f'_+(a)=\infty$,则 $f'_+(a)=+\infty$ (相应地,$f'_+(a)=-\infty$), $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(a)$ 处满足 $\varphi'_+(y_0)=0$ (相应地,$\varphi'_-(y_0)=0$).

证明 仅证当 $y=f(x)$ 在 $[a,a+r]$ 上是严格单调增加连续函数的情形,当 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是严格单调减少连续函数的情形类似可证.

若记 $\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)$, 注意 $\varphi(y_0)=a$, 得 $a+\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)$, 从而 $f(a+\Delta x)=y_0+\Delta y$, 即 $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$. 已知 $f'_+(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, 并注意由 $f(x)$ 的严格单调增加性可知当 $\Delta x\to 0^+$ 时, Δy 与 Δx 同为正

数，故 $f'_+(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$. 再由 φ 的连续性与严格单调增加性可知当 $\Delta y\to 0^+$ 时 $\Delta x\to 0^+$，从而 $\varphi'_+(y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}=0$.

命题 8　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a-r,a]$ 上是严格单调增加(或减少)的连续函数，$f'_-(a)=\infty$，则 $f'_-(a)=+\infty$（相应地，$f'_-(a)=-\infty$），$y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(a)$ 处满足 $\varphi'_-(y_0)=0$（相应地，$\varphi'_+(y_0)=0$）.

命题 8 的证明同命题 7，略.

命题 6,7,8 可以看成当定理 2 中的可导性条件变为某点处导数为无穷时,分别考虑该点为区间内部的点、区间的左端点、区间的右端点 3 种情况得到的反函数求导公式的变体.

最后给出一个例子简单说明文中结果的应用.

例 1　设 $\varphi(y)=\arcsin y$，$y\in[-1,1]$，求 $\varphi'_+(-1)$ 与 $\varphi'_-(1)$.

解　注意 $\varphi(y)=\arcsin y$，$y\in[-1,1]$ 是 $f(x)=\sin x, x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 的反函数. $f(x)=\sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上是严格单调增加的连续函数. 注意 $f'_+(-\dfrac{\pi}{2})=\cos(-\dfrac{\pi}{2})=0$，$f(-\dfrac{\pi}{2})=\sin(-\dfrac{\pi}{2})=-1$，由命题 4 得 $\varphi'_+(-1)=+\infty$.

再注意 $f'_-(\dfrac{\pi}{2})=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，$f(\dfrac{\pi}{2})=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，由命题 5 得 $\varphi'_-(1)=+\infty$.

参考文献:

[1] 李萍,成立花.巧用导数的定义式求极限[J].高等数学研究,2007,10(5):18-19

[2] 吴永锋.“微积分”课程教学中若干问题的辨析[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2014,31(12):38-41

[3] 沈晨,金贵荣.关于反函数求导定理的注记[J].高等数学研究,2007,10(5):43-44

[4] 同济大学数学系.高等数学(上册)[M].6 版.北京:高等教育出版社,2007

[5] T.M.菲赫金哥尔茨.数学分析原理(第一卷)[M].9 版.北京:高等教育出版社,2013

Variants of the Inverse Function's Derivative Theorem

ZENG Xiao-lin

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Firstly, the unilateral derivative formulas are derived for the inverse function in terms of the unilateral derivative of a strictly monotone and continuous function. Then, some variants of the inverse function derivative theorem are obtained by respectively replacing the condition that “the derivative of the function at some point exists and is nonzero” in the original theorem with “the derivative of the function at some point is 0” and “the derivative of the function at some point is infinity”.

Keywords: inverse function; derivative formula; unilateral derivative